ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 539.3

# О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНОК ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНОЙ

Егиазарян Т.А.

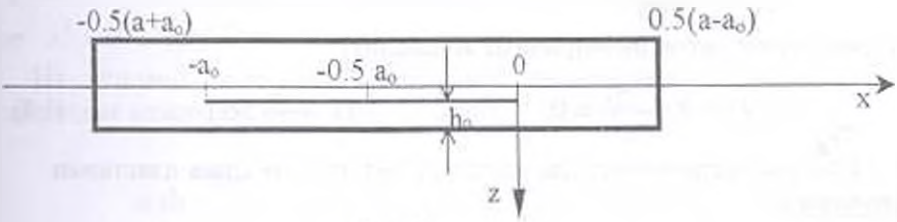
**Տ.Հ. Եղիազարյան**
**Ճաքով թուլացված սալի սեփական տատանումների մասին**

Աշխատանքում քննարկվում է ճաքի ազդեցությունը սալի սեփական տատանումների հաճախականության վրա: Դիտարկված են սալի երկու հանդիպակաց կողերը հոդակապային կամ կոշտ ամրացման դեպքերը: Կատարված է խնդրի վերլուծություն կախված սալի ներսում ճաքի երկարությունից և դիրքից:

**Yeghiazaryan T.H.**
**On own vibrations of plate impaired by crack**

В работе обсуждается вопрос о влиянии трещины на частоты собственных колебаний пластинки. Рассмотрены случаи шарнирного и жесткого закрепления двух противоположных сторон пластинки. Проведен анализ задачи в зависимости от длины и расположения трещины внутри пластинки

1. Пусть в прямоугольной пластинке размерами $a$, $b$, $h$, модулем упругости $E$, коэффициентом Пуассона $\nu$, плотностью материала $\rho$, имеется трещина размерами $a_0 \in (0;a)$, $b$, расположенная на расстоянии $h_0 \in (0;0.5h)$ от срединной плоскости (фиг.1)




Фиг. 1

В рассмотренном случае жесткость на изгиб пластинки представится в виде [1.2]

$$D(x) = \begin{cases} D_1 = D, & \text{при} \quad \dfrac{x}{a} \in [-0.5(1+\alpha), -\alpha) \\ D_2 = \delta^2 D & \text{при} \quad \dfrac{x}{a} \in (-\alpha; 0) \\ D_2 = D & \text{при} \quad \dfrac{x}{a} \in (0; 0.5(1-\alpha)] \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2),\ \delta^2 = 1-3\beta+3\beta^2,\ \beta = h_*/h \in [0,0.5],\ \alpha = a_0/a \in [0,1] \qquad (1.2)$$

Пусть на кромках пластинки $y=0$, $y=b$ заданы условия скользящего контакта

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \tilde{T}_{13} = T_{13} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x} = 0 \qquad (1.3)$$

где $w = w(x,y,t)$–прогиб пластинки, $\tilde{T}_{13}$–обобщенное поперечное усилие, $T_{13}$ – поперечное усилие, $M_{12}$ –крутящий момент.

При условиях (1.3) изгиб пластинки происходит по цилиндрической поверхности $w = w(x,t)$ и уравнение колебаний пластинки представится в виде

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}^4} + \rho h l^4 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \qquad \bar{x} = \frac{x}{a} \qquad (1.4)$$

Причем в точках $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = -\alpha$ должны быть удовлетворены условия сопряжения решений

$$w_1 = w_3,\quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial w_3}{\partial \bar{x}^3},\quad M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(3)},\ T_{13}^{(1)} = T_{13}^{(3)} \qquad (\bar{x} = -\alpha) \quad (1.5)$$

$$w_1 = w_2,\quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{x}^3},\quad M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(2)},\ T_{13}^{(1)} = T_{13}^{(2)} \qquad (\bar{x} = 0) \quad (1.6)$$

Так как трещина симметрично расположена по длине пластинки, то можно отдельно рассматривать симметричные и антисимметричные колебания, при этом в первом случае (симметричные колебания) в центре пластинки имеются условия

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = 0,\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{x}^3} = 0, \qquad (\bar{x} = -0.5\alpha) \qquad (1.7)$$

а во втором случае (антисимметричные колебания)

$$w_1(\bar{x}) = 0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{x}^2} = 0, \qquad (\bar{x} = -0.5\alpha) \qquad (1.8)$$

2. Ниже рассматриваются два варианта закрепления краев пластинки:

**шарнирное**

$$w_2(\bar{x}) = 0,\quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \bar{x}^2} = 0 \qquad \text{при} \qquad \bar{x} = 0.5(1-\alpha) \qquad (2.1)$$

$$w_3(\bar{x}) = 0,\quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial \bar{x}^2} = 0 \qquad \text{при} \qquad \bar{x} = -0.5(1+\alpha) \qquad (2.2)$$

**жесткое**

$$\frac{\partial w_2}{\partial \bar{x}} = 0,\quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad \text{при} \qquad \bar{x} = 0.5(1-\alpha) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial \bar{x}} = 0,\quad \frac{\partial^3 w_3}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad \text{при} \qquad \bar{x} = -0.5(1+\alpha) \qquad (2.4)$$

Уравнение собственных колебаний

$$D\frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}^4}+\rho h a^4\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}=0, \qquad (i=1,2,3), \qquad \bar{x}=\frac{x}{a} \tag{2.5}$$

подстановкой $w_i(\bar{x},t)=f_i(\bar{x})e^{i\omega t}$ приводится к уравнению

$$D_i f^{IV}(\bar{x})-\rho h a^4\omega^2 f(\bar{x})=0, \qquad (i=1,2,3) \tag{2.6}$$

где $\omega$ – искомая частота собственных колебаний пластинки.

Рассмотрим симметричные колебания шарнирно опертой по двум противоположным сторонам пластинки. В этом случае

$$\begin{gathered} f_1^{IV}(\bar{x})-\frac{1}{\delta^2}\omega^2 f_1(\bar{x})=0 \quad \text{при } \bar{x}\in[-0,5\alpha;0] \\ f_2^{IV}(\bar{x})-\omega^2 f_2(\bar{x})=0 \quad \text{при } \bar{x}\in[0;\,0,5(1-\alpha)] \end{gathered} \tag{2.7}$$

При условиях симметрии в точке $\bar{x}=-0.5\alpha$, сопряжения решений в точке $\bar{x}=0$ и шарнирного зскрепления в точке $\bar{x}=0.5(1-\alpha)$

$$\begin{gathered} f_1'(\bar{x})=0, f'''_1(\bar{x})=0 \qquad \text{при} \qquad \bar{x}=-0.5\alpha \\ f_1(\bar{x})=f_2(\bar{x}), \quad f_1'(\bar{x})=f_2'(\bar{x}), \delta^2 f_1''(\bar{x})=f_2''(\bar{x}) \quad \delta^2 f'''_1(\bar{x})=f_2'''(\bar{x}) \\ \text{при} \quad \bar{x}=0, \\ f_2(\bar{x})=0, f_2''(\bar{x})=0 \qquad \text{при } \bar{x}=0.5(1-\alpha) \end{gathered} \tag{2.8}$$

которые получаются из (1.6),(1.7),(2.2).

Решения (2.7) имеют вид

$$\begin{gathered} f_1(\bar{x})=a_1\operatorname{ch}\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}+a_2\operatorname{sh}\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}+a_3\cos\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}+a_4\sin\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}} \\ f_2(\bar{x})=b_1\operatorname{ch}\lambda\bar{x}+b_2\operatorname{sh}\lambda\bar{x}+b_3\cos\lambda\bar{x}+b_4\sin\lambda\bar{x} \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\lambda^4=a^4\omega^2\rho h/D$.

Из условий (2.8) для определения восьми постоянных получается следующая однородная система алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} a_1\operatorname{sh}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{ch}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_3\sin\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_4\cos\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}=0 \\ a_1\operatorname{sh}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{ch}\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}+a_3\sin\frac{\lambda\bar{x}}{2\sqrt{\delta}}+a_4\cos\frac{\lambda\bar{x}}{\sqrt{\delta}}=0 \\ a_1+a_3-b_1-b_3=0, \quad a_2+a_4-\sqrt{\delta}b_2-\sqrt{\delta}b_4=0 \\ \delta a_1-\delta a_3-b_1+b_3=0, \ \delta a_2-\delta a_4-b_2+b_4=0 \\ b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0 \\ b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

Условие существования ненулевого решения системы (2.10) приводит к определению корней трансцендентного уравнения

$$\frac{4}{\delta}\operatorname{th}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}-4\operatorname{cth}\frac{1-\alpha}{2}\lambda\operatorname{ctg}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+\sqrt{\delta}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{cth}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}-\right.$$
$$\left.-\operatorname{th}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{ctg}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}\right)+\sqrt{\delta}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\operatorname{th}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{cth}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\delta}}\operatorname{ctg}\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}\right)=0 \qquad (2.11)$$

Корни этого уравнения определяют нечетные по номеру частоты собственных колебаний

$$\omega_m=\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\frac{\lambda^2 m}{a^2}\ (m=1,3,5,\ldots)$$

В частном случае, когда $\alpha=0$ или $\delta=1$ ($\beta=0$), т.е. в случае отсутствия трещины

$$\lambda_m=m\pi,\ \omega_m=\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\frac{m^2\pi^2}{l^2}$$

В случае антисимметричных колебаний, взамен первых двух уравнений системы (2.10) из условий (1.8) получаются уравнения

$$a_1\operatorname{ch}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{sh}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}+a_3\cos\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}-a_4\sin\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}=0$$
$$a_1\operatorname{ch}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}-a_2\operatorname{sh}\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}+a_3\sin\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}+a_4\cos\frac{\lambda\alpha}{2\sqrt{\delta}}=0 \qquad (2.12)$$

В случае симметричных колебаний жестко закрепленной по краям $\bar{x}=-0.5(1+\alpha)$ и $\bar{x}=0.5(1-\alpha)$ пластинки, взамен последних двух уравнений системы (2.10), из условий (2.3), (2.4) получаются уравнения

$$b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0$$
$$b_1\operatorname{ch}\frac{1-\alpha}{2}\lambda+b_2\operatorname{sh}\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_3\cos\frac{1-\alpha}{2}\lambda-b_4\sin\frac{1-\alpha}{2}\lambda=0 \qquad (2.13)$$

В случае же антисимметричных колебаний жестко закрепленной по краям $\bar{x}=-0.5(1+\alpha)$ и $\bar{x}=0.5(1-\alpha)$ пластинки, в системе (2.10) взамен первых двух уравнений необходимо взять два уравнения (2.12), а взамен последних двух–два уравнения (2.13).

Расчеты по определению приведенных значений первых двух частот (симметричных и антисимметричных) собственных колебаний

$$\bar{\omega}_m=a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}\,\omega_m=\lambda_m^2,\ (m=1,2) \qquad (2.14)$$

для двух вариантов граничных условий приводятся в таблицах 1-4

Таблица 1

Шарнирно закрепленная пластинка (симметричные колебания)

| β \ α | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 9.53 | 9.23 | 8.99 | 8.79 | 8.65 | 8.55 | 8.48 | 8.45 | 8.43 |
| 0.2 | 9.07 | 8.47 | 8.02 | 7.68 | 7.45 | 7.29 | 7.19 | 7.14 | 7.12 |
| 0.3 | 8.53 | 7.66 | 7.06 | 6.65 | 6.38 | 6.20 | 6.08 | 6.03 | 6.01 |
| 0.4 | 8.02 | 6.98 | 6.32 | 5.89 | 5.60 | 5.41 | 5.30 | 5.25 | 5.23 |
| 0.5 | 7.81 | 6.70 | 6.03 | 5.59 | 5.31 | 5.12 | 5.01 | 4.96 | 4.94 |

Таблица 2

Шарнирно закрепленная пластинка (антисимметричные колебания)

| β \ α | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 39.43 | 39.13 | 38.43 | 37.40 | 36.25 | 35.20 | 34.42 | 33.95 | 33.76 |
| 0.2 | 39.36 | 38.61 | 36.97 | 34.77 | 32.58 | 30.78 | 29.53 | 28.80 | 28.51 |
| 0.3 | 39.26 | 37.90 | 35.14 | 31.82 | 28.87 | 26.66 | 25.20 | 24.39 | 24.06 |
| 0.4 | 39.15 | 37.15 | 33.35 | 29.24 | 25.92 | 23.52 | 22.08 | 21.26 | 20.94 |
| 0.5 | 39.10 | 36.79 | 32.55 | 28.18 | 24.76 | 22.40 | 20.91 | 20.10 | 19.79 |

Таблица 3

Жестко закрепленная пластинка (симметричные колебания)

| β \ α | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 21.82 | 21.40 | 21.15 | 21.03 | 21.01 | 21.00 | 20.89 | 20.59 | 20.01 |
| 0.2 | 21.12 | 20.33 | 19.93 | 19.78 | 19.77 | 19.71 | 19.41 | 18.71 | 17.58 |
| 0.3 | 20.32 | 19.30 | 18.85 | 18.74 | 18.73 | 18.55 | 17.95 | 16.83 | 15.31 |
| 0.4 | 19.63 | 18.55 | 18.10 | 18.03 | 17.99 | 17.65 | 16.75 | 15.32 | 13.59 |
| 0.5 | 19.35 | 18.20 | 17.82 | 17.77 | 17.71 | 17.28 | 16.26 | 14.72 | 12.94 |

Таблица 4

Жестко закрепленная пластинка (антисимметричные колебания)

| β \ α | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 61.56 | 60.90 | 59.55 | 57.92 | 56.58 | 55.89 | 55.74 | 55.64 | 54.82 |
| 0.2 | 61.40 | 59.79 | 56.74 | 53.52 | 51.30 | 50.37 | 50.27 | 49.88 | 48.04 |
| 0.3 | 61.18 | 58.30 | 53.38 | 48.98 | 46.43 | 45.62 | 45.55 | 44.64 | 41.83 |
| 0.4 | 60.93 | 56.73 | 50.31 | 45.33 | 42.86 | 42.27 | 42.13 | 40.63 | 37.17 |
| 0.5 | 60.80 | 56.00 | 49.00 | 43.89 | 41.52 | 41.04 | 40.82 | 39.06 | 35.39 |

Следует отметить, что при $\alpha=0$ или $\beta=0$, т.е. при отсутствии трещины, $\overline{\omega}_1 = \pi^2$, $\overline{\omega}_2 = 4\pi^2$ для случая шарнирно закрепления и $\overline{\omega}_1 = 2.69\pi^2$, $\overline{\omega}_2 = 6.25\pi^2$ для случая жесткого закрепления.

Из приведенных таблиц видно уменьшение частот при увеличении относительной длины трещины и расстояния трещины от лицевой плоскости пластинки. Случай $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ соответствует трещине, расположенной в срединной плоскости пластинки.

В заключение отметим, что расчеты приведенных значений частот собственных колебаний (2.14) были проведены двумя способами: определением корней соответствующих трансцендентных уравнений и определением собственных значений матриц (8x8) для соответствующих условий закрепления в случаях симметричных и антисимметричных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гнуни В.Ц. К устойчивости сжатой длинной пластинки, ослабленной трещиной. Сб. Исследование современных научных проблем в вузах. Том 2. Ер.: Изд. "Анастан", 2000г, с.130-133.
2. Гнуни В.Ц., Егиазарян Т.А. Об устойчивости пластинок ослабленных трещиной. В сб. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ер.: Изд. ЕГУ, 2002, с. 37-41.



Институт механики
НАН РА



Поступила в редакцию
24.11.2004