

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ  
ЗАРЯДОМ В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ СЛОЕ С ЧАСТИЧНО  
ЭЛЕКТРОДИРОВАННОЙ ТУННЕЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л.

Գ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի

Մասամբ էլեկտրողավորված բուռնեային անցքով պլեզոկերամիկ շերտում  
էլեկտրական լիցքի օպտիմալ կառավարումը

Դիտարկվում է պլեզոկերամիկ շերտում բուռնեային անցքի մակերևույթի վրա դասավորված ակտիվ էլեկտրոդների վրա գումարային էլեկտրական լիցքերի օպտիմալ կառավարման մասին խնդիրը: Որպես կառավարող ներգործողություններ դիտարկվում են շերտի հիմքերի տրված տեղամասերի վրա անընդհատ բաշխված և ժամանակի ընթացքում ներդաշնակ փոփոխվող սահեքի ճիգերը կամ էլեկտրական լիցքերը: Հակադարձ խնդրի լուծման համար օգտագործվում է էլեկտրոդառաձգականության համապատասխան ուղիղ հակահար եզրային խնդրի լուծումը, որի օգտագործմամբ օպտիմալացման ինդիքը հանգեցվում է մոնոտոնների  $I$ -պրոբլեմին: Բերվում են միեմալ էներգետիկ մախսերի դեպքում էլեկտրոդների վրա լիցքի կառավարումը բույլատրող ճիգերի և լիցքերի բաշխման տարրեր օպտիմալ ուժգնություններ:

D.I. Bardzokas, M.L. Filshbinskiy

Optimal Control by electrical charge in a piezoceramic  
layer with partly electroded tunnel cavity

Рассматривается задача об оптимальном управлении суммарными электрическими зарядами на активных электродах, расположенных на поверхности туннельной полости в пьезокерамическом слое. В качестве управляющих воздействий рассматриваются гармонически изменяющиеся во времени, непрерывно распределенные на заданных участках опорный слоя усилия или электрические заряды. Для решения обратной задачи используется решение соответствующей прямой антиплоской граничной задачи электроупругости, с использованием которого оптимизационная задача сводится к  $I$ -проблеме моментов. Приводятся различные оптимальные интенсивности распределения усилий и зарядов, позволяющие управлять зарядом на электродах при минимальных энергетических затратах.

## 1. Введение

Проблемы оптимального (в том или ином смысле) управления характеристиками прочности и разрушения кусочно-однородных тел, в которых физические поля различной природы связаны между собой, представляют собой новый класс задач, возникающих в современных технологиях. В пьезоэлектрических средах с неоднородностями взаимодействие механических и электрических полей может приводиться к электрическому, механическому или смешанному электромеханическому разрушению [1]. Точный анализ поведения параметров, регламентирующих разрушение пьезоэлемента, должен исходить из решения соответствующих статических или динамических граничных задач электроупругости.

Методы теории оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами рассмотрены, например, в [2-4]. Математические аспекты приложения проблемы моментов [5], и, в частности,  $I$ -проблемы моментов, разработанной в [6], к решению задач оптимального управления отражены в [4]. Некоторые вопросы, связанные с управлением разрушением тел с трещинами, а

также движениями упругих пластин, рассмотрены в [7, 8]. В зависимости от характера оптимальной задачи управление должно выбираться из некоторого функционального класса.

В данной статье подход к оптимальному (с точки зрения минимизации энергетических затрат) управлению характеристиками сопряженного поля иллюстрируется на примере модельной антиплоской стационарной динамической задачи электроупругости для пьезокерамического слоя с туннельной полостью. Колебания в слое возбуждаются двумя типами гармонической во времени нагрузки: разностью электрических потенциалов, подаваемых на пару бесконечно длинных электродов, симметрично расположенных на поверхности полости, и непрерывно распределенными на заданных участках оснований слоя усилиями сдвига или электрическими зарядами. Необходимо определить интенсивность распределения нагрузки вдоль участков, принимаемой в качестве функции управления в гильбертовом пространстве  $L^2$ , таким образом, чтобы суммарные электрические заряды на электродах достигали заданных значений. При этом требуется, чтобы норма функции управления в пространстве  $L^2$  была минимальной.

Для решения задачи управления сперва методами граничных интегральных уравнений [9] и функции Грина строится решение соответствующей прямой задачи для слоя с частично электродированной полостью при действии линейных источников типа усилий сдвига и зарядов. Далее оптимизационная задача сводится к  $l$ -проблеме моментов, решение которой проводится с привлечением простейших фактов из теории гильбертовых пространств. Получены оптимальные функции интенсивности распределения усилий и зарядов, позволяющие, например, разомкнуть электрическую цепь генератора напряжения при заданной частоте гармонического нагружения.

## 2. Формулировка оптимизационной задачи

Рассмотрим отнесенный к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  пьезокерамический слой  $(0 \leq x_1 \leq a, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty)$ , содержащий туннельное вдоль оси  $x_3$  отверстие, поперечное сечение которого ограничено гладким контуром  $C$ . Основания слоя свободны от напряжений и сопряжены с вакуумом везде, за исключением участков  $x_2 \in [b, d]$  ( $x_1 = 0, a$ ), на которых действуют гармонически изменяющиеся во времени, не зависящие от координаты  $x_3$ , усилия сдвига  $p(x_2, t) = \operatorname{Re}(P(x_2)e^{-i\omega t})$  или электрические заряды  $q(x_2, t) = \operatorname{Re}(Q(x_2)e^{-i\omega t})$  ( $t$  — время,  $\omega$  — круговая частота). На свободной от усилий поверхности отверстия симметрично располагаются два бесконечных в направлении оси  $x_3$  активных электрода с заданной разностью электрического потенциала  $2\phi^* = \operatorname{Re}(\Phi^*e^{-i\omega t})$ , причем неэлектродированные участки отверстия сопряжены с вакуумом (направление предварительной поляризации керамики параллельно оси  $x_3$ ). Предполагается, что поперечное сечение полости имеет горизонтальную и

вертикальную ось симметрии и она расположена симметрично по отношению к основаниям слоя (фиг.1).

Оптимизационная задача формулируется следующим образом: необходимо определить интенсивность распределения усилий сдвига  $P(x_2)$  или электрических зарядов  $Q(x_2)$ , принимаемых в качестве функций управления, вдоль участков  $x_2 \in [b, d]$  ( $x_1 = 0, a$ ) таким образом, чтобы суммарные электрические заряды на активных электродах достигали заданных значений. Кроме того, требуется, чтобы норма функции управления в пространстве  $L^2_{[b,d]}$  была минимальной. Иными словами, исследуется возможность управления электрическим током во внешней цепи генератора напряжения при минимальных энергетических затратах за счет граничной механической или электрической нагрузки.

Решение рассматриваемой обратной задачи будем проводить, опираясь на решение соответствующей прямой граничной задачи электроупругости.

### 3. Граничная задача электроупругости для слоя с частично электродированной туннельной полостью

Рассмотрим пьезокерамический слой с туннельной полостью, волновое электроупругое поле в котором возбуждается подаваемой на два бесконечных электрода разностью электрических потенциалов  $2\phi^*$ . Основания слоя и поверхность полости свободны от сил, внешней средой является вакуум. Условия на расположение электродов и полости, конфигурацию ее поперечного сечения, данные в разделе 2, остаются в силе и здесь.

Дополнительным фактором возбуждения гармонических колебаний в слое являются сосредоточенные на его основаниях вдоль линий  $x_2 = \eta_2$ ,  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ , гармонически изменяющиеся во времени, не зависящие от координаты  $x_3$  усилия сдвига  $P_k = \text{Re}(P_k^* \delta(x_2 - \eta_2) e^{-i\omega t})$  или электрические заряды  $Q_k = \text{Re}(Q_k^* \delta(x_2 - \eta_2) e^{-i\omega t})$  ( $k=1,2$ ). Здесь индекс  $k=1$  относится к границе  $x_1 = 0$ , индекс  $k=2$  - к  $x_1 = a$ ,  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака.

В данных условиях в кусочно-однородном слое имеет место электроупругое поле, соответствующее состоянию антиплоской деформации. Полная система уравнений в квазистатическом приближении включает следующие соотношения [10]:

уравнение движения

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

материальные уравнения среды

$$\begin{aligned} \sigma_{m3} &= c_{44}^e \partial_m u_3 - e_{33} E_m \\ D_m &= e_{15} \partial_m u_3 + \varepsilon_{11}^e E_m \quad (m=1,2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и уравнения электростатики

$$\begin{aligned} \text{div } D &= 0, \\ E &= -\text{grad} \phi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В (3.1)-(3.3)  $\sigma_{m3}$  – компоненты тензора напряжения,  $u_3$  – компонента вектора упругого перемещения в направлении оси  $x_3$ ;  $E$  и  $D$  – векторы напряженности и индукции электрического поля;  $\phi$  – электрический потенциал;  $c_{44}^E$ ,  $e_{15}$  и  $\varepsilon_{11}^e$  – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях, соответственно;  $\rho$  – массовая плотность материала.

Систему уравнений (3.1)-(3.3) сведем к дифференциальным уравнениям относительно перемещения  $u_3$  и электрического потенциала  $\phi$ :

$$\begin{aligned} c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^e \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \quad \nabla^2 F = 0 \\ \phi &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^e} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}^e}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $c$  – скорость волны сдвига в пьезокерамической среде,  $k_{15}$  – коэффициент электромеханической связи [10].

Механические и электрические величины при учете (3.2), (3.3) и (3.5) можно выразить через функции  $u_3$  и  $F$  по формулам

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right] \quad (3.6)$$

$$D_1 - iD_2 = -2 \varepsilon_{11}^e \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left( F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^e} u_3 \right), \quad z = x_1 + ix_2$$

Полагая  $u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t})$ ,  $\phi = \text{Re}(\phi e^{-i\omega t})$  и  $F = \text{Re}(F^* e^{-i\omega t})$ , запишем уравнения (3.5) относительно амплитудных величин:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 &= 0, \quad \nabla^2 F^* = 0 \\ \phi &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^e} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\gamma$  – волновое число. Механические и электрические граничные условия на поверхности полости при учете (3.5), (3.6) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right\} &= 0 \text{ на } C \\ \phi &= F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^e} u_3 = \phi^*(\zeta, t), \quad \zeta \in C_4 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$D_n = -\varepsilon_{11}^e \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \text{ на } C \setminus C_0$$

Здесь  $C_0$  — часть контура  $C$ , соответствующая электродированной поверхности полости; оператор  $\partial/\partial n$  обозначает производную по нормали к контуру  $C$ .

Механические и электрические граничные условия на основаниях слоя формально представимы в виде

$$\sigma_{13} = 0, \quad D_1 = 0 \quad (x_1 = 0, a) \quad (3.9)$$

Таким образом, краевая задача электроупругости сводится к определению функций  $U_3$  и  $F^*$  из дифференциальных уравнений Гельмгольца и Лапласа (3.7), граничных условий (3.8), (3.9), а также условий на бесконечности.

Для сведения поставленной задачи к системе граничных интегральных уравнений необходимо иметь корректные интегральные представления искомых функций в (3.7).

При этом условия (3.9) целесообразно выполнить автоматически, построив соответствующие функции Грина уравнений (3.7).

Волновое поле гармонического источника в однородном пьезокерамическом слое можно определить из системы уравнений типа (3.4), записанной относительно амплитуд перемещения и электрического потенциала [11]

$$\begin{aligned} c_{44}^E \nabla^2 U_3 + e_{15} \nabla^2 \phi_* + \rho \omega^2 U_3 &= -P^* \delta(x_1 - \eta_1, x_2 - \eta_2) \\ e_{15} \nabla^2 U_3 - \varepsilon_{11}^E \nabla^2 \phi_* &= Q^* \delta(x_1 - \eta_1, x_2 - \eta_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $P^*$  и  $Q^*$  — линейные плотности сосредоточенных сдвиговых усилий и зарядов, действующих во внутренней точке области  $\mu = \eta_1 + i\eta_2$ .

Для этого необходимо рассмотреть следующие граничные задачи, соответствующие равенствам (3.9), (3.10):

$$\nabla^2 G + \gamma^2 G = \frac{e_{15} Q^* - \varepsilon_{11}^E P^*}{c_{44}^E \varepsilon_{11}^E (1 + k_{13}^2)} \delta(x_1 - \eta_1, x_2 - \eta_2), \quad \partial_1 G = 0 \quad (x_1 = 0, a) \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 E = -\frac{Q^*}{\varepsilon_{11}^E} \delta(x_1 - \eta_1, x_2 - \eta_2), \quad \partial_1 E = 0 \quad (x_1 = 0, a) \quad (3.12)$$

$$\phi_* = E + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} G$$

Следуя [11], находим

$$\begin{aligned} G(\mu, z) &= \frac{e_{15} Q^* - \varepsilon_{11}^E P^*}{c_{44}^E \varepsilon_{11}^E (1 + k_{13}^2)} \left\{ -\frac{|x_2 - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\mu - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu + \bar{z})}{2a} \right| + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\pi(x_2 - \eta_2)} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (x_2 - \eta_2) \cos a_m \eta_1 \cos a_m x_1 \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$E(\mu, z) = -\frac{Q^*}{\varepsilon_{11}^*} \left\{ -\frac{|x_2 - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\mu - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu + \bar{z})}{2a} \right| \right\}$$

$$c_m(x_2 - \eta_2) = \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m |x_2 - \eta_2|} - \frac{1}{a_m} e^{-a_m |x_2 - \eta_2|} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$a_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_m = \begin{cases} \sqrt{a_m^2 - \gamma^2}, & \gamma < a_m \\ -i\sqrt{\gamma^2 - a_m^2}, & \gamma > a_m \end{cases}$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad \mu = \eta_1 + i\eta_2$$

Функции  $G(\mu, z)$  и  $E(\mu, z)$ , определенные формулами (3.13), представляют собой функции Грина граничных задач (3.11), (3.12) для пьезокерамического слоя. Условия излучения в задаче (3.11) и затухания в задаче (3.12) выполняются.

Если линейные источники расположены на основаниях слоя вдоль линий  $x_2 = \eta_2$ ,  $-\infty < x_2 < \infty$ ,  $x_1 = \eta_1^{(1)} = 0$  и  $x_1 = \eta_1^{(2)} = a$ , то, в силу принципа суперпозиции решений, формулы (3.13) обобщаются и записываются в виде

$$G^*(\eta_2, z) = \sum_{k=1}^2 \frac{c_k Q_k^* - \varepsilon_{11}^* F_k^*}{c_{kk}^* \varepsilon_{11}^* (1 + k_{15}^2)} \left\{ -\frac{|x_2 - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\mu_k - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_k + \bar{z})}{2a} \right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{2ia\gamma} e^{\gamma(x_1 - \eta_1)} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x_2 - \eta_2) \cos a_m \eta_1^{(k)} \cos a_m x_1 \right\} \quad (3.14)$$

$$E^*(\eta_2, z) = -\sum_{k=1}^2 \frac{Q_k^*}{\varepsilon_{11}^*} \left\{ -\frac{|x_2 - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\mu_k - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_k + \bar{z})}{2a} \right| \right\}$$

Здесь  $\eta_1^{(1)} = 0$ ,  $\eta_1^{(2)} = a$ ,  $\mu_1 = i\eta_2$ ,  $\mu_2 = a + i\eta_2$ .

Суммарное волновое поле в пьезокерамическом слое с полостью складывается из полей вызванных действием линейного источника и электрического напряжения на электродах, а также поля, рассеянного неоднородностью. Поэтому, с учетом построенных выше функций Грина интегральные представления решений уравнений (3.7) можно записать в виде

$$U_3(x_1, x_2) = \int_C v(\zeta) G(\zeta, z) ds + G^*(\eta_2, z) \quad (3.15)$$

$$F^*(x_1, x_2) = \int_C f(\zeta) \frac{\partial E(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} ds + E^*(\eta_2, z), \quad \zeta \in C$$

Здесь  $ds$  — элемент длины дуги контура  $C$ ; под функциями  $G(\zeta, z)$  и  $E(\zeta, z)$  понимаются выражения (3.13), в которых множители перед фигурными скобками приняты равными единице. Представления (3.15) автоматически удовлетворяют граничным условиям (3.9) на основаниях слоя, а также условиям излучения на бесконечности.

Подставляя предельные значения функций (3.15) и их производных при  $z \rightarrow \zeta_0 \in C$  в граничные условия (3.8), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$\begin{aligned} v(\zeta_0) + \int_C v(\zeta) g_1(\zeta, \zeta_0) ds + \int_C f'(\zeta) g_2(\zeta, \zeta_0) ds &= N_1(\zeta_0) \\ -\frac{1}{2} f(\zeta_0) + \int_C \{v(\zeta) g_3(\zeta, \zeta_0) + f(\zeta) g_4(\zeta, \zeta_0)\} ds &= N_2(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in C_+ \quad (3.16) \\ \int_C f'(\zeta) g_5(\zeta, \zeta_0) ds &= N_3(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in C \setminus C_+ \end{aligned}$$

в которой ядра  $g_m (m=1, 2, \dots, 5)$  и правые части определяются выражениями:

$$\begin{aligned} g_1(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{2a} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi_0} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 + \bar{\zeta})}{2a} \right] \right\} + P_1 e^{i\psi_0} + P_2 e^{-i\psi_0} \\ g_2(\zeta, \zeta_0) &= \frac{2e_{15}}{c_{44}^\varepsilon (1 + k_{15}^2)} g_5(\zeta, \zeta_0) \\ g_3(\zeta, \zeta_0) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^\varepsilon} \left\{ -\frac{|\xi_{20} - \xi_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{\zeta}_0)}{2a} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2ia\gamma} e^{n(\xi_{20} - \xi_2)} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\xi_{20} - \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m \xi_{10} \right\} \\ g_4(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{4a} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \bar{\zeta}_0)}{2a} \right] \right\} + \frac{\sin \psi}{2a} \operatorname{sign}(\xi_{20} - \xi_2) \\ g_5(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{4a} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} \right] \right\} \\ P_1 &= S - \frac{1}{a} (A_0 - iB_0), \quad P_2 = -S - \frac{1}{a} (A_0 + iB_0) \\ S &= \frac{1}{2ia} \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_{20}) (1 - e^{b(\xi_2 - \xi_{20})}) \\ A_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1k} \alpha_k \cos \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k \xi_{10} \\ B_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{0k} \operatorname{sign}(\xi_{20} - \xi_2) \cos \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k \xi_{10} \\ \beta_{mk} &= \frac{1}{\alpha_k^m} e^{-\alpha_k(\xi_2 - \xi_{20})} - \frac{1}{\lambda_k^m} e^{-\lambda_k(\xi_2 - \xi_{20})}, \quad f'(\zeta) = \frac{df}{ds} \\ c_m(\xi_{20} - \xi_2) &= \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m(\xi_{20} - \xi_2)} - \frac{1}{\alpha_m} e^{-\alpha_m|\xi_{20} - \xi_2|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1(\zeta_0) &= \sum_{k=1}^2 \frac{P_k^*}{ac_{44}^2 (1+k_{13}^2)} \left\{ \text{sign}(\xi_{20} - \eta_2) \sin \psi_0 \left( e^{\eta(\xi_{20} - \eta_2)} - 1 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \text{Re} \left[ e^{i\nu_k} \left( \text{ctg} \frac{\pi}{2a} (\bar{\mu}_k + \zeta_0) - \text{ctg} \frac{\pi}{2a} (\mu_k - \zeta_0) \right) \right] - 2(A_k \cos \psi_0 + B_k \sin \psi_0) \right\} - \\
&- \sum_{k=1}^2 \frac{k_{13}^2 Q_k^*}{ae_{13} (1+k_{13}^2)} \left[ \sin \psi_0 \text{sign}(\xi_{20} - \eta_2) e^{\eta(\xi_{20} - \eta_2)} - 2(A_k \cos \psi_0 + B_k \sin \psi_0) \right] \\
N_2(\zeta_0) &= \Phi^*(\zeta_0) + \sum_{k=1}^2 \frac{P_k^* k_{13}^2}{e_{13} (1+k_{13}^2)} \left\{ -\frac{|\xi_{20} - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\mu_k - \zeta_0)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_k + \bar{\zeta}_0)}{2a} \right| + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2ia\gamma} e^{\eta(\xi_{20} - \eta_2)} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\xi_{20} - \eta_2) \cos \alpha_m \eta_1^{(k)} \cos \alpha_m \xi_{10} \right\} + \\
&+ \sum_{k=1}^2 \frac{Q_k^*}{\varepsilon_{11}^c (1+k_{13}^2)} \left\{ -\frac{|\xi_{20} - \eta_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\mu_k - \zeta_0)}{2a} \sin \frac{\pi(\mu_k + \bar{\zeta}_0)}{2a} \right| - \right. \\
&- \left. k_{13}^2 \left[ \frac{1}{2ia\gamma} e^{\eta(\xi_{20} - \eta_2)} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\xi_{20} - \eta_2) \cos \alpha_m \eta_1^{(k)} \cos \alpha_m \xi_{10} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$N_3(\zeta_0) = \sum_{k=1}^2 \frac{Q_k^*}{4a \varepsilon_{11}^c} \left\{ 2 \text{sign}(\eta_2 - \xi_{20}) \sin \psi_0 + \right.$$

$$\left. + \text{Re} \left[ e^{i\nu_k} \left( \text{ctg} \frac{\pi}{2a} (\bar{\mu}_k + \zeta_0) - \text{ctg} \frac{\pi}{2a} (\mu_k - \zeta_0) \right) \right] \right\}$$

$$A_k = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_m}{\lambda_m} e^{-\lambda_m |\xi_{20} - \eta_2|} - e^{-\alpha_m (\xi_{20} - \eta_2)} \right] \cos \alpha_m \eta_1^{(k)} \sin \alpha_m \xi_{10}$$

$$B_k = \text{sign}(\eta_2 - \xi_{20}) \sum_{m=1}^{\infty} \left( e^{-\lambda_m |\xi_{20} - \eta_2|} - e^{-\alpha_m (\xi_{20} - \eta_2)} \right) \cos \alpha_m \eta_1^{(k)} \cos \alpha_m \xi_{10}$$

$$\psi = \psi(\zeta), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20}, \quad \zeta, \zeta_0 \in C$$

Здесь  $\Phi^*(\zeta_0)$  — кусочно-постоянная функция, определяющая значения электрического потенциала на электродах.  $\psi$  — угол между нормалью к контуру  $C$  и осью  $x_1$  в точке  $\zeta \in C$ . Ядра  $g_2(\zeta, \zeta_0)$ ,  $g_1(\zeta, \zeta_0)$  являются сингулярными (типа Гильберта), остальные ядра в силу предположения о гладкости контура  $C$  могут обладать не более чем слабой особенностью.

Следует отметить, что действие линейных источников на основаниях слоя должно вызывать появление электрических зарядов разных знаков на активных электродах. Поэтому в (3.16) следует принять  $P_1^* = -P_2^*$ ,  $Q_1^* = -Q_2^*$ . При нарушении этого требования система (3.16) становится неразрешимой.

Вычисляя функции  $v(\zeta)$  и  $f(\zeta)$  из системы (3.16), по формулам (3.6) с привлечением интегральных представлений [3.15] можно определить все компоненты электроупругого поля в слое.

Найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов  $q_j(\beta)$  на  $j$ -м электроде. Вводя параметризацию контура  $C$  с помощью равенства  $\zeta = \zeta(\beta)$  ( $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ) и учитывая то, что поверхность отверстия сопряжена с вакуумом, запишем

$$q_j(\beta) = D_n^{(j)}, \quad \beta_{2,j-1} < \beta < \beta_{2,j} \quad (j=1,2) \quad (3.17)$$

Здесь  $D_n^{(j)}(\beta)$  представляет собой амплитуду нормальной компоненты вектора электрической индукции на  $j$ -м электроде, величины  $\beta_j$  определяют расположение электродов.

В силу (3.6), (3.15), (3.17) находим

$$q_j(\beta_0) = q_j^*(\beta_0) + \sum_{i=1}^j Q_i R_i(\eta_2, \zeta_0) \quad (\zeta_0 \in C_0)$$

$$q_j^*(\beta_0) = -\frac{\gamma_{11}}{4a} \int_{C_0} f'(\zeta) \operatorname{Im} \left\{ e^{\nu_0 \zeta} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_2)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \zeta_0)}{2a} \right] \right\} ds$$

$$R_i(\eta_2, \zeta_0) = \frac{1}{2a} \operatorname{sign}(\eta_2 - \xi_{20}) \sin \psi_0 +$$

$$+ \frac{1}{4a} \operatorname{Re} \left[ e^{\nu_0 \zeta} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a} (\bar{\mu}_i + \zeta_0) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a} (\mu_i - \zeta_0) \right) \right]$$
(3.18)

где  $C_0$  — часть контура  $C$ , на которой расположен  $j$ -й электрод.

Интегрируя выражение (3.18) по переменной  $\beta_0$  в пределах от  $\beta_{2,j-1}$  до  $\beta_{2,j}$ , получим амплитудное значение суммарного заряда  $Q_j$   $j$ -го электрода, отнесенное к единице его длины. Ток, протекающий через данный электрод и равный току проводимости в цепи генератора, можно определить по формуле

$$I_j(t) = \operatorname{Re} \left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\beta_{2,j-1}}^{\beta_{2,j}} q_j(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \right\}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0} \quad (3.19)$$

#### 4. Обратная задача

Возвращаясь к поставленной в п. 2 задаче управления, запишем ее в формализованном виде. Амплитуда суммарного заряда  $j$ -го электрода с учетом (3.18) может быть представлена в форме

$$Q_j = Q_j^* + Q_j^{(\Lambda)} \quad (4.1)$$

$$Q_j^* = \int_{\beta_{2,j-1}}^{\beta_{2,j}} q_j^*(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \quad (\beta_{2,j-1} < \beta_0 < \beta_{2,j}, \quad j=1,2)$$

Здесь  $Q_j^{(\Lambda)}$  — дополнительный заряд, появляющийся вследствие действующих на заданных участках  $x_2 \in [b, d]$  оснований слоя усилий

сдвига  $p(x_2, t)$  или зарядов  $q(x_2, t)$ . Величину  $Q_j^{(\lambda)}$  можно определить по формуле

$$Q_j^{(\lambda)} = \int_{\beta_{2,j-1}}^{\beta_{2,j}} q_j^{(\lambda)}(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \quad (\beta_{2,j-1} < \beta_0 < \beta_{2,j}, \quad j=1,2) \quad (4.2)$$

$$q_j^{(\lambda)}(\beta_0) = \int_C \left\{ \int_b^a \Lambda(\eta_2) f_{(\lambda)}'(\eta_2, \zeta) d\eta_2 \right\} G(\zeta, \zeta_0) d\zeta + g \int_b^a Q(\eta_2) L(\eta_2, \zeta_0) d\eta_2$$

$$L(\eta_2, \zeta_0) = R_1(\eta_2, \zeta_0) - R_2(\eta_2, \zeta_0)$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\beta_{11}}{4a} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega t} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} \right] \right\}$$

где  $f_{(\lambda)}'(\eta_2, \zeta)$  — "стандартное" решение системы (3.16), соответствующее действию в точках  $x_2 = \eta_2$ ,  $x_1 = \eta_1^{(1)} = 0$  и  $x_1 = \eta_1^{(2)} = a$  линейных источников (силы или заряды) единичной интенсивности. Под функцией  $\Lambda(\eta_2)$  понимается либо интенсивность усилий  $P(\eta_2)$ , либо интенсивность зарядов  $Q(\eta_2)$ , интерпретируемых в качестве управления. Величина  $g = 0$ , если  $\Lambda(\eta_2) = P(\eta_2)$  и  $g = 1$  при  $\Lambda(\eta_2) = Q(\eta_2)$ .

Равенство (4.2) удобно записать в следующем виде:

$$Q_j^{(\lambda)} = \int_b^a \Lambda(\eta_2) m_j(\eta_2) d\eta_2 \quad (j=1,2) \quad (4.3)$$

$$m_j(\eta_2) = \int_{\beta_{2,j-1}}^{\beta_{2,j}} S_j^{(\lambda)}(\eta_2, \zeta_0) s'(\beta_0) d\beta_0$$

$$S_j^{(\lambda)}(\eta_2, \zeta_0) = -\frac{\beta_{11}}{4a} \int_C f_{(\lambda)}'(\eta_2, \zeta) \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega t} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} \right] \right\} d\zeta + gL(\eta_2, \zeta_0) \quad (\zeta_0 \in C_0)$$

Требую, чтобы суммарные заряды на электродах принимали заданные значения, с учетом (4.1), (4.3) приходим к соотношениям

$$Q_j = Q_j^0 + \int_b^a \Lambda(\eta_2) m_j(\eta_2) d\eta_2 = k_j, \quad (j=1,2) \quad (4.4)$$

где  $k_j$  — заданные комплексные числа.

Таким образом, обратная задача свелась к  $l$ -проблеме моментов необходимо определить функцию управления  $\Lambda(\eta_2)$  так, чтобы выполнялись моментные равенства

$$\int_b^a \Lambda(\eta_2) m_j(\eta_2) d\eta_2 = k_j - Q_j^0 \quad (j=1,2) \quad (4.5)$$

при соблюдении условия минимума нормы управления

$$\|\Lambda(\eta_2)\|_{L^2} = \sqrt{\int_a^d \Lambda(\eta_2)^2 d\eta_2} \rightarrow \min \quad (4.6)$$

Условие (4.6) регламентирует оптимальный с точки зрения минимальных "энергетических" затрат процесс управления.

Для решения поставленной задачи введем в  $L^2$  подпространство  $M$  с базисом  $\{\overline{m}_j(\eta_2)\}_{j=1}^2$ . Всякий элемент  $\Lambda \in L^2$  можно представить в виде

$$\Lambda(\eta_2) = \sum_{j=1}^2 \chi_j \overline{m}_j(\eta_2) + h^\perp \quad (4.7)$$

где  $h^\perp$  принадлежит ортогональному дополнению  $M$  до  $L^2$ . Константы  $\chi_j$  однозначно определяются из уравнений (4.5). Имеем

$$\sum_{j=1}^2 \chi_j (m_{1j}, \overline{m}_j) = k_l - Q_l^* \quad (l=1,2) \quad (4.8)$$

Определитель системы (4.8) (определитель Грама) отличен от нуля, поэтому она однозначно разрешима.

В силу равенства

$$\|\Lambda\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^2 \chi_j \overline{m}_j \right\|^2 + \|h^\perp\|^2$$

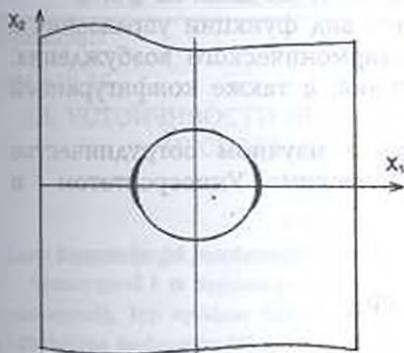
и произвольности элемента  $h^\perp$ , из условий (4.6) получаем  $h^\perp = 0$ .

Таким образом, экстремальный элемент  $\Lambda(\eta_2) = \sum_{j=1}^2 \chi_j \overline{m}_j(\eta_2)$ , где константы  $\chi_j$  определяются из системы (4.8).

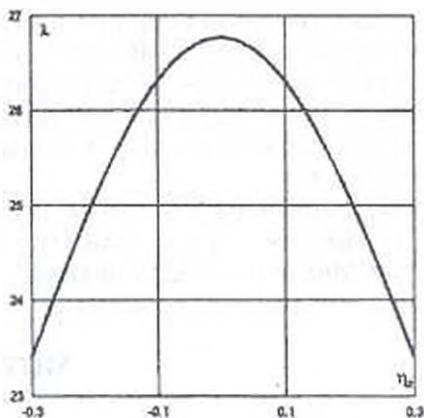
## 5. Численные результаты

В качестве примера рассмотрим слой из пьезокерамики PZT-4 [12] с круговой туннельной полостью. На пару электродов подается напряжение с разностью амплитуд потенциалов  $2\Phi^*$ . Требуется определить интенсивности распределения усилий сдвига  $P(\eta_2)$ , либо зарядов  $Q(\eta_2)$  из условий типа (4.5) при ограничении (4.6). Система интегродифференциальных уравнений (3.16) была реализована численно по схеме метода квадратур [11].

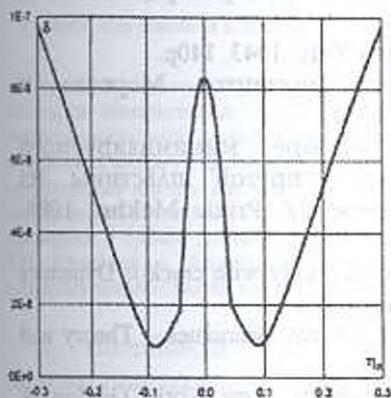
Фиг.2 иллюстрирует изменение модуля функции оптимального управления  $\lambda = |P(\eta_2)/\Phi^*|$  для значений параметров  $R/a = 0.1$ ,  $b/a = -0.3$ ,  $d/a = 0.3$ ,  $\gamma a = 3$ ,  $k_l = 0$  ( $l=1,2$ ) (внешняя цепь генератора напряжения "размыкается"). График величины  $\delta = |Q(\eta_2)/\Phi^*|$  для тех же значений параметров представлен на фиг.3.



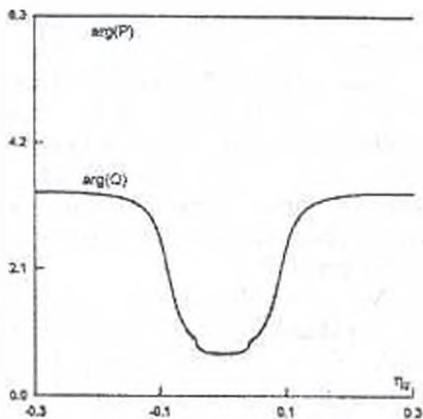
Фиг.1 Слой с частично электролированной полостью



Фиг.2. Изменение модуля амплитуды функции оптимального управления  $\lambda = |P(\eta_2)/\Phi^*|$ , размыкающего цепь генератора напряжения.

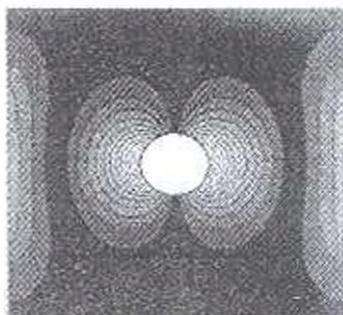


Фиг. 3. Изменение модуля амплитуды функции оптимального управления  $\delta = |Q(\eta_2)/\Phi^*|$ , размыкающей цепь генератора напряжения.



Фиг. 4. Изменение аргументов амплитуд оптимальных усилий сдвига и зарядов на заданных участках нагружения.

Фиг. 5. Линии уровня модуля амплитуды перемещения в кусочно-однородном слое при действии оптимальных усилий сдвига  $P(\eta_2)$ .



Аргументы функций оптимального управления показаны на фиг. 4. Линии уровня модуля амплитуды перемещения в слое с отверстием при действии оптимальных усилий сдвига для этого случая даны на фиг.5.

Численное исследование показывает, что вид функции управления в значительной мере определяется частотой гармонического возбуждения, длиной и расположением участков нагружения, а также конфигурацией неоднородности.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Афинским Национальным Техническим Университетом и Институтом Механики НАН Армении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bardzokas D, Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges. - *Strength of Materials*, 1994, No.7, pp.510-513 [in Russian].
2. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1967.
3. Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. - М.: Наука, 1968. 475с.
4. Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. - М.: Наука, 1975. 568с.
5. Shohat J., Tamarkin J, *The Problem of Moments*, New York, 1943, 140р.
6. Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*. - М.: Наука, 1973. 551с.
7. Filshinsky V.A., Filshinsky M.L. О выборе минимизируемого функционала при оптимальном переводе упругой пластины из начального состояния в заданное конечное // *Prikl. Mekhs.* 1986. Vol.22. No2, pp.90-94.
8. Filshinsky M.L. Control on fracture of a piezoceramic body with crack // *Dynamics and Strength of Machines*. Kharkov, 1987, Vol.15, pp.93-96.
9. Brebbia C.A., Telles, J.C.F., Wrobel L. *Boundary element techniques - Theory and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
10. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Electromagnetoelasticity*. New York: Gordon & Breach, 1988.
11. Bardzokas D., Filshinsky M.L. *Electroelasticity of piecewise-uniform bodies*. - Sumy (Ukraine): University Book Publ., 2000. -308p. [in Russian].
12. Berlincourt D.A., Curran D.R., & Jaffe H., In: *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers*. Physical Acoustics. Vol.1A, Mir, Moscow, 1966.

Афинский национальный технический университет, Греция  
Сумский государственный университет, Украина.

Поступила в редакцию  
31.05.2004