ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №4, 2004 Механика

УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.

Ս. Ա. Համբարձումյան, Վ. Ց. Գնունի

Լայնական սահքերի հաշվառմամբ տարամոդուլ սալի գլանային մակերևույթով ծռումը

Աշխատանքում քննարկվում է սալի նյութի տարամոդուլության և լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունը սալի հաշվարկային մեծությունների վրա: Դիտարկվում են սալի երկար կողերի ամրացման տարբեր դեպքեր: Բացահայտվում են տարամոդուլության և լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունները սալի ճկվածքի և լարվածության (ծգում, սեղմում) գոտիների վրա:

S.A. Hambartsumyan, V.Ts. Gnuni

Clyindrical Bending of Different-modulus Plate with Regard to Transversal Shears

Различные задачи прочности, устойчивости и колебаний стержней, пластин и оболочек на основе разномодульной теории упругости [1] были рассмотрены в работах многих авторов [см.литературу в [1], а также литературу и краткий обзор в [2]). Однако, сложности, связанные с общей теорией, требуют иных подходов для решения многих конкретных задач.

Здесь рассматривается задача цилиндрического изгиба пластинки с учетом влияния поперечных сдвигов, с помощью новой (несколько упрощенной) четырехконстантной теории разномодульных материалов [3].

1. Пусть для материала пластинки имеем: E^+ — модуль упругости при чистом растяжении; E^- — модуль упругости при чистом сжатии; G_y — модуль сдвига при чистом сдвиге; ν^+ и ν^- — соответствующие коэффициенты Пуассона ($E^+\nu^- = E^-\nu^+$). Предполагается, что постоянные упругости остаются неизменными при любых сложных напряженных состояниях [3].

Согласно [1,3,4] принимается, что в зависимости от знаков нормальных напряжений σ_x^i и σ_y^i пластинка по толщине h разделяется на две зоны ("слоя") с постоянными толщинами h_i $\left(h_1 + h_2 = h\right)$.

В основу ставятся следующие известные предположения [4]: нормальные к срединной плоскости перемещения u_z^i не зависят от координаты z, нормальные напряжения σ_z^i пренебрежительно малы; поперечные касательные напряжения τ_{xz}^i и τ_{yz}^i по толщине слоя меняются по заданному закону.

Обобщенный закон упругости примет следующий вид [1,3,4]:

$$
\begin{aligned}
e_x^i &= a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_y^i , \quad e_y^i = a_{22}^i \sigma_y^i + a_{12}^i \sigma_x^i \\
e_{xy}^i &= a_{66}^i \tau_{xy}^i , \quad e_{xz}^i = a_{66}^i \tau_{xz}^i , \quad e_{yz}^i = a_{66}^i \tau_{yz}^i
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где для коэффициентов упругости в зависимости от знаков нормальных напряжений имеем

$$\text{при } \sigma_x^i > 0, \quad \sigma_y^i > 0 \qquad a_{11}^i = a_{22}^i = \frac{1}{E^+}$$

$$\text{при } \sigma_x^i < 0, \quad \sigma_y^i < 0 \qquad a_{11}^i = a_{22}^i = \frac{1}{E^-}$$

$$\text{при } \sigma_x^i > 0, \quad \sigma_y^i < 0 \qquad a_{11}^i = \frac{1}{E^+},\ a_{22}^i = \frac{1}{E^-}$$

$$\text{при } \sigma_x^i < 0, \quad \sigma_y^i > 0 \qquad a_{11}^i = \frac{1}{E^-},\ a_{22}^i = \frac{1}{E^-}$$

для коэффициентов a_{12} и a_{66} в независимости от знаков напряжений имеем

$$a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_p}$$

Разрешая (1.1) относительно напряжений, получим

$$\sigma_x^i = b_{11}^i e_x^i + b_{12}^i e_y^i, \quad \sigma_y^i = b_{22}^i e_y^i + b_{12}^i e_x^i$$
$$\tau_{xy}^i = b_{66} e_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = b_{66} e_{xz}^i, \quad \tau_{yz}^i = b_{66} e_{yz}^i \tag{1.2}$$

где для упругих постоянных имеем

$$b_{11}^i = \frac{a_{22}^i}{\Omega^i}, \quad b_{22}^i = \frac{a_{11}^i}{\Omega^i}, \quad b_{12}^i = \frac{a_{12}}{\Omega^i}$$
$$\Omega^i = a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^2, \quad b_{66} = \frac{1}{a_{66}} = G_p \tag{1.3}$$

Полагая, что пластинка загружена лишь нормально приложенной к лицевым поверхностям ($z = h_1$, $z = -h_2$) нагрузками Z^+ и Z^- соответственно для поперечных касательных напряжений, запишем [4]

$$\tau_{xz}^i = \left(1 - \frac{z^2}{h_i^2}\right)\varphi, \quad \tau_{yz}^i = \left(1 - \frac{z^2}{h_i^2}\right)\psi \tag{1.4}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ – искомые функции.

Для деформаций в случае цилиндрического изгиба по координате x имеем

$$e_x^i = \frac{\partial u_x^i}{\partial x}, \quad e_y^i = 0, \quad e_z^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z} = 0$$
$$e_{xy}^i = \frac{\partial u_y^i}{\partial x}, \quad e_{yz}^i = \frac{\partial u_y^i}{\partial z}, \quad e_{xz}^i = \frac{\partial u_x^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial x} \tag{1.5}$$

где $u_x^i(x,z)$, $u_y^i(x,z)$, $u_z(x)$ – перемещения какой-либо точки пластинки.

Пусть при $z = 0$ (координатная плоскость $x0y$ совпадает с плоскостью разделения "слоев") $u_z^i = w(x)$, $u_x^i = u(x)$, $u_y^i = \nu(x)$, где

w, u, v – искомые перемещения координатной плоскости $x0y$.

Согласно (1.2), (1.4), (1.5), а также при предыдущем предположении, для компонент любой точки пластинки получим

$$u_x^i = u - z\frac{\partial w}{\partial x} + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\varphi$$
$$u_y^i = v + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\psi, \quad u_z^i = w \tag{1.6}$$

Далее, согласно (1.5) и (1.2), наряду с (1.4), для отличных от нуля напряжений получим

$$\sigma_x^i = b_{11}^i\left[\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$$
$$\sigma_y^i = \frac{a_{12}}{a_{22}^i}\sigma_x^i \quad \tau_{xy}^i = b_{66}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] \tag{1.7}$$

Согласно определению при $z = 0$ σ_x^i, откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.8}$$

Теперь, окончательно для напряжений имеем (1.4) и

$$\sigma_x^i = -zb_{11}^i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + zb_{11}^i a_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$\sigma_y^i = \frac{a_{12}}{a_{22}^i}\sigma_x^i, \ \tau_{xy} = b_{66}\frac{\partial v}{\partial x} + z\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.9}$$

Эти напряжения вызывают внутренние усилия и моменты, которые запишутся следующим образом:

$$T_1 = K_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{5}{6}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$
$$T_2 = K_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{5}{6}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \tag{1.10}$$
$$S = b_{66}h\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{5}{12}\left(h_2^2 - h_1^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$N_1 = \frac{2}{3}h\varphi, \quad N_2 = \frac{2}{3}h\psi \tag{1.11}$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{4}{5}D_{11}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$M_2 = -D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{4}{5}D_{12}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{1.12}$$

$$H=-\frac{1}{2}b_{66}\left(h_2^2-h_1^2\right)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{4}{15}\left(h_2^3-h_1^3\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

где

$$K_{11}=\frac{1}{2}\left(b''_{11}h_2^2-b'_{11}h_1^2\right),\quad K_{12}=\frac{1}{2}\left(b''_{12}h_2^2-b'_{12}h_1^2\right)$$
$$D_{11}=\frac{1}{3}\left(b''_{11}h_2^3-b'_{11}h_1^3\right),\quad D_{11}=\frac{1}{3}\left(b''_{12}h_2^3-b'_{12}h_1^3\right)\tag{1.13}$$

Здесь мы имеем лишь жесткости взаимовлияния K_{ik} и жесткости изгиба D_{ik}. Отсутствие жесткостей ратяжения-сжатия C_{ik}, которые имеют вид [5]

$$C_{11}=b''_{11}h_2+b'_{11}h_1\quad,\quad C_{12}=b''_{12}h_2+b'_{12}h_1\tag{1.14}$$

обусловлено равенством (1.8).

Отметим, что в формулах (1.13) и (1.14) штрихами отмечены соответствующие "слои".

2. Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки ($Z=Z^{+}+Z^{-}$) имеют следующий вид [1-4]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial S}{\partial x}=0,\ \frac{\partial N_1}{\partial x}=-Z$$
$$\frac{\partial M_1}{\partial x}=N_1,\ \frac{\partial H}{\partial x}=N_2\tag{2.1}$$

Согласно первому уравнению равновесия (2.1) и первой формуле (1.10), полагая $K_{11}=0$, с учетом равенства $h_1+h_2=h$, для искомых толщин образованных "слоев" h_i имеем

$$h_1=\frac{\sqrt{b''_{11}}}{\sqrt{b''_{11}}+\sqrt{b'_{11}}}h\ ,\quad h_2=\frac{\sqrt{b'_{11}}}{\sqrt{b''_{11}}+\sqrt{b'_{11}}}h\tag{2.2}$$

Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (1.10)-(1.12) в оставленные уравнения (2.1), совместно с (1.8) получим следующую систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций $w(x),u(x),v(x),\varphi(x)\ ,\psi(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{2}{3}h\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-Z$$
$$b_{66}h\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{5}{12}\left(h_2^2-h_1^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$$
$$D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{4}{5}D_{11}a_{55}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{2}{3}h\varphi=0\tag{2.3}$$
$$\left(h_2^3+h_1^3\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{15}{8}b_{66}\left(h_2^2-h_1^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{5}{2}h\psi=0$$

В этих уравнениях разномодульность материала пластинки отражается в упругих постоянных a_{66} и b_{66}, в жесткости изгиба D_{11} и в геометрических параметрах h_i.

Из (2.3) после очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-k^2\psi=0\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{5}{12}\frac{h_2^2-h_1^2}{hb_{66}}k^2\psi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{3}{2h}Z\quad,\qquad \varphi=-\frac{3}{2h}\int Zdx-\frac{3}{2h}C_1 \tag{2.4}$$

$$D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{6}{5h}D_{11}a_{66}\frac{\partial Z}{dx}=\int Zdx+C_1\ ,\ u=C_9$$

где C_i — постоянные интегрирования

$$k^2=80h^2\left[32h\left(h_2^3+h_1^3\right)-25\left(h_2^2-h_1^2\right)^2\right]^{-1} \tag{2.5}$$

К уравнениям (2.3) и (2.4) должны быть присоединены граничные условия, которые ничем не отличаются от граничных условий уточненной теории пластин [4].

3. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поперечную, равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью $Z=q$. Пусть пластинка имеет ширину l и шарнирно оперта по своим длинным сторонам $x=l,\ x=0$. В этом случае изогнутая поверхность участка пластинки, достаточно удаленного от ее коротких сторон, будет близка к цилиндрической.

Граничные условия запишем следующим образом (возможны и иные варианты) [4]:

$$\text{при } x=0\quad w=0,\ \ u=0,\ \ v=0,\ \ M_1=0,\ \psi=0$$

$$\text{при } x=l\quad w=0,\ \ u=0,\ \ v=0,\ \ M_1=0,\ \psi=0 \tag{3.1}$$

Из (2.4) для искомых функций легко записать

$$u=c_9\ ,\ \ \psi=c_5e^{kx}+c_6e^{-kx}\ ,\ T_1=c_{10}\equiv 0$$

$$v=-\frac{5}{12}\frac{h_2^2-h_1^2}{hb_{66}}\left(c_5e^{kx}+c_6e^{-kx}\right)c_7x+c_8 \tag{3.2}$$

$$D_{11}w=q\frac{x^4}{2\varphi}+c_1\frac{x^3}{6}c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4\ ,\quad \varphi=-\frac{3q}{2h}x-\frac{3c_1}{2h}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), определим постоянные интегрирования.

Далее для искомых функций получим

$$u=0\ ,\quad v=0\ ,\quad \psi=0\ ,\ \ \varphi=\frac{3q}{2h}\left(\frac{l}{2}-h\right)$$

$$w=\frac{qx}{D_{11}}\left(\frac{x^3}{24}-\frac{x^2l}{12}+\frac{l^3}{24}\right)+\frac{3q}{5h}a_{66}x\left(l-x\right) \tag{3.3}$$

Имея значения искомых функций с помощью формул (1.4), (1.9)-(1.13) и (2.2), легко найти все расчетные величины задачи.

Формулы (3.3) внешне ничем не отличаются от соответствующих формул уточненной теории [4]. Однако D_{11} и a_{66} имеют иное содержание. В частности, подставляя в (1.13) значения h_i из (2.2), для жесткости изгиба D_{11} получим

$$D_{11} = \frac{b_{11}^{*} b_{11}'}{\left(\sqrt{b_{11}^{*}} + \sqrt{b_{11}'}\right)^2} \tag{3.4}$$

В частности, полагая $\nu^{+} = 0$, $\nu^{-} = 0$, $E^{-} = 2E$, $E^{+} = E$, $b_{66} = 0{,}5E$, получим

$h_1 = 0{,}4142h$, $h_2 = 0{,}5858h$, $D_{11} = 0{,}1144Eh^3$

$h_1 = h_2 = 0{,}5h$, $D_{11} = 0{,}1667Eh^3$

Если же полагать $\nu^{+} = \nu^{-} = 0$, $E^{+} = E^{-} = E$, $b_{66} = 0{,}5E$, то получим

$$h_1 = h_2 = 0{,}5h \;, \quad D_{11} = 0{,}0833Eh^3$$

Сравнивая эти результаты, заключаем, что неучет разномодульности может привести к ошибкам по h_i от 17% до 20%, а по жесткости D_{11} – от 27-46%.

Что же касается напряжений, то, естественно, значительное перемещение нейтрального слоя и непосредственное влияние модулей упругости существенно изменяют качественную и количественную картины напряженного состояния пластинки.

4. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поперечную и равномерно распределенную нагрузки с интенсивностью $Z = q$. Пластина имеет ширину l и заделана по своим длинным сторонам $x = 0, x = l$.

Рассмотрим два варианта заделки

а) при $x = 0, x = l$

$$w = 0\,,\ \nu = 0,\ u = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ \psi = 0 \tag{4.1}$$

б) при $x = 0$, $x = l$

$$w = 0\,,\ u = 0\,,\ \nu = 0\,,\ \left.\frac{\partial u_1'}{\partial x} = 0\right|_{z=0}\,,\ \psi = 0 \tag{4.2}$$

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (4.1), окончательно для искомых функций получим

$$u = 0,\ \nu = 0,\ \psi = 0,\ \varphi = \frac{3q}{2h}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$w = \frac{qx^2}{24D_{11}}(x-l)^2\;,\ w_{max} = \frac{ql^4}{384D_{11}} \tag{4.3}$$

Отметим, что здесь для u, v, ψ и φ получим тот же результат, что и в (3.3), а для нормального перемещения – классическую формулу с новой жесткостью изгиба D_{11}. Как известно, в этой задаче пластинка разделяется на отдельные зоны по координате x. Вблизи от краев растянутые зоны находятся в слоях, где $z < 0$, а в середине – в слоях, где $z > 0$. Однако, элементарной подстановкой h_i из (2.2) в D_{11} (1.13) легко показать, что жесткость изгиба по ширине пластинки (по координате x) остается неизменной.

Следует отметить также, что величины (длины) крайних (a) и центральной (в) зон пластинки, (которые определяются из условия $M_1 = 0$), в отличие от классической теории, существенно зависят от жесткости изгиба D_{11} (содержащей особенности разномодульности) и постоянной упругости b_{66}, характеризующего деформации сдвига.

В частности, имеем

$$a = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{144\,D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)}\right)$$
$$b = l\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{144\,D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)} \tag{4.4}$$

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (4.2), получим

$$u = 0\,,\ \ v = 0\,,\ \ \psi = 0,\ \ \varphi = \frac{3q}{2h}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$w = \frac{qx^2}{24D_{11}}(x-l)^2 + \frac{3a_{66}qx}{4h}(l-x)\,,\ \ w_{max} = \frac{ql^4}{384D_{11}}\left(1 + \frac{72D_{11}}{b_{66}hl^2}\right) \tag{4.5}$$

В этом случае имеем иную картину. Нормальное перемещение зависит также от деформаций поперечных сдвигов. При этом количественно изменяются также размеры зон по координате x. В частности, в этом случае имеем

$$a = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{324\,D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)}\right)$$
$$b = l\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{324\,D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)} \tag{4.6}$$

5. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поперечную равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью $Z = q$. Пластинка имеет ширину l и в отличие от предыдущих задач, по длинным сторонам $x = 0$, $x = l$ имеет различные типы закрепления. Считается, что при $x = 0$ пластинка шарнирно оперта, а при $x = l$ заделана, т.е. имеет следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad u = 0,\ v = 0\,,\ w = 0,\ \ M_1 = 0\,,\ \psi = 0$$

$$\text{при } x=l \quad u=0\,,\ v=0\,,\ w=0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0\,,\ \psi=0 \tag{5.1}$$

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (5.1), для искомых функций получим

$$u=0,\ v=0\ ,\ \psi=0$$
$$\varphi=\frac{3q}{2h}\left(\frac{3}{8}l-x\right)-\frac{27q}{10}\frac{a_{66}D_{11}}{h^2 l} \tag{5.2}$$
$$w=\frac{qx}{48D_{11}}\left(2x^3-3x^2l+l^3\right)+\frac{3q}{10}\frac{a_{66}x}{hl}(x-l)^2$$

Рассматривая (5.2), замечаем, что несимметричность граничных условий существенно изменяет влияние как разномодульности, так и учета поперечных сдвигов.

В этой задаче пластинка по ширине разделяется на две зоны. В первой зоне $0\le x\le c$ верхние слои пластинки сжаты, а нижние растянуты, а во второй зоне $c\le x\le l$ – наоборот. Однако, как и раньше, D_{11} остается постоянным. Приравнивая к нулю M_1 (для этой задачи см. (1.12) и (5.2)), для c получим

$$c=\frac{3}{4}l\left(1-\frac{24}{5}\frac{a_{66}D_{11}}{l^2h}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.:Наука, 1982. 317с.
2. Саркисян К.С. Устойчивость элементов конструкций из разномодульных материалов с учетом поперечных сдвигов. – Ереван. 1987. Кандидатская диссертация.
3. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван: Из-во РАУ, 2004. 187 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.10.2004