

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКО-
 НЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Джилалян С.А.

Է.Խ. Գրիգորյան, Ս.Ա. Զիլալյան

Պիեզոէլեկտրական տարածությունում սահային ետքը ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաղի վրա

Աշխատանքում պիտարկվում է անվերջության մեջ կիսաանվերջ ճաղի վրա ընկնող սույնի իսկի ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրական տարածությունում: Նմանիքը բերվում է Վինսեր – Հոլմի իրականացումը հալսասարժան լուծմամբ: Ստացվում են տեղադրություններ, լարման, էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի և ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչի բաշխումները պիեզոէլեկտրիկ միջավայրում: Ստացվում են սարմարատական լուծումներ լարման, ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչի համար ճաղի վրայից չրգակայքում, ենտավոր գտնում տրվում են տեղադրություններ ասիմպտոտական (նիկայացումները: Ճույց է տրվում մակերևութային էլեկտրաստանգական ալիքի առկայությունը:

E.Kh. Grigoryan, S.H. Jilalyan

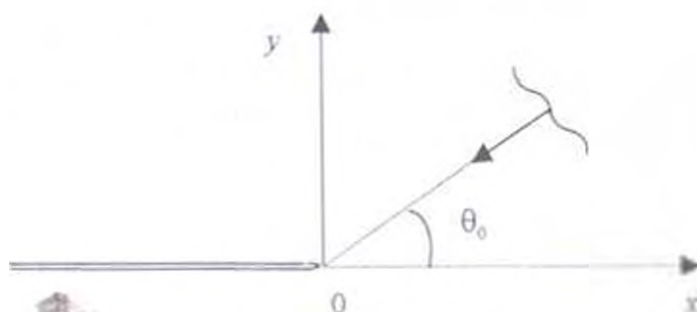
Diffraction of a Plan Shear Wave on Semi-Infinite Crack in a Piezoelectric Space

В работе рассмотрены дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Задача сводится к решению фундаментального уравнения Винера-Хопфа. Получены распределения перемещения напряжения потенциалов и составляющей вектора индукции электрического поля в пьезоэлектрической среде. Получены асимптотические формулы для напряжений и составляющей вектора индукции электрического поля в окрестности вершины трещины, в дальней зоне даны асимптотические представления перемещений. Показано наличие поверхностной электроупругой волны.

1. Рассмотрим пьезоэлектрическое пространство – пьезоэлектрик класса бишп гексагональной симметрии, отнесенное к декартовой системе координат Ox_1x_2 , когда среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Ox_1x_2 при $x < 0$ (фиг. 1). Пусть из бесконечности, под углом θ_0 к плоскости трещины ($0 < \theta_0 < \pi/2$), распространяется плоская волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно:

$$w_\infty(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_2 y \sin \theta_0},$$

$$\Phi_\infty(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_2 y \sin \theta_0} \quad (1.1)$$



Փիգ. 1

Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих электроупругого поля — временной множитель $e^{-i\omega t}$, t — параметр времени, ω — частота колебаний. Здесь $k = \omega / c$ — волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1 + \alpha)} / \rho$ — скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, $\alpha = \epsilon_{15}^2 / c_{44}\epsilon_{11}$ — коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика, c_{44} , ϵ_{11} , ϵ_{15} — упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные пьезоэлектрического пространства, соответственно, а ρ — плотность.

Пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала имеем следующую систему уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} w &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

На берегах трещины для напряжения σ_{yz} имеем условие

$$\sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + \epsilon_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0, x < 0 \quad (1.3)$$

а для электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции —

$$\Phi(x, y)|_{y=\pm 0} = \Phi(x, y)|_{y=\pm 0}; D_2(x, y)|_{y=\pm 0} = D_2(x, y)|_{y=\pm 0}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.4)$$

где $D_2(x, y) = \epsilon_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$.

Введем функции

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w(x, y) - w_+(x, y) \\ \varphi(x, y) &= \Phi(x, y) - \Phi_+(x, y) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тогда для напряжения σ_{yz} получим формулу

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + \epsilon_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_{44} \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \\ &- i k c_{44} (1 + \alpha) \sin \theta_0 e^{-i k x \cos \theta_0 - i k y \sin \theta_0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

а для определения функций $u(x, y)$, $\varphi(x, y)$ из (1.2) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} u &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Введем функции $q^+(x) = q(x)\theta(x)$, $\psi^-(x) = \psi(x)\theta(-x)$

$$\sigma_{y^*}(x, 0) = q'(x) \quad (1.8)$$

$$u(x, +0) - u(x, -0) = \psi(x) \quad (1.9)$$

т.е. $q'(x)$ — напряжение при $y=0$, а $\psi(x)$ представляет разницу перемещений на $y = \pm 0$, $\theta(x)$ — известная функция Хевисайда.

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (1.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2) \bar{u} &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} + k^2 \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\text{где } \bar{u}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\sigma x} dx; \quad \bar{\varphi}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\sigma x} dx$$

Из (1.8), (1.9) имея в виду (1.6), применив преобразование Фурье, получим следующие условия:

$$q'(\sigma) = c_{44} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} + e_{15} \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right|_{y=0} - 2\pi i k c_{44} (1 + \alpha) \sin \theta_0 \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \quad (1.11)$$

$$\bar{\psi}(\sigma) = \bar{u}(\sigma, +0) - \bar{u}(\sigma, -0) \quad (1.12)$$

$\delta(\sigma)$ — функция Дирака.

Чтобы выполнялись условия уходящей волны, принимается, что $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, и $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$. Для выбора такой ветви двузначной функции $\gamma(\sigma)$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ разрезы до бесконечности от точки $\sigma = k$ в верхней полуплоскости и от точки $\sigma = -k$ в нижней полуплоскости, т.е. действительная ось обходит точки ветвления: $-k$ сверху, а k — снизу [2]. Тогда, принимая во внимание условия

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=+0} = \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=-0}, \quad \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=+0} = \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=-0}; \quad \bar{\varphi}(\sigma, +0) = \bar{\varphi}(\sigma, -0)$$

ограниченное и представляющее уходящую волну решение системы (1.10) имеет вид

$$\bar{u}(\sigma, y) = \begin{cases} -A e^{\gamma y} & \text{при } y < 0 \\ A e^{-\gamma y} & \text{при } y > 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = \begin{cases} -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A (e^{\gamma y} - e^{|\sigma| y}) & \text{при } y < 0 \\ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A (e^{-\gamma y} - e^{-|\sigma| y}) & \text{при } y > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

В силу (1.12) очевидно, что

$$A(\sigma) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}(\sigma) \quad (1.15)$$

Из условия (1.11) получим уравнение относительно $A(\sigma)$ и $q^*(\sigma)$

$$c_{44}A(\sigma) - \left((1+\alpha)\sqrt{\sigma^2 - k^2} - \alpha|\sigma| \right) + \bar{q}^*(\sigma) + 2\pi i k c_{44}(1+\alpha)\sin\theta_0 \cdot \delta(\sigma - k\cos\theta_0) = 0 \quad (1.16)$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (1.16), рассмотрим интересный частный случай, когда пьезоэлектрическая среда имеет бесконечную трещину — трещина занимает всю плоскость Oxz . Тогда следует в уравнении (1.16) принять $\bar{q}^*(\sigma) = 0$ (т.е. $\sigma_{yz} = 0$ при $y = 0$, $-\infty < x < \infty$) и определяя $A(\sigma) = 2\pi A_0 \delta(\sigma - k\cos\theta_0)$,

где

$$A_0 = \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0 - i \frac{\alpha}{1+\alpha} \cos\theta_0} \quad (1.17)$$

Из (1.13), (1.14), применяя обратное преобразование, имея в виду (1.1), (1.5), получим решение этой частной задачи. Так, для амплитуды перемещения получим

$$w(x, y) = e^{-ikx\cos\theta_0 - ikysin\theta_0} + A_0 e^{-ikx\cos\theta_0 + ikysin\theta_0} \quad \text{при } y > 0$$

$$w(x, y) = (1 - A_0) e^{-ikx\cos\theta_0 - ikysin\theta_0} \quad \text{при } y < 0 \quad (1.18)$$

на берегах трещины

$$w(x, y) = (1 \pm A_0) e^{-ikx\cos\theta_0} \quad \text{при } y = \pm 0.$$

Волновое поле при $y > 0$ состоит из падающей волны и отраженной, а при $y < 0$ — только из проходящей волны, обусловленной пьезоэффектом.

Как и следовало ожидать, в случае $\alpha = 0$ (отсутствие пьезоэффекта)

при $y > 0$ $w = e^{-ikx\cos\theta_0 - ikysin\theta_0} + e^{-ikx\cos\theta_0 + ikysin\theta_0}$, при $y < 0$ $w = 0$.

Для амплитуды электрического потенциала получим при $y > 0$

$$\Phi(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0} \left(e^{-ikysin\theta_0} + A_0 e^{ikysin\theta_0} \right) - A_0 \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0 - kysin\theta_0}$$

при $y < 0$ (1.19)

$$\Phi(x, y) = (1 - A_0) \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0 - ikysin\theta_0} + A_0 \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0 + ikysin\theta_0}$$

на берегах трещины $y = \pm 0$ $\Phi(x) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0}$.

Волновое поле для электрического потенциала при $y > 0$ состоит из падающей и отраженной волн, при $y < 0$ — из проходящей. Наличие локализованной волны (последние члены в выражениях (1.19)) обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики.

2. Вернемся к решению поставленной задачи о полубесконечной трещине. Уравнение (1.16) можно свести к функциональному уравнению Винера-Хопфа относительно $\bar{\Psi}(\sigma)$ и $\bar{q}(\sigma)$

$$\frac{c_{44}}{2} \bar{\Psi}(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - k^2} \bar{K}(\sigma) + \bar{q}(\sigma) + 2\pi i k c_{44} (1 + \varkappa) \sin \theta_0 \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{где} \quad \bar{K}(\sigma) = 1 + \varkappa - \frac{\varkappa |\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k^2}} \quad (2.2)$$

здесь $\bar{K}(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Функция $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \bar{K}(\sigma) = (1 + \varkappa) \sqrt{\sigma^2 - k^2} - \varkappa |\sigma|$ имеет нули, только если $\sigma = \pm \sigma_n$, где

$$\sigma_n = k \frac{1 + \varkappa}{\sqrt{1 + 2\varkappa}} > k \quad (2.3)$$

Действительная ось обходит точку $\sigma = -\sigma_n$ сверху, а $\sigma = \sigma_n$ снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны.

Для решения функционального уравнения (2.1), факторизуем функцию $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \bar{K}(\sigma)$, представив ее в виде

$$\sqrt{\sigma^2 - k^2} \bar{K}(\sigma) = \sqrt{\sigma + k} \bar{K}^-(\sigma) \sqrt{\sigma - k} \bar{K}^+(\sigma) \quad (2.4)$$

т.е.

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^-(\sigma) \bar{K}^+(\sigma)$$

где функция $\bar{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} \alpha > 0$, а $\bar{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} \alpha < 0$, $\alpha = \sigma + i\tau$. Здесь

$$\begin{aligned} \bar{K}^+(\sigma) &= \exp(F^-(\sigma)), \quad F^-(\sigma) = \int_0^{\infty} F(x) e^{i(\sigma - i0)x} dx \\ \bar{K}^-(\sigma) &= \exp(F^+(\sigma)), \quad F^+(\sigma) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-i(\sigma + i0)x} dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

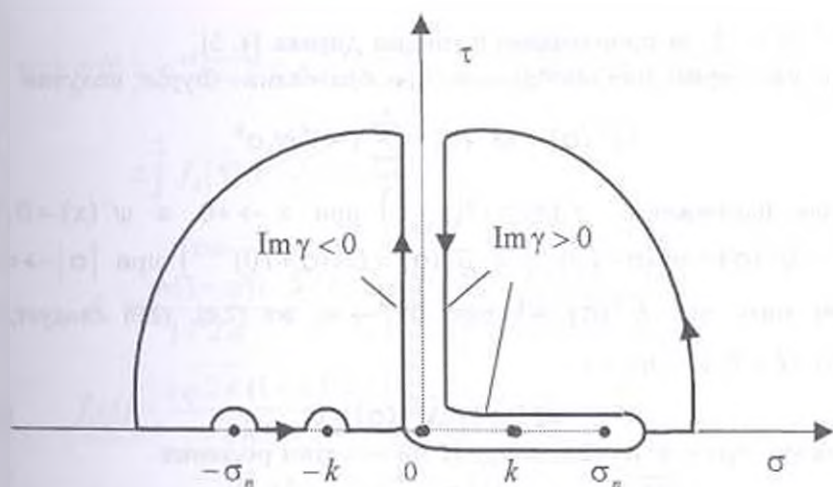
$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\bar{K}(\sigma)) e^{-i\sigma x} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \varkappa - \frac{\varkappa |\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k^2}} \right) \cdot e^{-i\sigma x} d\sigma$$

При $|\sigma| \rightarrow \infty$ $\ln(\bar{K}(\sigma)) = O(\sigma^{-2})$, значит $F(x)$ — непрерывная функция

и при $x = 0$ имеет конечное значение, и следовательно, $F^{\pm}(\sigma) \rightarrow \frac{1}{\sigma \pm i0}$

при $|\sigma| \rightarrow \infty$. $\bar{K}^-(\alpha)$, $\bar{K}^+(\alpha)$ стремятся к единице при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности.

Вычислим $\bar{K}(\sigma)$ методом контурного интегрирования, рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на фиг. 2. Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, с помощью леммы Жордана, получим



Фиг. 2

$$\bar{K}^-(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma_n}{\sigma - k} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^k \operatorname{arctg} \frac{\alpha s}{(\alpha + 1) \sqrt{k^2 - s^2}} \cdot \frac{ds}{s - (\sigma - i0)} \right)$$

$$\bar{K}^+(\sigma) = \bar{K}^-(\sigma)$$
(2.6)

Надо иметь в виду, что $\frac{1}{s - (\sigma - i0)} = \frac{1}{s - \sigma} - i\pi\delta(s - \sigma)$.

Здесь и в дальнейшем аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{при } \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ -\alpha & \text{при } \operatorname{Re} \alpha < 0 \end{cases}$$
(2.7)

Приступим теперь к решению функционального уравнения (2.1). Имея в виду (2.4), а также, что

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}$$

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

уравнение (2.1) сводится к уравнению

$$\bar{M}^-(\sigma) = \bar{\psi}^-(\sigma) \sqrt{\sigma - k} \bar{K}^-(\sigma) + \frac{2\sqrt{2k}(1 + \alpha) \sin \theta_0 / 2}{K^+(k \cos \theta_0) (\sigma - k \cos \theta_0 - i0)} =$$

$$\frac{2\sqrt{2k}(1 + \alpha) \sin \theta_0 / 2}{K^+(k \cos \theta_0) (\sigma - k \cos \theta_0 + i0)} - \frac{2\bar{q}^-(\sigma)}{c_{\alpha} \sqrt{\sigma + k} \bar{K}^-(\sigma)} = M^-(\sigma)$$

$-\infty < \sigma < \alpha$

(2.8)

Методика решения уравнения (2.8) та же, что и в [3]. Применив к (2.8) обратное преобразование Фурье, получим $M^+(x) = M^-(x)$ ($-\infty < x < \infty$), которое может иметь место только, если

$$M^+(x) = M^-(x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \delta^{(k)}(x)$$

где $\delta^{(k)}(x)$ — k -ая производная функции Дирака [4, 5].

Теперь уже, применив обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\bar{M}^-(\sigma) = \bar{M}^+(\sigma) = \sum_{k=0}^n (-i)^k m_k \sigma^k \quad (2.9)$$

Так как напряжение $q^+(x) = O(x^{-1/2})$ при $x \rightarrow +0$, а $\psi^-(x) = 0$ при $x = 0$, $\bar{\psi}^-(\sigma) = O((\sigma - i0)^{-1})$ и $\bar{q}^-(\sigma) = O((\sigma + i0)^{-1/2})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. С учетом того, что $\bar{K}^+(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, из (2.8), (2.9) следует, что $m_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), т.е.

$$\bar{M}^+(\sigma) = \bar{M}^-(\sigma) = 0 \quad (2.10)$$

Таким образом, из (2.8) ввиду (2.10) получим решения

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^-(\sigma) &= -\frac{2\sqrt{2k}(1+\varepsilon)\sin\theta_0/2}{\bar{K}^+(k\cos\theta_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma-k}(\sigma-k\cos\theta_0-i0) \cdot \bar{K}^+(\sigma)} \\ \bar{q}^-(\sigma) &= \frac{\sqrt{2k}(1+\varepsilon)c_{11}\sin\theta_0/2}{\bar{K}^+(k\cos\theta_0)} \cdot \frac{\sqrt{\sigma+k} \bar{K}^+(\sigma)}{\sigma-k\cos\theta_0+i0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Следовательно, решение поставленной задачи, т.е. выражения амплитуд перемещения и потенциала электрического поля, имея в виду (1.1), (1.5), (1.13), (1.14), а также (1.15), представляется в виде

$$w(x, y) = e^{-i\alpha_0 x \cos\theta_0 - i\gamma_0 y \sin\theta_0} \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) e^{-i\sqrt{\sigma^2-k^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (2.12)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{e_{13}}{\varepsilon_{11}} e^{-i\alpha_0 x \cos\theta_0 - i\gamma_0 y \sin\theta_0} \pm \frac{e_{13}}{2\pi\varepsilon_{11}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) \cdot \left(e^{-i\sqrt{\sigma^2-k^2}y} - e^{-i\sqrt{\sigma^2-k^2}y} \right) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (2.13)$$

при $y > 0$ или $y < 0$, соответственно.

Здесь

$$A(\sigma) = -\frac{\sqrt{2k}(1+\varepsilon)\sin\theta_0/2}{\bar{K}^+(k\cos\theta_0) \cdot \sqrt{\sigma-k}(\sigma-k\cos\theta_0-i0) \bar{K}^+(\sigma)} \quad (2.14)$$

Тогда выражения индукции $D_2(x, y)$ и напряжения $\sigma_{11}(x, y)$ представляются в виде

$$D_2(x, y) = -\frac{e_{13}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| A(\sigma) e^{-i\sqrt{\sigma^2-k^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (2.15)$$

$$\sigma_{11}(x, y) = c_{11}(1+\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{11}} D_2(x, y) \quad (2.16)$$

Проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $-k-i\tau$, $k+i\tau$ и $i\tau$ ($0 < \tau < \infty$), обходя точки $\sigma = k\cos\theta_0$ и $\sigma = \sigma_n$ снизу, и $\sigma = -\sigma_n$ сверху и замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, для амплитуды перемещения на берегах трещины ($x < 0$, $y = \pm 0$) из (2.12) получим

$$w(x, \pm 0) = e^{-i k x \cos \theta_0} \pm A_n e^{-i k x \cos \theta_0} \pm e^{i \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right)} \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot e^{i \tau x} d\tau \pm$$

$$\pm \int_0^\infty f_2(\tau) \cdot e^{i \tau x} d\tau \pm A_n e^{-i \sigma_n x} \quad (2.17)$$

где

$$A_n = \frac{\alpha(1+\alpha)i}{1+2\alpha} \frac{\bar{K}^*(\sigma_n) \sin \theta_0 / 2}{\bar{K}^*(k \cos \theta_0)} \frac{\sqrt{2k(\sigma_n + k)}}{k \cos \theta_0 - \sigma_n} \quad (2.18)$$

$$f_1(\tau) = \frac{i \sqrt{2k(1+\alpha)^2 \sin \theta_0 / 2}}{\pi \bar{K}^*(k \cos \theta_0)} \times$$

$$\frac{\bar{K}^*(k+i\tau) \cdot (2k+i\tau) \cdot \sqrt{\tau}}{\left(2k \sin^2 \theta_0 / 2 + i\tau \right) \left(\alpha^2 k^2 - \tau(1+2\alpha)(2ki - \tau) \right)} \quad (2.19)$$

$$f_2(\tau) = \frac{\alpha(1+\alpha)\sqrt{2k} \cdot \sin \theta_0 / 2}{\pi \bar{K}^*(k \cos \theta_0)} \frac{\bar{K}^*(i\tau) \cdot \sqrt{k+i\tau} \cdot \tau}{(k \cos \theta_0 - i\tau) \left((1+\alpha)^2 k^2 + \tau^2 (1+2\alpha) \right)}$$

Из (2.17) следует, что полное поле на берегах трещины складывается из порций падающей и отраженной на верхнем ($y = +0$) или проходящей на нижнем ($y = -0$) берегах трещины, соответственно, и дифрагированной объемной сдвиговой волн, а также из неволновой части и поверхностной волны. Наличие последних двух волн и проходящей волны обусловлено пьезоэффектом — характерным свойством пьезоэлектрической среды. В случае $\alpha = 0$ (изотропное пространство) решение совпадает с приведенным в [2] решением.

На берегах трещины из (2.15) получим следующее выражение для индукции:

$$D_2(x, 0) = -e_{15} k \cos \theta_0 A_n e^{-i k x \cos \theta_0} - e_{15} \sigma_n A_n e^{-i \sigma_n x} - e_{15} e^{i \left(\frac{\pi}{4} - kx \right)} \times$$

$$\times \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot (k+i\tau) e^{i \tau x} d\tau + \frac{e_{15}(1+\alpha)i}{\alpha} \int_0^\infty f_2(\tau) \sqrt{k^2 + \tau^2} e^{i \tau x} d\tau, \quad x < 0 \quad (2.20)$$

Как видно из (2.20), волновое поле состоит как из поверхностных волн с разными волновыми числами — $k \cos \theta_0$, σ_n , k , так и из неволновой части.

Асимптотические представления амплитуд перемещения и индукции при $x \rightarrow -\infty$ имеют вид

$$w(x, \pm 0) = (1 \pm A_n) e^{-i k x \cos \theta_0} \pm A_n e^{-i \sigma_n x} \pm e^{i \left(\frac{\pi}{4} - kx \right)} \times$$

$$\times \left(\frac{a}{|\pi k x|^{3/2}} + O(|k x|^{-5/2}) \right) \pm \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{b}{(\pi k x)^2} + O(|k x|^{-3}) \right), \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.21)$$

$$D_2(x, 0) = -e_{15} k \cos \theta_0 A_0 e^{-i k x \cos \theta_0} - e_{15} \sigma_n A_n e^{-i \sigma_n x} - e_{15} k e^{\left(\frac{x}{2} - kx\right)} \times \\ \times \left(\frac{a}{|\pi k x|^{3/2}} + O(|k x|^{-5/2}) \right) + e_{15} k \left(\frac{ib}{(\pi k x)^2} + O(|k x|^{-3}) \right), \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.22)$$

$$\text{т.е. } a = \frac{i \pi \sqrt{2} (1 + \varepsilon)^2 \bar{K}'(k)}{2 \varepsilon^2 \sin \theta_0 / 2 \cdot \bar{K}'(k \cos \theta_0)}, \quad b = \frac{\sqrt{2} (1 + \varepsilon) \pi \sin \theta_0 / 2}{\cos \theta_0 \cdot \bar{K}'(k \cos \theta_0)}$$

Здесь было учтено, что $\bar{K}''(0) = \sqrt{1 + \varepsilon}$.

Проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $k + i\tau$, $-i\tau$ ($0 < \tau < \infty$), обходя точку $\sigma = k \cos \theta_0$ снизу и замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, для амплитуды индукции D_2 на $y = 0$ при $x > 0$ из (2.15) получим

$$D_2(x, 0) = \frac{e_{15} \sqrt{2k(1+\varepsilon)} i \sin \theta_0 / 2}{\pi \bar{K}'(k \cos \theta_0)} \int_0^\infty \frac{\tau e^{-\tau x} d\tau}{\sqrt{k + i\tau} (i\tau + k \cos \theta_0) \bar{K}'(-i\tau)} \quad (2.23)$$

и следующую асимптотику

$$D_2(x, 0) = e_{15} k \left(\frac{ib}{(\pi k x)^2} + O((k x)^{-3}) \right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

Как видно, $D_2(x, 0)$ при $x > 0$ состоит только из неволновой части.

Из (2.20) и (2.23) получим следующие асимптотические представления для составляющей вектора индукции около вершины трещины

$$D_2(x, 0) = -e_{15} (k \cos \theta_0 A_0 + \sigma_n A_n) + O(|x|^{1/2}) \quad \text{при } x \rightarrow -0 \quad (2.25)$$

$$D_2(x, 0) = -e_{15} k \frac{i e^{i\pi/4} \sqrt{2} (1 + \varepsilon) \sin \theta_0 / 2}{\bar{K}'(k \cos \theta_0) \sqrt{\pi k x}} + O(1) \quad \text{при } x \rightarrow +0$$

$$\text{Как следует из (2.13), } \Phi(x, 0) = \frac{e_{15}}{e_{11}} e^{-i k x \cos \theta_0}.$$

Из (2.11) очевидно, что $\sigma_{yz}(x, 0) = q'(x) = 0$ при $x < 0$, а при $x > 0$

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \frac{\sqrt{2k(1+\varepsilon)} c_{44} \sin \theta_0 / 2}{2\pi \bar{K}'(k \cos \theta_0)} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{\sigma^2 - k^2} (\varepsilon + 1) - \varepsilon |\sigma| \right) e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma - k} (\sigma - k \cos \theta_0 + i0) \bar{K}'(\sigma)} \quad (2.26)$$

Проводя в комплексной плоскости ($\alpha = \sigma + i\tau$) разрезы по линиям $-k - i\tau$, $k + i\tau$ и $-i\tau$ ($0 < \tau < \infty$), замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, обходя точку $\sigma = k \cos \theta_0$ сверху, получим

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \frac{\sqrt{2k(1+\varepsilon)}c_{44}\sin\theta_0/2}{\pi\bar{K}'(k\cos\theta_0)} \times \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\tau x}(1+\varepsilon)\sqrt{(k+i\tau)^2-k^2}e^{ikx}d\tau}{\sqrt{2k+i\tau(i\tau+2k\sin^2\theta_0/2)}\bar{K}'(-k-i\tau)} + \int_0^\infty \frac{\varepsilon\tau e^{-\tau x}d\tau}{\sqrt{k+i\tau(ik\cos\theta_0-\tau)}\bar{K}'(-i\tau)} \right) - i(1+\varepsilon)kc_{44}\sin\theta_0 e^{-ikx\cos\theta_0} \quad (2.27)$$

Волновое поле состоит из порций объемной сдвиговой волны и неволновой части, а также падающей волны.

Асимптотика для напряжения $\sigma_{yz}(x, 0)$ при $x \rightarrow +0$ имеет вид

$$\sigma_{yz}(x, 0) = -\frac{i\sqrt{2(1+\varepsilon)}kc_{44}e^{i\pi/4}\sin\theta_0/2}{\bar{K}'(k\cos\theta_0)\sqrt{\pi kx}} + O(1) \quad (2.28)$$

3. Пользуясь подходом, изложенным в [6, 7], найдем распределение перемещения в пьезоэлектрической среде (принимая $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$).

В случае $0 < \theta < \pi/2$, принимая

$$\lambda = \sigma \cos \theta - i \sin \theta \sqrt{\sigma^2 - k^2}, \quad \sigma(\lambda) = \lambda \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{\lambda^2 - k^2} \quad (3.1)$$

полагая, что при выборе однозначной ветви $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ разрезы в комплексной плоскости ($\alpha = \lambda + i\tau$) проведены по линиям $k + i\tau$, $-k - i\tau$ ($0 < \tau < \infty$), и контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости, обходя точки $\lambda = k \cos(\theta + \theta_0)$, $\lambda = k \cos(\theta - \theta_0)$ снизу, где $\lambda = k \cos(\theta \pm \theta_0)$ нули функции $\sigma(\lambda) - k \cos \theta_0$, с помощью леммы Жордана получим

$$w(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i(\alpha r - \frac{3}{2}\pi)}}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \times \\ \times \left(A(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + A(\sigma_2) \sqrt{\sigma_2^2 - k^2} \right) i d\tau \quad (3.2)$$

где $\alpha = -k - i\tau$, $\sigma_2(\alpha) = \alpha \cos \theta - i \sin \theta \sqrt{\alpha^2 - k^2}$.

Волновое поле состоит из падающей волны и дифрагированной объемной сдвиговой волны.

В случае $\pi/2 < \theta < \pi$ принимается

$$\lambda = -\sigma \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{\sigma^2 - k^2}, \quad \sigma(\lambda) = -\lambda \cos \theta - i \sin \theta \sqrt{\lambda^2 - k^2} \quad (3.3)$$

Теперь уже проведем разрезы в комплексной плоскости ($\alpha = \lambda + i\tau$) не только по линиям $k + i\tau$, $-k - i\tau$, но и по линии $k \sin \theta + i\tau$ для функции $|\sigma|$. Контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости. При $\pi/2 < \theta < \pi - \theta_0$ $\sigma(\lambda) - k \cos \theta_0$ не имеет нулей, но при $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$

$\lambda = -k \cos(\theta + \theta_0)$ является единственным нулем этой функции, и контур интегрирования обходит эту точку снизу. Функция $A(\sigma)$ имеет простой полюс в точке

$$\lambda = -\lambda_n = -\sigma_n \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{\sigma_n^2 - k^2}, \text{ если только } \operatorname{Re}(-\lambda_n - k \sin \theta) > 0,$$

т.е. в случае $\pi - \arctg \frac{\sigma_n}{k} < \theta < \pi$. Для амплитуды перемещения получим

$$w(r, \theta) = w_0(r, \theta) + A_n e^{-i r \lambda_n} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i(\alpha r + \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \times \\ \times \left(A(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - k^2} + A(\sigma_1) \sqrt{\sigma_1^2 - k^2} \right) d\tau - \frac{\sqrt{2k} \alpha (1 + \alpha) \sin \theta_0 / 2}{\pi K^*(k \cos \theta_0)} \cdot i e^{i k r \cos \theta} \times \quad (3.4) \\ + \int_0^\infty \frac{e^{-i r K^*(\sigma)} (\sigma + k) \sigma \sqrt{\sigma^2 - k^2} d\tau}{\sqrt{(k \sin \theta + i \tau)^2 - k^2} (\sigma - k \cos \theta_0) ((1 + 2\alpha)(\sigma^2 - k^2) - \alpha^2 k^2)}$$

где $\alpha = k + i\tau$, $\sigma_1(\alpha) = -\alpha \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{\alpha^2 - k^2}$.

$$w_0(r, \theta) = e^{-i k r \cos(\theta - \theta_0)} \text{ при } \pi/2 < \theta < \pi - \theta_0$$

$$w_0(r, \theta) = e^{-i k r \cos(\theta - \theta_0)} + A_0 e^{-i k r \cos(\theta + \theta_0)} \text{ при } \pi - \theta_0 < \theta < \pi \quad (3.5)$$

$$\text{Отметим, что } |\sigma| = \begin{cases} \sigma & \text{при } \operatorname{Re} \sigma > k \sin \theta \\ -\sigma & \text{при } \operatorname{Re} \sigma < k \sin \theta \end{cases}$$

Волновое поле состоит из падающей волны, отраженной волны (если $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$), поверхностной волны (при $\pi - \arctg \frac{\sigma_n}{k} < \theta < \pi$),

дифрагированной объемной волны, а также волны, обусловленной пьезоэффектом и распространяющейся от поверхности трещины в среду. Таким образом, обнаружена обусловленная пьезоэффектом поверхностная волна в пьезоэлектрической среде с полубесконечной трещиной при наличии падающей электроупругой волны. Однако, в случае бесконечной трещины, как следует из (1.18), поверхностная волна не возникает при данной постановке задачи.

В случае $\theta = \pi - \theta_0$ точка $\lambda = k$ является и простым полюсом подынтегральной функции, и точкой ветвления. В этом случае функцию перемещения можно представить в виде

$$w(r, \pi - \theta_0) = e^{i k r \cos 2\theta_0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{A(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \frac{i A_0}{2(\lambda - k)} \right) \times \\ \times e^{i \alpha r} d\lambda + \frac{A_0}{2} e^{i k r} \quad (3.6)$$

Как следует из решения (2.12), в случае $y < 0$, т.е. $-\pi < \theta < 0$, подынтегральную функцию следует заменить на $-A(\sigma)$, а θ на $-\theta$, и возникающая проходящая волна (при $-\pi < \theta < -\pi + \theta_0$) обусловлена пьезоэффектом.

При больших значениях r (дальние от вершины трещины зоны) получим следующие асимптотические представления амплитуды перемещения при $r k \rightarrow \infty$:

при $-\pi < \theta < -\pi/2$ ($\theta \neq \theta_0 - \pi$)

$$w(r, \theta) = w_1(r, \theta) - A_n e^{-i r \sqrt{k}} + e^{i(kr + \pi/4)} \left(B(\theta) \frac{1}{\sqrt{\pi k r}} + O((rk)^{-3/2}) \right) + \\ + e^{-i k r \sin \theta} \left(B_n(\theta) \frac{1}{\pi k r} + O((kr)^{-2}) \right) \quad (3.7)$$

где $w_1(r, \theta) = (1 - A_0) e^{-i k r \cos(\theta - \theta_0)}$ при $-\pi < \theta < \theta_0 - \pi$

$w_1(r, \theta) = e^{-i k r \cos(\theta - \theta_0)}$ при $\theta_0 - \pi < \theta < \pi/2$

$$B(\theta) = \frac{\sqrt{2} \sin \theta / 2 \sin \theta_0 / 2}{\cos \theta + \cos \theta_0} \frac{1 + \alpha}{K^-(k \cos \theta_0) K^-(k \cos \theta)}$$

$$B_n(\theta) = \frac{2\alpha(1 + \alpha) \sin \theta \sin \theta_0 / 2 \cdot K^-(k \cos \theta) \cdot i \sin \theta_0 / 2}{\cos \theta (\cos \theta + \cos \theta_0) (\alpha^2 + (1 + 2\alpha) \sin^2 \theta) K^-(k \cos \theta_0)}$$

при $\theta = \theta_0 - \pi$

$$w(r) = (1 - A_0 / 2) e^{i k r} - A_n e^{i r \sigma_0 \left(\cos \theta_0 + i \frac{k}{1 + \alpha} \sin \theta_0 \right)} + e^{i k r} O((rk)^{-1/2}) \quad (3.8)$$

при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$$w(r, \theta) = e^{-i k r \cos(\theta - \theta_0)} + e^{i(kr + \pi/4)} \left(B(\theta) \frac{1}{\sqrt{\pi k r}} + O((rk)^{-3/2}) \right) \quad (3.9)$$

при $\theta = \pi - \theta_0$

$$w(r) = e^{i k r \cos 2\theta_0} + \frac{A_0}{2} e^{i k r} + A_n e^{i r \sigma_0 \left(\cos \theta_0 + i \frac{k}{1 + \alpha} \sin \theta_0 \right)} + e^{i k r} O((rk)^{-1/2}) \quad (3.10)$$

при $\pi/2 < \theta < \pi$; ($\theta \neq \pi - \theta_0$)

$$w(r, \theta) = w_0(r, \theta) + A_n e^{-i r \sqrt{k}} + e^{i(kr + \pi/4)} \left(B(\theta) \frac{1}{\sqrt{\pi k r}} + O((rk)^{-3/2}) \right) + \\ + e^{i k r \sin \theta} \left(B_n(\theta) \frac{1}{\pi k r} + O((kr)^{-2}) \right) \quad (3.11)$$

где для $w_0(r, \theta)$ имеют место формулы (3.5).

Асимптотическое представление индукции $D_2(r, \theta)$ при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ имеет вид

$$D_2(r, \theta) = e_{15} k \left(\frac{i b \cos 2\theta}{(\pi k r)^2} + O((kr)^{-3}) \right), \quad k r \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

и в случае $\pi/2 < \theta < \pi$ или $-\pi < \theta < -\pi/2$

$$\begin{aligned}
 D_z(r, \theta) = & -e_{15} k \cos \theta_0 e^{-ikr \cos \theta_0 \cos \theta} \cdot e^{-ikr \cos \theta_0 \sin \theta} - \\
 & -e_{15} \sigma_n A_n e^{-i \sigma_n r \cos \theta} \cdot e^{-i \sigma_n r \sin \theta} - e_{15} k e^{i \left(\frac{\pi}{4} - k r \cos \theta \right)} \cdot e^{-k r \sin \theta} \times \\
 & \times \left(\frac{e^{\frac{1}{2} i \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}}{(\pi k r)^{3/2}} \cdot a + O((k r)^{-5/2}) \right) + e_{15} k \left(\frac{i b \cos 2 \theta}{(\pi k r)^2} + O((k r)^{-3}) \right), k r \rightarrow \infty
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Асимптотические представления составляющей D_θ вектора индукции и напряжения $\sigma_{\theta z}$ вблизи вершины трещины имеют вид

$$\begin{aligned}
 D_\theta = & -e_{15} g(\theta) (\pi k r)^{-1/2} + O(1), \quad \sigma_{\theta z} = -c_{44} g(\theta) (\pi k r)^{-1/2} + O(1) \quad r \rightarrow 0 \\
 g(\theta) = & \frac{i k \sqrt{2(1+\kappa)} e^{i\pi/4}}{K^4(k \cos \theta_0)} \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука. 1982. 240 с.
2. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. М.: Мир. 1962. 279 с.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. 1979. 3. С. 29-34.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. II спецкурс. М.: Наука. 1965. 327 с.
5. Справочная мат. библиотека. Функ. анализ. М.: Наука. 1972. 283с.
6. Григорян Э.Х., Саркисян А.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего упругого слоя. // Изв. НАН Арм. Механика. 1999. Т. 52. №1. С. 30-39.
7. Агаян К.А., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Арм. Механика. 2003. Т. 56. №4. С. 3-17.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
23.11.2004