

УДК 539.3.01

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМОПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Бежанян В.А.

Վ.Ա. Բեժանյան

Զերմապիեզոէլեկտրականության տեսության խնդիրների լուծման մասին

Շարադրված են զերմապիեզոէլեկտրականության տեսության խնդիրների լուծման մաթեմատիկական հիմունքները մեխանիկական, էլեկտրական և զերմային բեռնավորում ունեցող պիեզոէլեկտրամիական մարմինների համար:

Տրված է փոխկապակցված եզրային խնդիրների ձևակերպումը, որը նկարագրում է զերմաէլեկտրատառձգական պրոցեսները տիպային ցախնական թեկնաացում ունեցող պիեզոէլեկտրամիական մարմիններում:

V.A. Bezhanyan

To the solution of problems of thermopiezoelectricity theory

Изложены математические основы решения задач теории термопьезоэлектричества для пьезокерамических тел при механическом, электрическом и тепловом нагружении.

Дана формулировка сопряженных краевых задач, описывающих термоэлектроупругие процессы в пьезокерамической среде для типичных случаев поляризации керамики.

В связи с широким использованием пьезокерамических материалов возникает необходимость в продолжении углубленного исследования взаимодействия полей деформаций с электрическими и температурными полями.

В ряде работ исследованы взаимодействия в пьезокерамических телах механических и электрических полей [1-3]. Но почти отсутствуют исследования влияния температурных полей на поведение пьезокерамических тел.

В общем виде полная система уравнений статики теории термопьезоэлектричества для трансверсально-изотропных пьезокерамических тел включает:

а) декартовы координаты (поляризация вдоль оси Oz):

1. Уравнения равновесия (без учета объемных сил)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

(1)

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ — компоненты тензора механических напряжений.

II. В работах [4,5,6] утверждается, что в механике пьезокерамических сред магнитными эффектами вообще можно пренебречь, а для изучения электрического поля использовать уравнения электростатики [7]:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Psi \quad (2)$$

где $\vec{D}$ — вектор электрической индукции, $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля, Ψ — электростатический потенциал.

III. Уравнения теплопроводности [8,9]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

где $T = \bar{T} - T_0$ — соответственно относительная, абсолютная и начальная температура, $\lambda^2 = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{22}}$ — отношение коэффициентов теплопроводности тела в направлении оси Oz и перпендикулярном к ней ($\lambda_{11} = \lambda_{22}$).

IV. Когда в качестве термодинамического потенциала выбираем электрическую функцию Гиббса, уравнение состояния будет [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}^{E,T} \varepsilon_x + c_{12}^{E,T} \varepsilon_y + c_{13}^{E,T} \varepsilon_z - e_{31}^T E_z - \gamma_{11}^E T \\ \sigma_y &= c_{12}^{E,T} \varepsilon_x + c_{11}^{E,T} \varepsilon_y + c_{13}^{E,T} \varepsilon_z - e_{31}^T E_z - \gamma_{11}^E T \\ \sigma_z &= c_{13}^{E,T} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + c_{33}^{E,T} \varepsilon_z - e_{33}^T E_z - \gamma_{33}^E T \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= c_{44}^{E,T} \varepsilon_{xy} - e_{15}^T E_y, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = c_{44}^{E,T} \varepsilon_{xz} - e_{15}^T E_x \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \varepsilon_{xy} \\ D_x &= \varepsilon_{11}^{E,T} E_x + e_{15}^T \varepsilon_{xz}, \quad D_y = \varepsilon_{11}^{E,T} E_y + e_{15}^T \varepsilon_{xy} \\ D_z &= \varepsilon_{33}^{E,T} E_z + e_{33}^T (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + e_{33}^T \varepsilon_z + g_3^T T \end{aligned} \quad (4)$$

где $c_{11}^{E,T}$, $c_{12}^{E,T}$, $c_{13}^{E,T}$, $c_{33}^{E,T}$, $c_{44}^{E,T}$ — компоненты тензора модулей упругости, e_{31}^T , e_{33}^T , e_{15}^T — пьезоэлектрические постоянные, ε_{11}^T , ε_{33}^T — диэлектрические проницаемости, γ_{11}^E , γ_{33}^E — температурные коэффициенты механических напряжений, g_3^T — пьезоэлектрические коэффициенты, ε_x , ε_y , ε_z , ε_{11} , ε_{xy} , ε_{xz} — компоненты тензора деформации.

Верхние индексы E , T , s указывают, что соответствующие постоянные должны быть экспериментально определены соответственно при постоянном электрическом (E) и температурном (T) полях, а также при постоянном уровне деформации (s).

V. Соотношения Коши [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты вектора упругих перемещений.

Из (1)-(5) имеем 23 соотношения смешанного дифференциально-алгебраического типа, которые можно преобразовать в систему из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка:

$$c_{11}^{E,T} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44}^{E,T} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} + c_{12}^{E,T}) \right] \frac{\partial u_y}{\partial y} +$$

$$+ (c_{13}^{E,T} + c_{44}^{E,T}) \frac{\partial u_z}{\partial z} + (e_{31}^T + e_{15}^T) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \gamma_{11}^E \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11}^{E,T} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44}^{E,T} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} + c_{12}^{E,T}) \right] \frac{\partial u_x}{\partial x} +$$

$$+ (c_{13}^{E,T} + c_{44}^{E,T}) \frac{\partial u_z}{\partial z} + (e_{31}^T + e_{15}^T) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = \gamma_{11}^E \frac{\partial T}{\partial y} \quad (7)$$

$$c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + c_{33}^{E,T} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13}^{E,T} + c_{44}^{E,T}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) +$$

$$+ e_{15}^T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + e_{33}^T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \gamma_{33}^E \frac{\partial T}{\partial z} \quad (8)$$

$$(e_{31}^T + e_{15}^T) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + (e_{31}^T + e_{15}^T) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + e_{15}^T \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + e_{33}^T \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} -$$

$$- \left[\varepsilon_{11}^{E,T} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_{33}^{E,T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = -g_3' \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

и уравнения теплопроводности (3).

Отметим, что алгебраическим путем исключить электрический потенциал ψ из (6)-(8) и перемещения u_x, u_y, u_z из уравнения (9), невозможно. Это означает, что задача электроупругости является взаимно связанной. Таким образом, используя в качестве основных неизвестных u_x, u_y, u_z, ψ, T , имеем полную систему уравнений статической теории термопьезоэлектричества (3), (6)-(9). Эта система является невязанной относительно температуры.

Для ее однозначной разрешимости в некоторой пространственной области V , в каждой точке поверхности S этой области необходимо знать искомые функции или определенные комбинации их первых производных.

Граничные условия для механических переменных формулируются аналогично условиям в задачах теории упругости. Так, если на поверхности S (или на ее части) задан вектор перемещения, то искомые решения для перемещений из системы (3), (6)-(9) должны подчиняться условиям

$$u_x|_S = u_0, \quad u_y|_S = v_0, \quad u_z|_S = w_0 \quad (10)$$

Если же на поверхности тела S задан вектор внешних сил $\vec{F}_n$, то граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{nx} &= e_{11}^T n_x \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{15}^T n_z \frac{\partial \psi}{\partial x} + n_x \left(c_{11}^{E,T} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12}^{E,T} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{13}^{E,T} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} n_x (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + n_x c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \gamma_{11}^E n_x T \\ \vec{F}_{ny} &= e_{31}^T n_y \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{15}^T n_z \frac{\partial \psi}{\partial y} + n_y \left(c_{11}^{E,T} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{11}^{E,T} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{13}^{E,T} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} n_y (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + n_y c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) - \gamma_{11}^E n_y T \\ \vec{F}_{nz} &= e_{15}^T \left(n_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + e_{33}^T n_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + n_x c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \\ &+ n_y c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + n_z \left[c_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - c_{33}^{E,T} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - \gamma_{11}^E n_z T\end{aligned}\quad (11)$$

где F_{nx} , F_{ny} , F_{nz} — проекция вектора $\vec{F}_n$ на декартовы координаты n_x , n_y , n_z — проекции орта нормали к поверхности S .

Остается записать краевые условия, отображающие конкретные условия электрического и температурного нагружения тела.

В случае нагружения тела, заданной разностью электрического потенциала на электродах, частично покрывающих тело S_1 , задается значение искомого потенциала ψ . В этом случае [3]:

$$\psi|_{S_1} = \pm V_0 \quad (12)$$

Если внешней средой пьезокерамических элементов является воздух и диэлектрики, то приближенно принимается [3]:

$$\vec{n} \cdot \vec{D}|_{S-S_1-S_2} = 0 \quad (13)$$

Поэтому в дальнейшем понадобятся выражения для нормальной составляющей вектора электрической индукции. Она определяется по формуле:

$$\begin{aligned}D_n &= \vec{n} \cdot \vec{D} = n_x D_x + n_y D_y + n_z D_z = \\ &= n_x \left[e_{11}^T \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - e_{11}^{E,T} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + n_y \left[e_{15}^T \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - e_{11}^{E,T} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \\ &+ n_z \left[e_{11}^T \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + e_{33}^T \frac{\partial u_z}{\partial z} + g_{31}^T T - e_{33}^{E,T} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]\end{aligned}\quad (14)$$

Для температурного поля рассмотрим случаи, когда на поверхности пьезокерамического тела задано распределение температуры [5]

$$T|_s = P(x, y, z) \quad (15)$$

или известен тепловой поток

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_s = q(x, y, z) \quad (16)$$

Кроме условий (10)-(16) возможны и другие виды граничных условий.

Уравнения (3), (6)-(9) являются сложной системой взаимосвязанных относительно функций u_x, u_y, u_z, ψ и независимых относительно температурных уравнений.

При $T \equiv 0$ система линейных уравнений (6)-(9) совпадает с системой уравнений статической электроупругости. Поэтому общее решение системы (3), (6)-(9) представим в виде суммы частного решения уравнения термопьезоэлектричества и общего решения уравнений электроупругости. Частное решение системы (3), (6)-(9) ищем в виде [11]:

$$\begin{aligned} u_x^{(v)} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_y^{(v)} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad u_z^{(v)} = k \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \psi^{(v)} &= l \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad T = d \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (17)$$

где k, l и d постоянные определяются по формулам:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad l = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad d = \frac{\Delta_3}{\Delta} \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \\ a_{11} &= c_{13}^{E,T} + c_{44}^{E,T}, \quad a_{12} = e_{31}^T + e_{15}^T, \quad a_{13} = -\gamma_{11}^E, \\ a_{21} &= c_{33}^{E,T} - \lambda^2 c_{44}^{E,T}, \quad a_{22} = e_{33}^T - \lambda^2 e_{15}^T, \quad a_{23} = -\gamma_{33}^E, \\ a_{31} &= e_{33}^T - \lambda^2 e_{15}^T, \quad a_{32} = \lambda^2 e_{11}^{E,T} - e_{33}^{E,T}, \quad a_{33} = g_3^T, \\ b_1 &= \lambda^2 c_{11}^{E,T} - c_{44}^{E,T}, \quad b_2 = \lambda^2 (c_{44}^{E,T} + c_{13}^{E,T}), \quad b_3 = \lambda^2 (e_{15}^T + e_{31}^T) \end{aligned} \quad (18)$$

При этом потенциальная функция ϕ удовлетворяет уравнению (3).

Относительно уравнений состояния (4) сделаем следующие замечания. Для этих уравнений не учтены незначительные магнитные эффекты, сопровождающие процесс деформирования. В приведенной выше форме записи уравнений пьезоэффекта предполагается, что направление вектора предварительной поляризации в каждой точке тела совпадает с направлением Oz декартовой системы координат. Если же направление поляризации меняется от точки к точке внутри тела, то приведенные уравнения следует рассматривать как локальные уравнения состояния с совмещенными направлениями поляризации оси Oz. В этом

случае коэффициенты в уравнениях (4) будут переменными функциями координат.

Однако, если внешнее электростатическое поле предварительной поляризации обладает определенным характером симметрии, то удастся записать уравнения состояния с постоянными коэффициентами по всему объему тела в криволинейных координатах, подобранных соответствующим образом.

Приведем уравнения состояния (4) в цилиндрических и сферических координатах с постоянными коэффициентами для типичных случаев поляризации керамики [10]:

б) цилиндрические координаты r, z, φ ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$)

1) поляризация вдоль оси Oz (осевая поляризация)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11}^{E,T} \varepsilon_r + c_{12}^{E,T} \varepsilon_\varphi + c_{13}^{E,T} \varepsilon_z - e_{11}^T E_r - \gamma_{11}^E T \\ \sigma_\varphi &= c_{11}^{E,T} \varepsilon_r + c_{11}^{E,T} \varepsilon_\varphi + c_{13}^{E,T} \varepsilon_z - e_{11}^T E_r - \gamma_{11}^E T \\ \sigma_z &= c_{11}^{E,T} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) + c_{33}^{E,T} \varepsilon_z - e_{33}^T E_z - \gamma_{33}^E T \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \gamma_{r\varphi} \\ \tau_{rz} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{rz} - e_{15}^T E_\varphi \\ \tau_{\varphi z} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{\varphi z} - e_{15}^T E_r \\ D_r &= \varepsilon_{11}^{',T} E_r + e_{15}^T \gamma_{r\varphi} \\ D_\varphi &= \varepsilon_{11}^{',T} E_\varphi + e_{15}^T \gamma_{\varphi z} \\ D_z &= \varepsilon_{33}^{',T} E_z + e_{33}^T (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) + e_{33}^T \varepsilon_z + g_3^T T\end{aligned}\quad (19)$$

2) поляризация вдоль оси Or (радиальная поляризация)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{33}^{E,T} \varepsilon_r + c_{13}^{E,T} (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) - e_{33}^T E_r - \gamma_{33}^E T \\ \sigma_\varphi &= c_{13}^{E,T} \varepsilon_r + c_{11}^{E,T} \varepsilon_\varphi + c_{12}^{E,T} \varepsilon_z - e_{13}^T E_r - \gamma_{11}^E T \\ \sigma_z &= c_{13}^{E,T} \varepsilon_r + c_{12}^{E,T} \varepsilon_\varphi + c_{11}^{E,T} \varepsilon_z - e_{13}^T E_r - \gamma_{11}^E T \\ \tau_{r\varphi} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{r\varphi} - e_{15}^T E_z \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \gamma_{rz} \\ \tau_{\varphi z} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{\varphi z} - e_{15}^T E_r \\ D_r &= \varepsilon_{33}^{',T} E_r + e_{33}^T (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + e_{33}^T \varepsilon_r + g_1^T T \\ D_\varphi &= \varepsilon_{11}^{',T} E_\varphi + e_{15}^T \gamma_{r\varphi} \\ D_z &= \varepsilon_{11}^{',T} E_z + e_{15}^T \gamma_{\varphi z}\end{aligned}\quad (20)$$

3) поляризация вдоль оси ϕ (окружная поляризация)

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= c_{11}^{E,T} \varepsilon_r + c_{13}^{E,T} \varepsilon_\phi + c_{33}^{E,T} \varepsilon_z - e_{13}^T E_\phi - \gamma_{11}^E T \\
 \sigma_\phi &= c_{13}^{E,T} (\varepsilon_r + \varepsilon_z) + c_{33}^{E,T} \varepsilon_\phi - e_{33}^T E_\phi - \gamma_{33}^E T \\
 \sigma_z &= c_{12}^{E,T} \varepsilon_r + c_{13}^{E,T} \varepsilon_\phi + c_{11}^{E,T} \varepsilon_z - e_{13}^T E_\phi - \gamma_{11}^E T \\
 \tau_{r\phi} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{r\phi} - e_{15}^T E_r \\
 \tau_{\phi z} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{\phi z} - e_{15}^T E_z \\
 \tau_{rz} &= \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \gamma_{rz} \\
 D_r &= \varepsilon_{11}^{E,T} E_r + e_{15}^T \gamma_{r\phi} \\
 D_\phi &= \varepsilon_{33}^{E,T} E_\phi + e_{13}^T (\varepsilon_r + \varepsilon_z) + e_{33}^T \varepsilon_\phi + g_3^T T \\
 D_z &= \varepsilon_{11}^{E,T} E_z + e_{15}^T \gamma_{\phi z}
 \end{aligned} \tag{21}$$

в) сферические координаты

$$r, \theta, \phi \quad (x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta)$$

Радiallyная поляризация

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= c_{13}^{E,T} \varepsilon_r + c_{13}^{E,T} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi) - e_{33}^T E_r - \gamma_{33}^E T \\
 \sigma_\theta &= c_{13}^{E,T} \varepsilon_r + c_{11}^{E,T} \varepsilon_\theta + c_{12}^{E,T} \varepsilon_\phi - e_{13}^T E_r - \gamma_{11}^E T \\
 \sigma_\phi &= c_{13}^{E,T} \varepsilon_r + c_{12}^{E,T} \varepsilon_\theta + c_{11}^{E,T} \varepsilon_\phi - e_{13}^T E_r - \gamma_{11}^E T \\
 \tau_{r\theta} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{r\theta} - e_{15}^T E_\theta \\
 \tau_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} (c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}) \gamma_{\theta\phi} \\
 \tau_{\phi r} &= c_{44}^{E,T} \gamma_{\phi r} - e_{15}^T E_\phi \\
 D_r &= \varepsilon_{33}^{E,T} E_r + e_{13}^T (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi) + e_{33}^T \varepsilon_r - g_3^T T \\
 D_\theta &= \varepsilon_{11}^{E,T} E_\theta + e_{15}^T \gamma_{r\theta} \\
 D_\phi &= \varepsilon_{11}^{E,T} E_\phi + e_{15}^T \gamma_{\phi r}
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев.: Наукова Думка, 1989. 279с.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях //Физическая акустика/. Под. ред. У. Мезона. М.: Мир. 1996. Том 1. Ч. А. С. 204-326.
5. Holland R. Eer Nisse E. Design of resonant piezoelectric devices // Cambridge: MIT. Press. 1969. 257p.
6. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. New York: Plenum press. 1969. 211p.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. 1976. 616с.
8. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962. 364с.
9. Уздалов А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1967. 167с.
10. Кудрявцев Б.А. Механика пьезоэлектрических материалов – М.Д.Т. (ВИНИТИ. 1978г. 11. С.5-66).
11. Goodier J.N. On the Integration of the Thermoelastic Equations. Phil. Mag. 7. 23. 1937.

Ереванский государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
26.02.2004