

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В
 ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА КРАЮ
 ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ

Григорян Э. Х., Мелкумян А. С.

Է. Խ. Գրիգորյան, Ա. Ս. Մելքումյան
 Սահբային հարթ ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրիկ ապրաժուրյունում
 կիսաանվերջ մետաղական շերտի եզրից

Գիտարկվում է սահբային հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը փոքր հաստության կիսաանվերջ մետաղական շերտ պարունակող պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում: Խնդիրը թերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության (Խնտյանի խնդրի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը): Շերտի և ապրաժուրյան կոնտակտի մասում տեղափոխությունները ներկայացված են ընկնող ալիքի, անդրադարձած ալիքի, լոկալիզացված ալիքի, սահբային ծավալային ալիքի և ոչ ալիքային մասի զամբարելիների զումարի տեսքով, իսկ կոնտակտի տեղամասից դուրս տեղափոխությունները և էլեկտրական պոտենցիալը նույնպես ներկայացված են համսման ալիքային զումարելիների տեսքով, որտեղ արդեն ոչ ալիքային մասին համապատասխանում է շերտի մակերևույթից զնայող ալիք: Ստացվել են ասիմպտոտիկ բանաձևեր տեղափոխության և էլեկտրական պոտենցիալի համար հեռավոր տիրույթում, իսկ շերտի եզրի շրջակայքում ուսումնասիրվել է էլեկտրական ինդուկցիայի վարքը: Ցույց է տրվել, որ էլեկտրական դաշտի ինդուկցիան պարունակում է նաև ծավալային ալիքի արագությամբ տարածվող լոկալիզացված ալիք:

E. Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan

Diffraction of shear plane wave in piezoelectric media on the edge of semi-infinite metallic strip

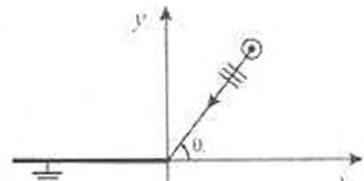
Рассматривается задача о дифракции сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве, содержащем полубесконечный металлический слой малой толщины. Задача сводится к решению функционального уравнения задачи Римана теории аналитических функций. На контактом участке слоя с пространством перемещения представлены в виде суммы частей падающей волны, отраженной волны, локализованной волны, сдвиговой объемной волны и неволновой части, а вне участка контакта перемещения и электрический потенциал так же представлены в виде сумм аналогичных волн, где уже неволновой части соответствует волна, идущая от поверхности слоя. Получены асимптотические формулы для перемещения и электрического потенциала в дальней зоне, а в окрестности ребра слоя – поведение электрической индукции. Обнаружено, что индукция электрического поля содержит также локализованную волну, распространяющуюся со скоростью объемной волны.

Пусть из бесконечности распространяются сдвиговые плоские волны $U_0 e^{-i\omega t}$, $\Phi_0 e^{-i\omega t}$, где

$$U_0 = e^{-i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0)}$$

$$\Phi_0 = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0)}$$

в пьезоэлектрическом пространстве класса $6mm$ гексагональной симметрии, причем, ось OZ совпадает с осью симметрии кристалла, содержащей металлический слой бесконечно



Փիգ. 1.

малой толщины (фиг. 1). Задача заключается в определении волнового поля на контактном участке слоя с пространством и внутри пьезоэлектрического пространства.

В амплитудах задача сводится к решению уравнений [1]

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 U \quad (2)$$

с контактными условиями $\Phi|_{y=0} = \Phi_+$, $D_y|_{y=+0} - D_y|_{y=-0} = -\epsilon_{11} \Psi_-$, $U|_{y=+0} = U|_{y=-0}$, $\sigma_{xz}|_{y=+0} = \sigma_{xz}|_{y=-0}$, где $\Phi_+(x) = 0$ при $x < 0$, а $\Psi_-(x) = 0$

при $x > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; U — амплитуда перемещений точек пространства, Φ — амплитуда электрического потенциала,

$\sigma_{xz} = c_{44} \frac{\partial U}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ — амплитуда тангенциальных напряжений,

$D_y = e_{15} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ — амплитуда компоненты вектора электрической

индукции, c_{44} — упругая постоянная, e_{15} — пьезоэлектрический модуль,

ϵ_{11} — диэлектрическая проницаемость, $k = \omega/c$ — волновое число,

$c = \sqrt{G/\rho}$ — скорость распространения упругой волны в пьезоэлектрике,

$G = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$, ω — частота колебаний.

Для решения поставленной задачи введем функции

$$w(x, y) = U(x, y) - U_0(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_0(x, y) \quad (3)$$

Очевидно, что функции $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (1)-(2), но они уже должны удовлетворять и условиям уходящей волны. Применяя к уравнениям (1)-(2) преобразование Фурье, в силу вышесказанного будем иметь

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \gamma^2 \bar{w} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 \bar{w} \quad (5)$$

где $\gamma^2(\sigma) = \sigma^2 - k^2$ а $\bar{w}(\sigma, y)$, $\bar{\varphi}(\sigma, y)$ — преобразования Фурье функций $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty.$$

Определим то решение уравнения (4), которое стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$, когда $|\sigma| > k$, а при $|\sigma| < k$ представляет уходящую волну. Такое решение имеет вид

$$\bar{w}(\sigma, y) = \bar{U}(\sigma, y) - e^{-k_1 y \sin \theta_0} 2\pi \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = A e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} \quad (6)$$

где под $\sqrt{\sigma^2 - k^2}$ понимается та ветвь этой функции, для которой имеет место условие $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$. В таком случае действительная ось будет обходить точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ - снизу [2]. Под $\delta(\sigma)$ понимается известная функция Дирака. Теперь из (5) $\bar{\varphi}$ определится в виде

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = \bar{\Phi}(\sigma, y) - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11}} e^{-k_1 y \sin \theta_0} 2\pi \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = B e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} + \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11}} \bar{w}(\sigma, y) \quad (7)$$

Из (6)-(7) с использованием контактных условий, после применения к ним преобразования Фурье, будем иметь

$$A(\sigma) = \frac{\epsilon_{11}}{2G} \frac{\bar{\Psi}(\sigma)}{\gamma(\sigma)}, \quad B(\sigma) = -\frac{\bar{\Psi}(\sigma)}{2|\sigma|} \quad (8)$$

Подставляя $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ в (6)-(7) и используя граничные условия при $y=0$, получим

$$\bar{K}(\sigma) \bar{\Psi}(\sigma) = -2\pi \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11}} \delta(\sigma - k \cos \theta_0) + \bar{\Phi}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty \quad (9)$$

где $\bar{K}(\sigma) = \frac{|\sigma| e_{15}^2 / (\epsilon_{11} G) - \gamma(\sigma)}{2\gamma(\sigma) |\sigma|}$. Так как $K(\sigma)$ имеет нули в точках $\pm \sigma_n$,

где $\sigma_n = k(1 - k_1^4)^{1/2}$, а $k_1 = e_{15} / \sqrt{\epsilon_{11} G}$ - коэффициент электромеханической связи, то в дальнейшем, чтобы удовлетворялось условие уходящей волны, будем считать, что действительная ось обходит точку $\sigma = -\sigma_n$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_n$ снизу.

Таким образом, задача свелась к решению краевой задачи Римана теории аналитических функций (9). Решение задачи строится несколько иначе, чем это обычно делается при решении краевой задачи Римана [3]. Сначала, как это делается в случае краевой задачи Римана, факторизируем функцию $\bar{K}(\sigma)$, представив ее в виде

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}_+(\sigma) \bar{K}_-(\sigma) \quad (10)$$

где $\bar{K}_+(\alpha)$ регулярна при $\text{Im} \alpha > 0$ и там не имеет нулей, а $\bar{K}_-(\alpha)$ регулярна при $\text{Im} \alpha < 0$ и там не имеет нулей ($\alpha = \sigma + i\tau$). Для этого $\bar{K}(\sigma)$ представим в виде

$$\bar{K}(\sigma) = -\bar{R}(\sigma) \frac{1 - e_{15}^2 / (\epsilon_{11} G)}{2\sigma}$$

где

$$\bar{R}(\sigma) = \frac{1}{1 - k_1^2} \frac{\gamma(\sigma) - k_1^2 |\sigma|}{\gamma(\sigma)}$$

Так как $\bar{R}(\sigma) \rightarrow 1$ и $\ln(\bar{R}(\sigma)) = O(\sigma^{-2})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то, как известно [3], ее можно представить в виде

$$\bar{R}(\sigma) = \bar{R}_+(\sigma) \bar{R}_-(\sigma),$$

где $\bar{R}_+(\alpha)$ регулярна при $\text{Im} \alpha > 0$ и там не имеет нулей, а $\bar{R}_-(\alpha)$ регулярна при $\text{Im} \alpha < 0$ и там не имеет нулей,

$$\bar{R}_+(\sigma) = \exp(\bar{F}_+(\sigma)), \quad \bar{R}_-(\sigma) = \exp(\bar{F}_-(\sigma))$$

$$\bar{F}_+(\sigma) = \int_0^{\infty} F(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \bar{F}_-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F(x) e^{i(\sigma-i0)x} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\bar{R}(\sigma)) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (11)$$

Так как $\ln(\bar{R}(\sigma))$ имеет порядок σ^{-2} при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то функция $F(x)$ при $x \rightarrow 0$ принимает конечное значение. Тогда в силу известных свойства интегралов Фурье $\bar{F}_+(\sigma) = O((\sigma+i0)^{-1})$, $\bar{F}_-(\sigma) = O((\sigma-i0)^{-1})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Следовательно, функции $\bar{R}_+(\alpha)$, $\bar{R}_-(\alpha)$ стремятся к единице при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих областях регулярности. Тогда в силу вышесказанного

$$\bar{K}_+(\sigma) = \frac{i\sqrt{1-k_c^2}}{\sqrt{2(\sigma+i0)^{1/2}}} \bar{R}_+(\sigma), \quad \bar{K}_-(\sigma) = \frac{i\sqrt{1-k_c^2}}{\sqrt{2(\sigma-i0)^{1/2}}} \bar{R}_-(\sigma)$$

Приступим к решению функционального уравнения (9). Используя формулу (10), запишем ее в виде

$$\bar{K}_-(\sigma) \bar{\Psi}_-(\sigma) = -2\pi \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{\delta(\sigma - k \cos \theta_0)}{\bar{K}_+(k \cos \theta_0)} + \frac{\bar{\Phi}_-(\sigma)}{\bar{K}_+(\sigma)}, \quad -\infty < \sigma < \infty \quad (12)$$

Далее, используя формулу [4], [5]

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}$$

будем иметь

$$\bar{L}^+(\sigma) = \bar{L}^-(\sigma) \quad (13)$$

где

$$\bar{L}^-(\sigma) = \bar{K}_-(\sigma) \bar{\Psi}_-(\sigma) + \frac{1}{i} \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{1}{\bar{K}_+(k \cos \theta_0)} \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0}$$

$$\bar{L}^+(\sigma) = \frac{\bar{\Phi}_+(\sigma)}{\bar{K}_+(\sigma)} + \frac{1}{i} \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{1}{\bar{K}_+(k \cos \theta_0)} \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}$$

Дальнейшие рассуждения проводим, как в работах [6], [7]. Применив к (13) обратное преобразование Фурье, получим

$$L^+(x) = L^-(x) \quad (14)$$

где $L^+(x) = 0$ при $x < 0$; $L^-(x) = 0$ при $x > 0$. Из (14) следует, что [4], [5]

$$L^+(x) = L^-(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \delta(x)}{dx^k} \quad (15)$$

Теперь применив к (15) преобразование Фурье, будем иметь

$$\bar{L}^+(\sigma) = \bar{L}^-(\sigma) = \sum_{k=0}^n a_k (-i)^k \sigma^k \quad (16)$$

Так как $\bar{K}_-(\sigma)$, $\bar{\Psi}_-(\sigma)$ имеют порядок $(\sigma - i0)^{-1/2}$, $\bar{K}_+(\sigma)$ имеет порядок $(\sigma + i0)^{-1/2}$, $\bar{\Phi}_+(\sigma)$ имеет порядок $o((\sigma + i0)^{-1})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то $\bar{L}^+(\sigma) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то есть $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$. В силу вышесказанного будем иметь

$$\bar{\Psi}_-(\sigma) = -\frac{1}{i} \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{K_+(k \cos \theta_0)} \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} \frac{1}{K_-(\sigma)}$$

$$\bar{\Phi}_-(\sigma) = -\frac{1}{i} \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{K_+(k \cos \theta_0)} \frac{K_+(\sigma)}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}$$

Следовательно, обозначая $\bar{M}_+(\sigma) = \bar{R}_+(k\sigma)$, $\eta(\sigma) = \gamma(k\sigma)/k = \sqrt{\sigma^2 - 1}$, получим

$$w(r, \theta) = \frac{k_e^2}{1 - k_e^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\bar{M}_+(k \cos \theta_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i0} e^{-ikr(\sigma \cos \theta - \eta(\sigma) \sin \theta)} d\sigma}{(\sigma - \cos \theta_0 - i0) \bar{M}_-(\sigma) \eta(\sigma)}$$

$$\varphi(r, \theta) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left[w(r, \theta) - \frac{1}{1 - k_e^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\bar{M}_+(k \cos \theta_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma - i0} e^{-ikr(\sigma \cos \theta - \eta(\sigma) \sin \theta)} d\sigma}{(\sigma - \cos \theta_0 - i0) \bar{M}_-(\sigma) |\sigma|} \right]$$

Следует отметить, что, как будет показано ниже, $\bar{M}_+(\sigma) = \bar{R}_+(k\sigma)$ от k не зависит.

Вычислим также контактные напряжения.

$$\sigma_{r,r} \Big|_{r=0} = -ik \sin(\theta_0) G e^{-ikx \cos \theta_0}$$

В случае бесконечного слоя функциональное уравнение (9) примет вид

$$\bar{K}(\sigma) \bar{\Psi}(\sigma) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \delta(\sigma - k \cos \theta_0)$$

откуда

$$\bar{\Psi}(\sigma) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11} \bar{K}(k \cos \theta_0)} \delta(\sigma - k \cos \theta_0)$$

следовательно,

$$w(x, y) = -\frac{ik_e^2 |\cos \theta_0|}{ik_e^2 |\cos \theta_0| - \sin \theta_0} e^{-ikx \cos \theta_0 + ik|y| \sin \theta_0}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(x, y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sin \theta_0}{ik_e^2 |\cos \theta_0| - \sin \theta_0} e^{-ikx \cos \theta_0 - ik|y| \cos \theta_0}$$

следовательно, в случае бесконечного слоя сдвиговая плоская волна не возмущает локализованную волну.

Приступим теперь к вычислению асимптотических формул для функции $U(r, \theta) = U_0(r, \theta) + u(r, \theta)$ при $kr \rightarrow \infty$. Для этого сделаем замену переменной $\lambda = \sigma \cos \theta - i\eta(\sigma) \sin |\theta|$ в интеграле и в комплексной плоскости (λ), замыкая путь интегрирования полуокружностью в нижней полуплоскости и используя лемму Жордана, получим следующие выражения:

при $\theta \in [0, \pi)$:

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta) = & U_0(r, \theta) + ik_c^2 \frac{|\cos \theta_0| e^{-ikr \cos(\theta_0 + |\theta|)}}{\sin \theta_0 - ik_c^2 |\cos \theta_0|} H(|\theta| + \theta_0 - \pi) + \\
 & + k_c^4 \sigma_0^{3/2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0} M_+(\sigma_0) e^{-i\sigma_0 r (\cos \theta - \sigma_0^2 \sin \theta)}}{M_+(\cos \theta_0) \sigma_0 - \cos \theta_0} H(|\theta| + \arcsin(k_c^2) - \pi) + \\
 & + \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(-(1+i\tau^2)\cos \theta - e^{-\pi\tau^2} \tau \sqrt{2+i\tau^2} \sin \theta) + f(-(1-i\tau^2)\cos \theta + e^{-\pi\tau^2} \tau \sqrt{2+i\tau^2} \sin \theta)}{\sqrt{2+i\tau^2}} e^{-k\tau^2} d\tau - \\
 & - \frac{e^{ikr \sin \theta}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(-\sin \theta \cos \theta - i\tau \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 2i\tau \sin |\theta| + \tau^2} \sin |\theta|)}{\sqrt{\cos^2 \theta - 2i\tau \sin |\theta| + \tau^2}} e^{-k\tau^2} d\tau, \quad |\theta| > \pi/2 \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta)_{\theta=\pi} = & U_0(r, \theta)_{\theta=\pi} + ik_c^2 \frac{|\cos \theta_0| e^{ikr \cos \theta_0}}{\sin \theta_0 - ik_c^2 |\cos \theta_0|} + k_c^4 \sigma_0^{3/2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0} M_+(\sigma_0) e^{ikr \sigma_0}}{M_+(\cos \theta_0) \sigma_0 - \cos \theta_0} + \\
 & + 2k_c^2 \sigma_0^2 \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{\pi} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{M_+(\cos \theta_0)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s(s^2 - 1)} M_+(s)}{(s - \cos \theta_0)(s^2 - \sigma_0^2) \sqrt{s+1}} \Big|_{s=1+i\tau} e^{-k\tau^2} d\tau - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(-\sin \theta \cos \theta - i\tau \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 2i\tau \sin |\theta| + \tau^2} \sin |\theta|)}{\sqrt{\cos^2 \theta - 2i\tau \sin |\theta| + \tau^2}} e^{-k\tau^2} d\tau, \quad \theta_0 \neq 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta)_{\theta=0} = & U_0(r, \theta)_{\theta=0} - e^{ikr} + k_c^4 \sigma_0^{3/2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0} M_+(\sigma_0) e^{ikr \sigma_0}}{M_+(\cos \theta_0) \sigma_0 - \cos \theta_0} + \\
 & + \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(1+i\tau^2 + 0) + f(1+i\tau^2 - 0)}{\sqrt{2+i\tau^2}} e^{-k\tau^2} d\tau - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(-\sin \theta \cos \theta - i\tau \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 2i\tau \sin |\theta| + \tau^2} \sin |\theta|)}{\sqrt{\cos^2 \theta - 2i\tau \sin |\theta| + \tau^2}} e^{-k\tau^2} d\tau, \quad \theta_0 = 0 \quad (19)
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \sigma_n / k = (1 - k_c^2)^{-1/2} \\
 f(s) &= \frac{k_c^2}{1 - k_c^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{M_+(\cos \theta_0)} \frac{\sqrt{s - i0}}{(s - \cos \theta_0) M_+(s)} \\
 g(s) &= -2k_c^2 \sigma_0^2 \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{M_+(\cos \theta_0)} \frac{s^2 - 1}{s^2 - \sigma_0^2} \frac{s^{1/2} M_+(s)}{s - \cos \theta_0}
 \end{aligned}$$

а $H(x)$ — известная функция Хевисайда.

Перемещения на контактном участке слоя с пространством ($|\theta| = \pi$) в формулах (18)-(19) представлены в виде суммы частей падающей волны, отраженной волны, локализованной волны, сдвиговой объемной волны и неволновой части. Те же волновые слагаемые получены внутри пьезоэлектрического пространства (17), но здесь неволновой части соответствует волна, идущая от поверхности слоя.

Используя известные теоремы об асимптотических поведениях интегралов типа Лапласа, получим следующие асимптотические формулы для $U(r, \theta)$ при $kr \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta) = & U_0(r, \theta) + ik_s^2 \frac{|\cos \theta_0| e^{-ikr \cos(\theta_0 + |\theta|)}}{\sin \theta_0 - ik_s^2 |\cos \theta_0|} \left\{ \begin{array}{l} H(|\theta| + \theta_0 - \pi), \quad |\theta| \neq \pi \\ 1, \quad |\theta| = \pi \end{array} \right\} + \\
 & + k_s^4 \sigma_0^{5/2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0} \overline{M}_-(\sigma_0) e^{-ikr \sigma_0 (\cos \theta_0 - ik_s^2 \sin \theta_0)}}{\overline{M}_-(\cos \theta_0) \sigma_0 - \cos \theta_0} H(|\theta| + \arcsin(k_s^2) - \pi) + \\
 & \left. \begin{array}{l} \frac{-k_s^2 e^{i(kr - \pi/4)} \sqrt{\cos \theta_0 + i0} \sqrt{-\cos \theta - i0}}{1 - k_s^2 \sqrt{2\pi kr} \overline{M}_-(\cos \theta_0) \overline{M}_-(\cos \theta)} \frac{1}{\cos \theta + \cos \theta_0} + O((kr)^{-3/2}), \quad |\theta| \neq \pi - \theta_0, \pi, \pi/2 \\ \frac{e^{i(kr - \pi/4)} k_s^2 |\cos \theta_0|}{\sqrt{2\pi kr} \sin \theta_0 - ik_s^2 |\cos \theta_0|} \left[\frac{1}{\sin 2\theta_0} - \sin \theta_0 \frac{\overline{M}_-(\cos \theta_0)}{\overline{M}_-(\cos \theta_0)} \right] + O((kr)^{-3/2}), \quad |\theta| = \pi - \theta_0, \theta_0 \neq 0 \\ \frac{-i e^{i(kr - \pi/4)} \sqrt{\cos \theta_0 + i0} \overline{M}_-(1)}{k_s^2 \sqrt{2\pi} \overline{M}_-(\cos \theta_0)} \frac{1}{1 - \cos \theta_0} (kr)^{-3/2} + O((kr)^{-3/2}), \quad |\theta| = \pi, \theta_0 \neq 0 \\ \frac{e^{i(kr - \pi/4)} 2}{\sqrt{2\pi kr} k_s^2} + O((kr)^{-3/2}), \quad |\theta| = \pi, \theta_0 = 0 \\ \frac{2^{3/4} k_s^2 \sqrt{\cos \theta_0 + i0} e^{i(kr - \pi/4)}}{\sqrt{1 - k_s^2} \overline{M}_-(\cos \theta_0) 4\pi \cos \theta_0} \left[\frac{\Gamma(3/4)}{(kr)^{3/4}} - \frac{k_s^2 e^{i\pi/4} \Gamma(1/4)}{4\pi \sqrt{2} (kr)^{3/4}} \ln(kr) \right] + O((kr)^{-3/4}), \quad |\theta| = \pi/2 \\ + \left[\frac{k_s^2 e^{i(kr \cos |\theta| - \pi/4)}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{1 - k_s^2} \sqrt{\cos \theta_0 + i0} \overline{M}_-(\cos \theta_0)} \left[kr \cos \theta_0 \right]^{-3/2} \left[1 - i \frac{3k_s^2}{2\pi} kr \cos \theta_0 \ln(kr) \right] - O((kr)^{-3/2}) \right], \quad |\theta| \in (\pi/2, \pi] \end{array} \right\} +
 \end{aligned}$$

Обозначая $\lambda = \sigma \cos \theta - i|\sigma| \sin |\theta|$ и используя аналитические свойства подынтегрального выражения и аналогичными рассуждениями, получим

при $|\theta| \in [0, \pi/2)$

$$\begin{aligned}
 \Phi(r, \theta) = & \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} U(r, \theta) - \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{1 - k_s^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0} e^{i\pi/4}}{\overline{M}_-(\cos \theta_0) 2\pi i} \times \\
 & \times \left[e^{-i\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{-1/2} e^{-k\tau}}{(\tau - e^{i(\pi/2 - |\theta|)}) \cos \theta_0} \overline{M}_-(e^{-i\pi/2 - |\theta|} \tau) + e^{i\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{-1/2} e^{-k\tau}}{(\tau - e^{i(\pi/2 - \theta)}) \cos \theta_0} \overline{M}_-(e^{-i(\pi/2 - \theta)} \tau) \right]
 \end{aligned}$$

при $|\theta| = \pi/2$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} U(r, \theta) - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0 - ik_c^2 \cos \theta_0} e^{-ik_r(\cos \theta - i \operatorname{sgn}(\cos \theta_0) \sin \theta) \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \right\} -$$

$$\frac{\varepsilon_{15} k_c^2 \sigma_0^3 \overline{M}_+(\sigma_0) \sqrt{\cos \theta_0 + i0} e^{-ik_r \sigma_0 (\cos \theta - i \sin \theta)}}{\varepsilon_{11} 2 \overline{M}_+(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0} \sigma_0 - \cos \theta_0}$$

$$- \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{1 - k_c^2} \frac{1}{\overline{M}_+(\cos \theta_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ik_r(\cos \theta - i \sin \theta) \tau}}{(\tau - \cos \theta_0) \overline{M}_-(\tau)} + \frac{ie^{ik_r(\cos \theta - i \sin \theta) \tau}}{(\tau + \cos \theta_0) \overline{M}_-(\tau)} \right) \sqrt{\tau}$$

при $|\theta| \in (\pi/2, \pi]$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} U(r, \theta) - \left\{ \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0 - ik_c^2 \cos \theta_0} e^{-ik_r(\cos \theta - i \operatorname{sgn}(\cos \theta_0) \sin \theta) \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \right\} -$$

$$- \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{k_c^2 \sigma_0^3 \overline{M}_-(\sigma_0) \sqrt{\cos \theta_0 + i0} e^{-ik_r \sigma_0 (\cos \theta - i \sin \theta)}}{\overline{M}_-(\cos \theta_0) \sqrt{\sigma_0} \sigma_0 - \cos \theta_0} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0} e^{-ik_r \tau}}{\overline{M}_-(\cos \theta_0)} \frac{1}{2\pi} \left[e^{-i|\theta|/2} \int_0^\infty \frac{i \sqrt{e^{i2|\theta|} \tau^2 + 1 - i0} \overline{M}_-(e^{-i(k/2 - \theta) \tau}) e^{-k_r \tau^{-1/2}} d\tau}{i \sqrt{e^{i2|\theta|} \tau^2 + 1 - i0} + k_c^2 e^{-i(k/2 - \theta) \tau} \tau - e^{i(k/2 - \theta) \tau} \cos \theta_0} \right] +$$

$$+ e^{i\theta/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{e^{-i2|\theta|} \tau^2 + 1 + i0} \overline{M}_-(e^{-i(\pi/2 - \theta) \tau}) e^{-k_r \tau^{-1/2}} d\tau}{\sqrt{e^{-i2|\theta|} \tau^2 + 1 + i0} + k_c^2 e^{-i(\pi/2 - \theta) \tau} \tau - e^{i(\pi/2 - \theta) \tau} \cos \theta_0} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{k_c^2 \sigma_0^3 \sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\pi \overline{M}_-(\cos \theta_0)} e^{i\theta/2} e^{-ik_r(\cos \theta - i \sin \theta) \tau} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau} \sqrt{2 - ie^{i\theta} \tau} \sqrt{1 - ie^{i\theta} \tau} \overline{M}_-(1 - ie^{i\theta} \tau) k^{-1/2} d\tau}{\left((1 - ie^{i\theta} \tau)^2 - \sigma_0^2 \right) (\tau + i(1 - \cos \theta_0) e^{-i\theta})}$$

Из полученных выражений видно, что в пьезоэлектрической среде $\Phi(r, \theta)$, кроме волновых частей содержит, в отличие от перемещений, и неволновую часть. Из тех же выражений можно заключить, что индукция электрического поля содержит также локализованную волну, распространяющуюся со скоростью объемной волны.

Используя известные теоремы об асимптотических поведениях интегралов типа Лапласа, получим следующую асимптотическую формулу для $\Phi(r, \theta)$, когда $kr \rightarrow \infty$:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} U(r, \theta) - \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi \cos \theta_0 + i0}} \frac{(1 - k_c^2)^{-1/2}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0)} \times$$

$$\times \left((kr)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{ik_c^2}{2\pi} \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) (kr)^{-3/2} \ln(kr) \right) + O((kr)^{-3/2})$$

Аналогичными рассуждениями получим следующую асимптотическую формулу для D_n в окрестности ребра:

$$D_0 = \frac{\varepsilon_{15}}{1 - k_c^2} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{\overline{M}_+(\cos \theta_0)} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi r}} e^{-i\pi/4} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \text{ при } r \rightarrow +0.$$

а также асимптотику $D_3 \Big|_{\substack{r \rightarrow \infty \\ z = -r < 0}}$, когда $kr \rightarrow \infty$:

$$D_3 \Big|_{\substack{r \rightarrow \infty \\ z = -r < 0}} = \mp \frac{ie_{13}}{r} \frac{\sqrt{\cos \theta_0 + i0}}{M_-(\cos \theta_0)} \left[\frac{M_-(\cos \theta_0) \sqrt{\cos \theta_0 - i0 \sin \theta_0}}{\sin \theta_0 - ik_r^2 \cos \theta_0} e^{i\sigma_0 \cos \theta_0}, \theta_0 \neq 0 \right] +$$

$$+ \frac{k_r^2 \sigma_0^{\pm 1} \bar{M}_-(\sigma_0) e^{i\sigma_0}}{\sigma_0 - \cos \theta_0} +$$

$$+ \left[\frac{e^{-i\sigma_0}}{2i\sqrt{\pi} \cos \theta_0} \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{1-k_r^2}} \left((kr)^{-3/2} - i \frac{3k_r^2}{2\pi} (kr)^{-5/2} \ln(kr) \right) + O((kr)^{-5/2}) \right] +$$

$$+ \frac{M_-(1)}{k_r^2 \sqrt{2\pi}} e^{i(\sigma_0 - \frac{\pi}{2})} \left[\frac{i}{(1-\cos \theta_0)} (kr)^{-3/2} + O((kr)^{-5/2}), \theta_0 \neq 0 \right] \Bigg|_{\text{при } kr \rightarrow \infty}$$

$$\left[\frac{i}{2(kr)^{3/2} + O((kr)^{5/2})}, \theta_0 = 0 \right]$$

Теперь приступим к вычислению $\bar{R}_+(\alpha)$, $\bar{R}_-(\alpha)$. Для этого рассмотрим комплексную плоскость $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, показанными на фиг. 2. Замыкая путь интегрирования (11) полуокружностью в верхней полуплоскости α с указанными разрезами и используя лемму Жордана получим



Фиг. 2.

$$\bar{R}_+(\sigma) = \frac{\sigma + \sigma_0}{\sigma + k} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^k \arctan \left[\frac{k_r^2 x}{\sqrt{k^2 - x^2}} \right] \frac{dx}{x + \sigma + i0} \right)$$

$$\bar{R}_-(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma - k} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^k \arctan \left[\frac{k_r^2 x}{\sqrt{k^2 - x^2}} \right] \frac{dx}{x - \sigma + i0} \right)$$

откуда, в частности, следует, что

$$\bar{M}_\pm(\sigma) = R_\pm(k\sigma) = \frac{\sigma \pm \sigma_0}{\sigma \pm 1} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \arctan \left[\frac{k_r^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \right] \frac{dx}{x \pm \sigma + i0} \right)$$

от k не зависит.

Здесь было использовано аналитическое продолжение функции $|\sigma|$, которым является $\alpha \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \alpha)$.

Согласно формулам Сохоцкого [4], [5] $\frac{1}{x \pm i0} = \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x)$.

Приведем также числовые значения интегралов

$$I_\pm(\sigma) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \arctan \left[\frac{k_r^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \right] \frac{dx}{x \pm \sigma + i0} \right),$$

входящих в коэффициенты полученных асимптотических формул. Для расчетов возьмем

$k_c^2 = \frac{e_{11}^2}{e_{15}^2 + c_{44}e_{11}} = 0.494$, который соответствует материалу PZT-4. Так как

согласно вышесказанному имеют место формулы $I_-(\sigma) \equiv I_+(-\sigma)$.

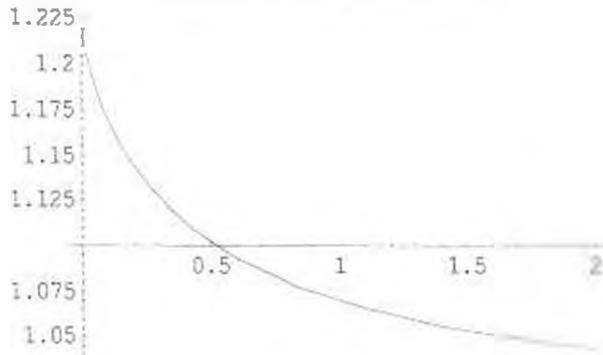
$I_+(\sigma)I_-(\sigma) = \frac{(1+k_c^2)\eta(\sigma)}{\eta(\sigma)+k_c^2|\sigma|}$ и, кроме того, $I_+(0) = I_-(0) = \sqrt{1+k_c^2}$, то можем

ограничиться значениями $I_+(\sigma)$ при положительных значениях σ :

Таблица 1

	$\cos(0^\circ)$	$\cos(15^\circ)$	$\cos(30^\circ)$	$\cos(45^\circ)$	$\cos(60^\circ)$	$\cos(75^\circ)$	σ_0
$I_+(\sigma)$	1.069	1.071	1.076	1.085	1.102	1.133	1.063
$I_+'(\sigma)$	-0.043	-0.045	-0.052	-0.066	-0.097	-0.175	

Приведем также график функции $I_+(\sigma)$ (фиг. 3).



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М. К., Гишинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, 1982. 239 с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ, второй специальный курс М.: Наука, 1965. 328 с.
5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 283 с.
6. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладке к упругой полуплоскости. //Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979. №3. С. 29-34.
7. Григорян Э. Х., Саркисян Л. В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на краю электропроводящего упругого слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 30-39.