ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №4, 2004 Механика

УДК 539.3

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА С ЧАСТИЧНО ЭЛЕКТРОДИРОВАННЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Бардзокас Д.И., Фильштинский М.А.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի

Մասամբ էլեկտրոդավորված անցքով և թունելային ճաքով պյեզոկերամիկ տարածության էլեկտրական գրգռում

Դիտարկվում է էլեկտրոառաձգականության հակահարթ խառը եզրային խնդիր անցքի և ճաքի տեսքով թունելային անհամասեռություններով պյեզոկերամիկ տարածության տատանումների մասին: Էլեկտրական դաշտի գրգռումը տեղի է ունենում էլեկտրական պոտենցիալների տարբերության հաշվին, որոնք հաղորդվում են լարումներից ազատ անցքի մակերևույթի վրա տեղավորված էլեկտրոդների համակարգին: Ճաքի ծայրակետերում սահքի լարումների ուժգնության գործակիցների համար ստացված է բանաձև և թվային վերլուծության միջոցով բացահայտված են բնութագրիչ մեծությունների փոփոխման օրինաչափությունները:

D.Bardzokas, M.L. Filshtinsky

Electric excitation of a piezoceramic space with a partially electrodized opening and tunnel crack

Рассматривается антиплоская смешанная граничная задача электроупругости о колебаниях пьезокерамического пространства с туннельными однородностями. Получена формула для коэффициента интенсивности сдвиговых напряжений в вершинах трещины и посредством численного анализа выяснены закономерность изменения характерных величин.

1. Введение

Многие актуальные научные и технологические проблемы современной инженерии связаны с исследованиями процессов распространения волн в пьезоэлектриках и с определением динамической прочности в окрестности различных типов неоднородностей. Решение возникающих в этом случае сложных проблем требует применения современных математических средств и методов, в частности, методов динамической теории упругости. Развитие этих методов отражено в монографиях [1-6], которые появились в последние десятилетия.

В пьезоэлектрических средах с неоднородностями взаимодействие электрических и механических полей может приводиться к электрическому, механическому или смешанному электромеханическому разрушению. Края электродов являются источниками концентрации компонентов электроупругого поля, и следовательно, в этих областях возможно зарождение микротрещин или развитие пробоя [7]. Некоторые аспекты механики разрушения пьезокерамических тел рассмотрены в [8,9].

В предположении, что электроды невесомы и имеют пренебрежимо малую жесткость, были рассмотрены многие статические и динамические граничные задачи электроупругости для пьезоэлектриков с поверхностными электродами [6,10-11]. При этом, в основном, изучались случаи, когда расположение электродов на поверхности тела имеет либо периодический (бесконечное число электродов), либо симметричный характер, что позволяло применять для решения задач эффективные в этих случаях методы рядов и интегральных преобразований.

Подход, опирающийся на метод граничных интегральных уравнений, к исследованию гармонических колебаний бесконечного пьезокерамического цилиндра, возбуждаемого произвольной системой электродов, был предложен в [12]. При помощи специальных интегральных представлений решений антиплоская граничная задача электроупругости была сведена к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений с разрывными ядрами. Для ее решения была разработана модифицированная схема метода квадратур. Указанным подходом были рассмотрены антиплоские задачи электроупругости о гармонических колебаниях пьезокерамической среды с туннельным вдоль оси симметрии материала отверстием [13,14]. Нестационарная динамическая задача о возбуждении сдвиговых волн в пьезосреде с электродированной полостью электрическим импульсом рассмотрена в [15]. Дифракция волны сдвига на туннельных полостях, трещинах и цилиндрических включениях в пьезокерамическом полупространстве и полуслое методом сингулярных интегральных уравнений исследовалась в [16-19]. Статические и динамические антиплоские задачи электроупругости для кругового цилиндра с одним и двумя симметрично расположенными электродами методом рядов изучались в [6]. Колебания бесконечных пьезокерамических цилиндров с дефектами типа туннельных трещин и линейных включений (стрингеров) в условиях прямого пьезоэлектрического эффекта рассматривались в [13].

В данной статье рассматривается антиплоская смешанная граничная задача электроупругости о колебаниях пьезокерамического пространства с туннельными неоднородностями типа отверстия и трещины. Возбуждение электроупругого поля происходит за счет разностей электрических потенциалов, подаваемых на систему электродов, расположенных на свободной от напряжений поверхности отверстия. Даются корректные интегральные представления решений, с учетом которых граничная задача сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода с разрывными ядрами. Получена формула для коэффициента интенсивности сдвиговых напряжений в вершинах трещины. Приводятся результаты численной реализации алгоритма, характеризующие поведение компонентов электроупругого поля в области и на границе кусочно-однородного пространства в условиях обратного пьезоэлектрического эффекта.

2. Постановка задачи

Рассмотрим отнесенное к декартовой системе координат Ox_1, x_2, x_3 пьезокерамическое пространство, содержащее туннельные вдоль оси x_3 отверстие и криволинейную трещину L. На свободной от механических усилий поверхности отверстия располагаются $2n$ бесконечно длинных в направлении оси x_3 тонких электродов с заданными разностями электрического потенциала. Неэлектродированные участки поверхности отверстия сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы k-го электрода определены величинами β_{2k-1} и β_{2k} $\left(k=\overline{1,2n}\right)$, а электрический потенциал на нем задан величиной $\phi_k^* = \mathrm{Re}\left(\Phi_k^* e^{-i\omega t}\right)$ (ω – круговая частота, t – время). Предполагается, что кривизны контуров L и C являются функциями класса Гельдера [20], а электроды – идеально проводящие и абсолютно гибкие. Взаимное расположение неоднородностей, их конфигурации, а также расположение поверхностных электродов не могут быть вполне произвольными: налагаемые на них требования будут указаны ниже.

В данных условиях в кусочно-однородном пространстве имеет место электроупругое поле, соответствующее состоянию антиплоской деформации [6]. Полная система дифференциальных уравнений в квазистатическом приближении включает следующие соотношения:
уравнение движения

$$\partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

материальные уравнения среды

$$\sigma_{m3} = c_{44}^E\partial_m u_3 - e_{15}E_m, \quad D_m = e_{15}\partial_m u_3 + э_{11}^\varepsilon E_m \quad (m=1,2) \tag{2.2}$$

и уравнения электростатики

$$\mathrm{div}D = 0, \qquad E = -\mathrm{grad}\phi \tag{2.3}$$

В (2.1)–(2.3) σ_{m3} $(m=1,2)$ – компоненты тензора напряжения, u_3 – компонента вектора упругого перемещения в направлении, параллельном оси x_3; E и D – векторы напряженности и индукции электрического поля; ϕ – электрический потенциал; c_{44}^E, e_{15} и $э_{11}^\varepsilon$ – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях, соответственно; ρ – массовая плотность материала.

Систему уравнений (2.1)-(2.3) сведем к дифференциальным уравнениям относительно перемещения u_3 и электрического потенциала ϕ:

$$c_{44}^E\nabla^2 u_3 + e_{15}\nabla^2\phi = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \qquad e_{15}\nabla^2 u_3 - э_{11}^\varepsilon \nabla^2\phi = 0 \tag{2.4}$$

Из (2.4) следуют соотношения

$$\nabla^2 u_3 - c^{-2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 F = 0$$

$$\phi = \frac{e_{15}}{э_{11}^\varepsilon}u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E\left(1+k_{15}^2\right)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E\, э_{11}^\varepsilon}} \tag{2.5}$$

где c – скорость волны сдвига в пьезокерамической среде, k_{15} – коэффициент электромеханической связи [5].

Механические и электрические величины при учете (2.2), (2.3) и (2.5) можно выразить через функции u_3 и F по формулам [13]

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{44}^E\left(1+k_{15}^2\right)u_3 + e_{15}F\right]$$

$$D_1 - iD_2 = -2\, э_{11}^\varepsilon\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad E_1 - iE_2 = -2\frac{\partial}{\partial z}\left(F + \frac{e_{15}}{э_{11}^\varepsilon}u_3\right), \quad z = x_1 + ix_2 \tag{2.6}$$

Полагая $u_3 = \mathrm{Re}\left(U_3 e^{-i\omega t}\right)$, $\phi = \mathrm{Re}\left(\Phi e^{-i\omega t}\right)$ и $F = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}F^*\right)$, запишем уравнения (2.5) относительно амплитудных величин:

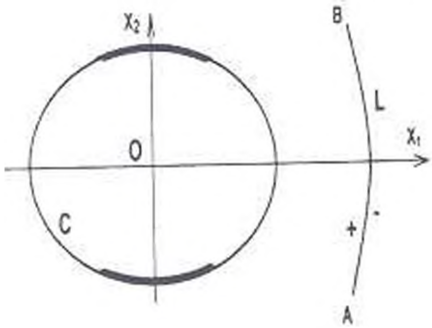
$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad \Phi = \frac{e_{15}}{э_{11}^{\varepsilon}} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c} \tag{2.7}$$

где γ – волновое число.

Считая, что берега трещины свободны от механических напряжений, представим механические и электрические граничные условия на контуре L следующим образом [6]:

$$\left(\sigma_{13}\cos\psi + \sigma_{23}\sin\psi\right)^{\pm} = 0 \tag{2.8}$$

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^- \tag{2.9}$$



Фиг. 1. Среда с частично электродированным отверстием и криволинейной трещиной.

Здесь E_s и D_n представляют собой касательную компоненту вектора электрической напряженности и нормальную компоненту вектора электрической индукции соответственно; ψ – угол между нормалью к левому берегу L и осью Ox_1; знаки «плюс» и «минус» относятся к левому и правому берегам разреза при движении от его начала a к концу b (фиг.1). Условия (2.9) выражают то обстоятельство, что соответствующие компоненты электрического поля не претерпевают скачков при переходе через разрез L.

С учетом представлений (2.5), (2.6) граничные условия на поверхностях отверстия и трещины можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^2\right)U_3 + e_{15}F^*\right\} = 0 \text{ на } C$$

$$F^* + \frac{e_{15}}{э_{11}^{\varepsilon}} U_3 = \Phi^*\left(\zeta^*\right), \quad \zeta^* \in C_\phi, \quad D_n^* = -э_{11}^{\varepsilon}\frac{\partial F^*}{\partial n} = 0 \text{ на } C \setminus C_\phi \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^2\right)U_3 + e_{15}F^*\right\}^{\pm} = 0 \text{ на } L$$

где C_ϕ – часть контура C, соответствующая электродированной поверхности отверстия; оператор $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к граничному контуру.

Таким образом, задача заключается в определении функций U_3 и F^* из уравнений (2.7), граничных условий (2.10) и электрических условий (2.9) на L.

3. Сведение граничной задачи электроупрутости к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений

Следуя [13], представим амплитуды искомых функций в виде

$$U_3(z)=\int\limits_C p(\zeta^*)H_0^{(1)}(\gamma r_1)ds-\frac{i}{4}\int\limits_L [U_3]\frac{\partial H_0^{(1)}(\gamma r)}{\partial n_\zeta}ds$$

$$F^*(z)=\int\limits_C f(\zeta^*)\frac{\partial}{\partial n_{\zeta^*}}\ln r_1 ds+\frac{e_{15}}{2\pi\,\varepsilon_{11}^{c}}\int\limits_L\left[\frac{dU_3}{ds}\right]\arg(z-\zeta)ds \qquad (3.1)$$

$$r=|z-\zeta|,\quad r_1=|\zeta^*-z|,\quad \zeta\in L,\quad \zeta\in C$$

Здесь $H_\nu^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода порядка ν, ds – элемент длины дуги контура, по которому производится интегрирование.

Интегральные представления (3.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.7), обеспечивают наличие скачка перемещения и непрерывность вектора напряжения на L, а также автоматическое выполнение электрических условий (2.9).

Подставляя предельные значения функций (3.1) и их производных при $z\to\zeta_0\in L$ и $z\to\zeta_0^*\in C$ в граничные условия (2.10), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$2ip(\zeta_0^*)+\int\limits_C p(\zeta^*)g_1(\zeta^*,\zeta_0^*)ds+\int\limits_C f'(\zeta^*)g_2(\zeta^*,\zeta_0^*)ds+$$
$$+\int\limits_L\left[\frac{dU_3}{ds}\right]g_3(\zeta,\zeta_0^*)ds+\int\limits_L[U_3]g_4(\zeta,\zeta_0^*)ds=0$$
$$-\pi f(\zeta_0^*)+\int\limits_C p(\zeta^*)g_5(\zeta^*,\zeta_0^*)ds+\int\limits_C f(\zeta^*)g_6(\zeta^*,\zeta_0^*)ds+$$
$$+\int\limits_C\left[\frac{dU_3}{ds}\right]g_7(\zeta,\zeta_0^*)ds+\int\limits_C[U_3]g_8(\zeta,\zeta_0^*)ds=\Phi^*(\zeta_0^*),\quad \zeta_0^*\in C_\phi \qquad (3.2)$$
$$\int\limits_C f'(\zeta^*)g_9(\zeta^*,\zeta_0^*)ds+\int\limits_L\left[\frac{dU_3}{ds}\right]g_{10}(\zeta,\zeta_0^*)ds=0,\quad \zeta_0^*\in C\setminus C_\phi$$
$$\int\limits_C p(\zeta^*)g_{11}(\zeta^*,\zeta_0)ds+\int\limits_C f'(\zeta^*)g_{12}(\zeta^*,\zeta_0)ds+\int\limits_L\left[\frac{dU_3}{ds}\right]g_{13}(\zeta,\zeta_0)ds+$$
$$+\int\limits_L[U_3]g_{14}(\zeta,\zeta_0)ds=0$$

в которой ядра g_m $(m=1.14)$ определяются следующими выражениями:

$$g_1(\zeta^*,\zeta_0^*)=\frac{2}{\pi i}\operatorname{Re}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0^*}+\gamma H_1(\gamma r_{10})\cos(\psi_{10}-\alpha_{10})$$

$$g_2(\zeta^*,\zeta_0^*)=\frac{e_{15}}{c_{44}^E(1+k_{15}^2)}\operatorname{Im}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0^*},\qquad g_3(\zeta,\zeta_0^*)=\frac{1}{2\pi(1+k_{15}^2)}\operatorname{Im}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta-\zeta_0^*}$$

$$g_4(\zeta,\zeta_0^*)=\frac{i\gamma^2}{8}\left[H_2(\gamma r_{20})\cos(\psi+\psi_{10}-2\alpha_{20})-H_0^{(1)}(\gamma r_{20})\cos(\psi-\psi_{10})\right]$$

$$g_5\left(\zeta^*,\zeta_0^*\right)=\frac{e_{15}}{Э_{11}^{\varepsilon}}H_0^{(1)}(\gamma r_{10}),\quad g_6\left(\zeta^*,\zeta_0^*\right)=\mathrm{Re}\frac{e^{i\psi_1}}{\zeta^*-\zeta_0^*}$$

$$g_7\left(\zeta,\zeta_0^*\right)=\frac{e_{15}}{2\pi\, Э_{11}^{\varepsilon}}\alpha_{20},\quad g_8\left(\zeta,\zeta_0^*\right)=-\frac{ie_{15}}{4\, Э_{11}^{\varepsilon}}\gamma H_1^{(1)}(\gamma r_{20})\cos(\psi-\alpha_{20})$$

$$g_8\left(\zeta^*,\zeta_0^*\right)=\mathrm{Im}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0^*},\quad g_{10}\left(\zeta,\zeta_0^*\right)=-\frac{e_{15}}{2\pi\, Э_{11}^{\varepsilon}}\mathrm{Im}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta-\zeta_0^*}$$

$$g_{11}\left(\zeta^*,\zeta_0\right)=\frac{2}{\pi i}\mathrm{Re}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0}+\gamma H_1(\gamma r_{30})\cos(\psi_0-\alpha_{30})$$

$$g_{12}\left(\zeta^*,\zeta_0\right)=\frac{e_{15}}{c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^2\right)}\mathrm{Im}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0},\quad g_{13}\left(\zeta,\zeta_0\right)=\frac{1}{2\pi\left(1+k_{15}^2\right)}\mathrm{Im}\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta-\zeta_0}$$

$$g_{13}\left(\zeta,\zeta_0\right)=\frac{i\gamma^2}{8}\left[H_2(\gamma r_0)\cos(\psi+\psi_0-2\alpha_0)-H_0^{(1)}(\gamma r_0)\cos(\psi-\psi_0)\right]$$

$$H_1(x)=\frac{2i}{\pi x}+H_1^{(1)}(x),\quad H_2(x)=\frac{4i}{\pi x^2}+H_2^{(1)}(x)$$

$$r_0=\left|\zeta_0-\zeta\right|,\ \alpha_0=\arg(\zeta_0-\zeta),\ r_{10}=\left|\zeta^*-\zeta_0^*\right|,\ \alpha_{10}=\arg\left(\zeta^*-\zeta_0^*\right)$$

$$r_{20}=\left|\zeta_0^*-\zeta\right|,\quad \alpha_{20}=\arg\left(\zeta_0^*-\zeta\right),\quad r_{30}=\left|\zeta^*-\zeta_0\right|,\ \alpha_{30}=\arg\left(\zeta^*-\zeta_0\right)$$

$$\psi=\psi(\zeta),\quad \psi_1=\psi\left(\zeta^*\right),\ \psi_0=\psi(\zeta_0),\quad \psi_{10}=\psi\left(\zeta_0^*\right),\ \zeta,\zeta_0\in L,\ \zeta^*,\zeta_0^*\in C$$

Здесь ψ и ψ_1 – углы между нормалями к контурам L и C и осью Ox_1 соответственно; $\Phi\left(\zeta_0^*\right)$ – кусочно-постоянная функция, задающая значения амплитуд электрических потенциалов на электродах.

Для однозначной разрешимости системы (3.2) в классе функций с производными, неограниченными вблизи концов трещины L [20], ее необходимо рассматривать в совокупности с дополнительным условием

$$\int_L\left[\frac{dU_3}{ds}\right]ds=0 \tag{3.3}$$

выражающим равенство нулю скачков перемещения в вершинах L. Кроме того, условие (3.3) обеспечивает однозначность интегрального представления функции $F^*(z)$ в (3.1).

Необходимо отметить, что, поскольку возникающие в процессе колебаний отраженные от трещины электроупругие волны превносят дополнительные заряды на парные (питаемые от отдельного генератора) электроды, расположение последних, а также взаимное расположение отверстия и трещины и их конфигурации должны быть таковыми, чтобы эти дополнительные заряды (по абсолютной величине) были одинаковыми. В противном случае система (3.2) становится неразрешимой.

Определив функции $[U_3]$, $p\left(\zeta^*\right)$ и $f\left(\zeta^*\right)$ из системы (3.2), по формулам (2.5), (2.6) с использованием представлений (3.1) можно определить все компоненты электроупругого поля в кусочно-однородном пространстве.

Вводя параметризацию контура C с помощью равенств $\zeta^* = \zeta^*(\beta)$, $\zeta_0^* = \zeta^*(\beta_0)$ $(0 \le \beta, \beta_0 \le 2\pi)$, найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов $q_k(\beta)$ на k-м электроде. Принимая во внимание то, что отверстие сопряжено с вакуумом, запишем

$$q_k(\beta) = D_n^{(k)'}(\beta), \; \beta_{2k-1} < \beta < \beta_{2k} \tag{3.4}$$

Здесь $D_n^{(k)'}(\beta)$ представляет собой амплитуду нормальной компоненты вектора электрической индукции на участке поверхности отверстия, покрытом k-м электродом. Привлекая интегральное представление (3.1) для функции $F^*(z)$, с учетом равенств (3.4), (2.6) находим

$$q_k(\beta_0) = -\text{э}_{11}^{\varepsilon} \int_C f'(\zeta^*) \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta^* - \zeta_0^*} ds, \quad \zeta_0^* \in C_{\phi_k} \tag{3.5}$$

где C_{ϕ_k} — часть контура C, на которой расположен k-й электрод.

Интегрируя выражение (3.5) по переменной β_0 в пределах от β_{2k-1} до β_{2k}, получим амплитудное значение суммарного заряда Q_k k-го электрода, отнесенное к единице его длины. Ток, протекающий через данный электрод и равный току проводимости в цепи генератора, можно определить по формуле

$$I_k(t) = \operatorname{Re}\left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\beta_{2k-1}}^{\beta_{2k}} q_k(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \right\}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0} \tag{3.6}$$

Отметим, что в случае антиплоской деформации напряжения продольного сдвига на свободной от механической нагрузки поверхности не имеют особенности на краях электродов [7]. Вместе с тем, компоненты вектора электрической индукции обладают особенностями корневого типа на краях электродов, что непосредственно следует из асимптотического анализа сингулярных интегральных уравнений (3.2) и выражений (3.4), (3.5).

4. Коэффициент интенсивности напряжений в вершинах трещины

Для определения коэффициента интенсивности напряжений K_{III} [21] получим главную асимптотику сдвигового напряжения на продолжении за вершину трещины. При этом будем исходить из формул, определяющих поведение интегралов типа Коши в окрестности концов L в том случае, когда плотность имеет степенную особенность [20]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \dfrac{e^{\sigma\pi i} \tau_0(a)(z-a)^{-\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} + \Lambda_1(z), & z \in O(a) \\ -\dfrac{e^{-\sigma\pi i} \tau_0(b)(z-b)^{-\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} + \Lambda_2(z), & z \in O(b) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\tau(\zeta) = \frac{\tau_0(\zeta)}{(z-c)^{\sigma}}, \quad \sigma = k_1 + ik_2, \quad 0 \le k_1 \le 1$$

Для функции $\Lambda_m(z)$ имеют место соотношения

$$\lim_{z\to a}\Lambda_1(z)(z-a)^\sigma = 0,\ \ \lim_{z\to b}\Lambda_2(z)(z-b)^\sigma = 0.$$

Из асимптотического анализа последнего в (3.2) сингулярного интегродифференциального уравнения в окрестности вершины L следует, что $\sigma = 1/2$. Поэтому, введя параметризацию контура трещины $\zeta = \zeta(\delta)$, можно положить

$$\left[\frac{dU_3}{ds}\right] = \frac{\Omega_0(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}},\ \ s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} > 0,\ \ -1 \le \delta \le 1 \qquad (4.2)$$

где функция $\Omega_0(\delta)$ является непрерывной по Гельдеру.

Имеем (оставляя лишь члены, дающие вклад в асимптотику)

$$\sigma_n = \mathrm{Re}\left(S_n e^{-i\omega t}\right),\ \ S_n = c_{44}^E \frac{\partial U_3}{\partial n} + \ldots = c_{44}^E\left[e^{i\psi_c}\frac{\partial U_3}{\partial z} + e^{-i\psi_c}\frac{\partial U_3}{\partial \bar z}\right] + \ldots \qquad (4.3)$$

где c – вершина разреза, $\psi_c = \psi(c)$.

На основании (3.1) выпишем главную часть функции (4.3):

$$S_n^0 = \frac{c_{44}^E}{2\pi}\int_L\left[\frac{dU_3}{ds}\right]\mathrm{Im}\frac{e^{i\psi_c}}{\zeta - z}ds \qquad (4.4)$$

Используя асимптотические формулы (4.1), с учетом (4.2) находим

$$S_n^0 = \pm c_{44}^E\frac{\Omega_0(\pm 1)}{2\sqrt{2r^* s'(\pm 1)}},\ \ s'(\pm 1) = \left.\frac{ds}{d\delta}\right|_{\delta=\pm 1} \qquad (4.5)$$

Здесь $r^* = |z-c|$, нижний знак относится к вершине $c=0$, верхний – к $c=b$.

Исходя из (4.5), находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{III}^{\pm} = \lim_{r^*\to 0}\sqrt{2\pi r^*}\sigma_n^0 = \pm\frac{c_{44}^E}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}}\mathrm{Re}\left[\Omega_0(\pm 1)e^{-i\omega t}\right] \qquad (4.6)$$

Асимптотика нормальной составляющей вектора электрической индукции на продолжении за вершину разреза такова:

$$D_n = D_1\cos\psi(\pm 1) + D_2\sin\psi(\pm 1) = \pm e_{15}\frac{\mathrm{Re}\left[\Omega_0(\pm 1)e^{-i\omega t}\right]}{2\sqrt{2r^* s'(\pm 1)}} \qquad (4.7)$$

Остальные электрические величины в окрестности L ограничены. В самом деле, из уравнений состояния (2.2) имеем

$$\sigma_n = c_{44}^E\frac{\partial u_3}{\partial n} - e_{15}E_n,\qquad D_n = e_{15}\frac{\partial u_3}{\partial n} + э_{11}^\varepsilon E_n \qquad (4.8)$$

где D_n – нормальная компонента электрической индукции на дуге L', как угодно близкой к L. Поскольку $[\sigma_n] = [D_n] = 0$ и определитель системы (4.8) отличен от нуля, находим $[\partial u_3/\partial n] = [E_n] = 0$. Таким образом, вектор электрической напряженности E непрерывно продолжим через разрез.

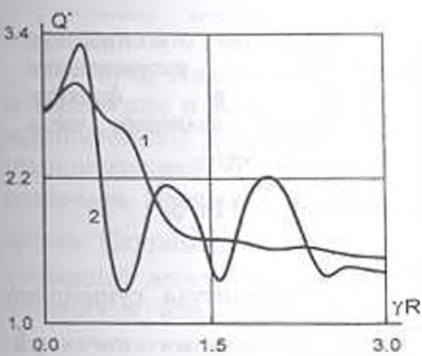
5. Численные результаты

Рассмотрим пьезокерамическое пространство (материал-PZT-4 [22], содержащее отверстие эллиптического поперечного сечения и трещину, контур которой представляет собой параболу. Допустим, что возбуждение пространства осуществляется двумя электродами с разностью амплитуд потенциалов $2\Phi^*$. Параметрические уравнения контуров L и C соответственно имеют вид

$$\zeta = \delta e^{i\vartheta}\left(p_1 + ip_2\delta\right) + h, \quad \delta \in [-1,1]$$
$$\zeta^* = R_1 \cos\beta + iR_2 \sin\beta, \quad \beta \in [0,2\pi] \tag{5.1}$$

где ϑ – угол, характеризующий ориентацию трещины в пространстве.

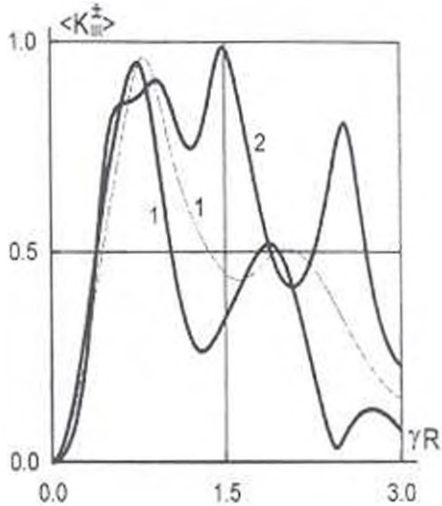
Решение системы интегродифференциальных уравнений (3.2) совместно с (3.3) с учетом (5.1) проводилось по специальной схеме метода квадратур [13].



Фиг. 2. Изменение относительного суммарного электрического заряда на электроде в функции нормализованного волнового числа

$\beta_1 = 5\pi/14,\ \beta_2 = 9\pi/14,$

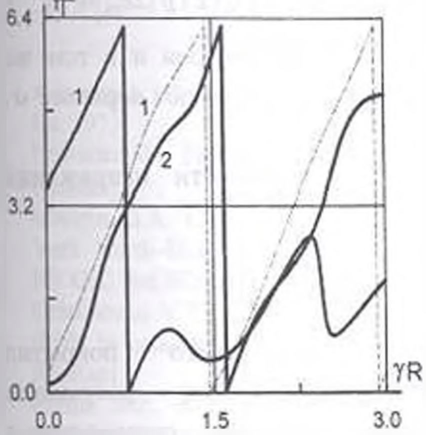
$\beta_3 = 19\pi/14,\ \beta_4 = 23\pi/14$



Фиг. 3. Изменение относительного коэффициента интенсивности напряжений в функции нормализованного волнового числа

$\beta_1 = 5\pi/14,\ \beta_2 = 9\pi/14,$

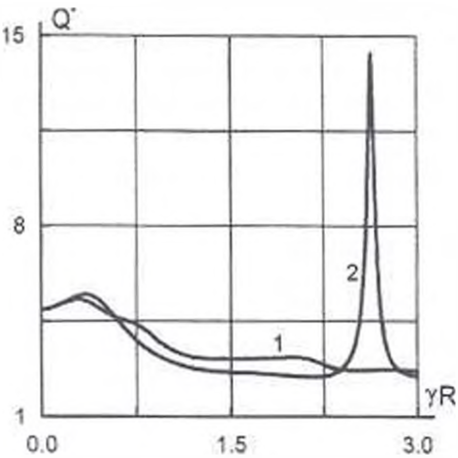
$\beta_3 = 19\pi/14,\ \beta_4 = 23\pi/14$



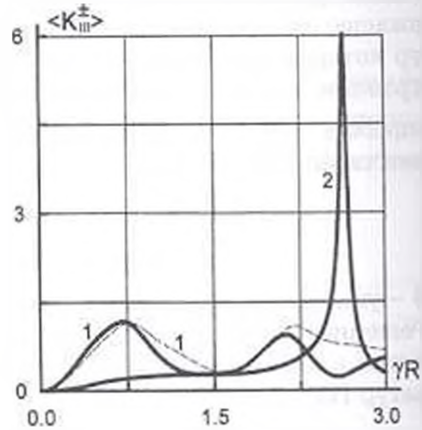
Фиг. 4. Изменение величины $\eta^{\pm} = \arg\left(\Omega_0(\pm 1)\right)$ в функции нормализованного волнового числа

$\beta_1 = 5\pi/14,\ \ \beta_2 = 9\pi/14,$

$\beta_3 = 19\pi/14,\ \ \beta_4 = 23\pi/14.$



Фиг. 5. Изменение относительного суммарного электрического заряда на электроде в функции нормализованного волнового числа $\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$



Фиг. 6. Изменение относительного коэффициента интенсивности напряжений в функции нормализованного волнового числа $\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 5\pi/6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$

Поведение величины $Q^* = \left|Q/\left(э_{11}^{\pm}\,\Phi^*\right)\right|$ (Q — амплитуда суммарного заряда на электроде) в функции нормализованного волнового числа γR представлено на фиг.2. Кривая 1 построена для значений параметров $R_1/R_2 = 1$, $p_1/R_1 = 1$, $p_2/R_1 = 0$, $h/R_1 = 3$, $\vartheta = 0$, $\beta_1 = 5\pi/14$, $\beta_2 = 9\pi/14$, $\beta_3 = 19\pi/14$, $\beta_4 = 23\pi/14$; кривая 2 — для тех значений, кроме $p_1/R_1 = 3$, $\vartheta = \pi/2$ ($R = 0.5(R_1 + R_2)$, $2l$ — длина разреза).

На фиг. 3 и 4 приведены зависимости относительного коэффициента интенсивности напряжений $\left(K_{III}^{\pm}\right) = c_{44}^{E}\sqrt{\pi l/s'(\pm 1)}\,\Omega_0(\pm 1)/\left(2e_{15}\left|\Phi^*\right|\right)$ и $\eta^{\pm} = \arg\left(\Omega_0(\pm 1)\right)$ от γR для тех же значений параметров и в том же соответствии, что и на фиг.2. Сплошные линии соответствуют вершине a, штриховые — вершине b.

Зная величину $\left(K_{III}^{\pm}\right)$, коэффициент интенсивности напряжений можно определить по формуле

$$K_{III}^{\pm} = \pm\frac{e_{15}\left|\Phi^*\right|}{\sqrt{l}}\left(K_{III}^{\pm}\right)\cos\left(\omega t - \arg\Omega_0(\pm 1)\right)$$

Для случая большей площади электродного покрытия $\left(\beta_1 = \pi/6,\ \beta_2 = 5\pi/6,\ \beta_3 = 7\pi/6,\ \beta_4 = 11\pi/6\right)$ аналогичные результаты расчета представлены на фиг. 5—6. Кривые 1 и 2 здесь соответствуют параметрам $R_1/R_2 = 1$, $p_1/R_1 = 1$, $p_2/R_1 = 0$, $h/R_1 = 3$, $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$.

Заключительные замечания

Представленный подход к решению смешанной стационарной динамической задачи электроупругости позволяет эффективно исследовать влияние инерционного эффекта на поведение компонентов электроупругого поля в пьезокерамическом пространстве с туннельными неоднородностями достаточно произвольной конфигурации для различного количества активных электродов. При численном решении системы интегродифференциальных уравнений (3.2) по схеме метода квадратур [13], в силу того, что некоторые ее ядра терпят разрывы, а плотности обладают корневыми особенностями на краях электродов, для достижения удовлетворительной точности следует брать значительное число узлов разбиения контура сечения полости, что приводит к увеличению затрат процессорного времени. Несмотря на это, рассмотренный подход привлекает своей универсальностью, позволяя исследовать различные варианты электрического возбуждения сопряженных полей без какого-либо принципиального изменения алгоритма.

Из представленных результатов расчетов следует, что поведение электрических и механических величин существенно зависит от частоты гармонического нагружения, взаимного расположения и конфигурации неоднородностей, а также расположения и размеров поверхностных электродов. Наличие трещины может значительно усилить динамический эффект. Например, как следует из фиг.5, величина Q^*, характеризующая суммарный электрический заряд на электроде, может превысить свой статический аналог в 2.9 раз (кривая 2). В отсутствие трещины это превышение составляет лишь 9% [13]. Отметим также, что в статике $(\omega = 0)$ электрическое нагружение пьезокерамической среды в условиях антиплоской деформации не вызывает в ней механических напряжений и поэтому коэффициент K_{III} равен нулю.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Афинским национальным Техническим Университетом и Институтом Механики НАН Армении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids.–Amsterdam; North–Holland Publ Co, 1973.
2. Nowacki W. Electromagnetic effects in solid bodies.–M.: Mir, 1986.–160p. [in Russian].
3. Maugin G.A. Continuum mechanics of electromagnetic solids.– Amsterdam–New York: North–Holland, 1988.–488p.
4. Sih G.C. (ed.)Elastodynamic crack problems.–Leyden: Noordhoff; 1977
5. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Electroelasticity. (Mechanics of coupled fields in construction elements, Vol. 5).–Kyiv, Naukova Dumka, 1989. –280p. [in Russian].
6. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity. New York: Gordon and Breach, 1988.
7. Bardzokas D, Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges.–Strength of Matrials, 1994, No. 7, pp. 510-513 [in Russian].

8. Parton V.Z. Fracture mechanics for piezoelectric materials. –Acta Astronautica, 1976, Vol. 3, No 9-10, pp. 671-683.
9. Suo Z., Kuo C.M., Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics.–J. Mech. Phys. Solids, 1992, No. 40, pp.739-765.
10. Kudryavtsev B.A. Electroelastic state of a half-plane from piezoceramics with two boundary electrodes. –Probl. Prochnosti, 1982, No. 7, pp. 56-59 [in Russian].
11. Bardzokas D., Kudryavtsev B.A., Senik N.A. The Rayleigh waves in a half–space with a finite system of surface electrodes. -Mech. of Solids, 1996, No 1, p.45-51 [in Russian].
12. Filshtinsky M.L. On an approach to the investigation of electroelastic fields in a cylinder excited by the system of surface electrodes. Sumy (Ukraine), Procedings of Sumy University, 1998, No 1(9), pp. 3-8 [in Russian].
13. Bardzokas D., Filshtinsky M.L. Electroelasticity of piecewise-uniform bodies.–Sumy (Ukraine): University Book Publ., 2000.-308p. [in Russian].
14. Bardzokas D., Filshtinsky M.L., Rodriguez–Ramos R., Sanchez-Casals O. Oscillations of a hollow piezoceramic cylinder excited by a system of surface electrodes.–VIIIth International Conference "Numerical methods in continuum mechanics", Liptovsky Jan, Slovak Republic, 2000, pp.161-162.
15. Ссылка на конф. Бреббиа.
16. Фильштинский М.Л. Динамическое нагружение пьезокерамического полупространства с трещиной. // Акуст.журнал. 1993. Т.39. Вып.5. С.921-928 [in Russian].
17. Партон В.З., Фильштинский М.Л. Динамическая задача электроупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями. // Изв. РАН. МТТ. 1993. №5. С.82-88 [in Russian].
18. Parton V.Z., Filshtinsky M.L. The steady-state wave process in a piezoelectric layer and half-layer weakened by tunnel cuts (antiplane deformation). // J. Appl. Maths Mechs, Vol. 56, No 3, 424-431, 1992.
19. Бардзокас Д., Фильштинский М.Л. Дифракция волны сдвига на цилиндрических включениях в пьезоэлекрическом полупространстве. //Изв. РАН. МТТ. 1997. №3. С. 77-84 [in Russian].
20. Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. Groningen Wolters-Noordhoff Publishing, 1958.
21. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239с.
22. Berlincourt D.A., Curran D.R, Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their functions as transducers. In: Physical acoustics, V.1, Part A. Edited by W.P. Mason. Academic Press, New–York, 1964.

Афинский национальный
технический университет, Греция.
Сумский государственный
университет, Украина.

Поступила в редакцию
6.10.2004