

УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД
ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ
НАГРУЗКИ

Исраелян С. Р., Саркисян С. В.

Ս.Ր. Իսրայելյան, Ս.Վ. Սարգսյան

Տեղայնացված լայնական բեռի ազդեցության տակ ճանաչվող կիսաանվերջ սալի
տատանումների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է կիսաանվերջ սալ շերտի տատանումները եզրի մոտ տեղայնացված լայնական բեռի ազդեցության տակ Հետազոտված է ճկվածքի վարքը՝ կախված լայնական բեռի հաճախությունից: $X = 0$, եզրը ազատ լինելու դեպքում բերված է ճկվածքի վարքը տեղանկարային հաճախության շրջակայքում:

S.R. Israyelyan, S.V. Sarkisyan

About vibrations of semi-infinite plate under the action of localized transverse load

Задача об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки исследована в работе [1]. В [2] рассмотрен изгиб полубесконечной пластинки, когда поперечная нагрузка локализована у короткого края пластинки. Задачи локализованной неустойчивости сжатой пластинки исследованы в [3, 4].

В настоящей работе исследуются колебания полубесконечной пластинки-полосы, когда на поверхности пластинки действует локализованная у короткого края пластинки поперечная нагрузка. Исследовано поведение прогиба пластинки в зависимости от частоты поперечной нагрузки. В случае, когда кромка пластинки $X = 0$ свободна, приведено поведение прогиба в окрестности резонансной частоты.

Пусть полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат занимает область пространства: $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью xoy . На поверхности пластинки $z = -h$ действует локализованная у короткого края пластинки поперечная нагрузка в виде

$$q(x, y, t) = e^{-\alpha x} \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \lambda_n y \quad (1)$$

Здесь $q_n = \text{const}$, $\alpha > 0$, $\lambda_n = n\pi/b$, ω – частота поперечной нагрузки.

Согласно теории тонких пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа без учета инерции вращения, уравнение поперечных колебаний пластинки под действием силы $q(x, y, t)$ имеет вид [5, 6]

$$D \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t); \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (2)$$

где $w(x, y, t)$ – прогиб пластинки, D , E , ν и ρ – жесткость, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластинки, Δ – двумерный оператор Лапласа.

Принимается, что стороны пластинки $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены и имеет место условие затухания

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x, y, t) = 0 \quad (3)$$

Представим решение уравнения (2) в виде

$$w(x, y, t) = \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y \quad (4)$$

которое удовлетворяет условиям шарнирного закрепления. Подставляя решение (4) в уравнение (2), с учетом (1), для определения неизвестной функции $f_n(x)$ будем иметь

$$f_n^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 f_n''(x) + \lambda_n^4 (1 - \theta_n^2) f_n(x) = \frac{q_n}{D} e^{-\alpha x} \quad (5)$$

где $\theta_n = \frac{\omega}{\omega_n}$, $\omega_n^2 = \frac{D\lambda_n^4}{2\rho h}$

Рассмотрим частный случай ($n=1$), поперечная нагрузка имеет следующий вид:

$$q(x, y, t) = q_1 e^{-\alpha x} \sin \lambda_1 y \cos \omega t$$

Общее решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям шарнирного закрепления при $y=0, b$ и условию затухания (3), представляется следующим образом:

$$w(x, y, t) = \left(C_1 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1-\theta_1^2}} + C_2 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1+\theta_1^2}} + \frac{q_1 e^{-\alpha x}}{D(\alpha^4 - 2\lambda_1^2 \alpha^2 + \lambda_1^4 (1 - \theta_1^2))} \right) \times \sin \lambda_1 y \cos \omega t \quad (6)$$

Здесь α не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного дифференциального уравнения (5). Если же α является корнем характеристического уравнения, то общее решение уравнения (2) будет

$$w(x, y, t) = \left(C_1 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1-\theta_1^2}} + C_2 e^{-\lambda_1 x \sqrt{1+\theta_1^2}} - \frac{q_1 x e^{-\alpha x}}{4\alpha D(\alpha^2 - \lambda_1^2)} \right) \sin \lambda_1 y \cos \omega t \quad (7)$$

Отметим, что для выполнения условия затухания (3) необходимо, чтобы $0 < \theta_1 = \frac{\omega}{\omega_1} < 1$. Здесь ω_1 — первая собственная частота шарнирно закрепленной пластинки-полосы (колебания по форме цилиндрической поверхности). C_1, C_2 — произвольные постоянные, которые должны определяться из граничных условий на краю пластинки $x=0$.

В качестве граничных условий на кромке пластинки $x=0$ примем:

а) свободный край

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (8)$$

б) скользящий контакт

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (9)$$

Удовлетворяя решение (6) либо (7) граничным условиям (8) и (9), для прогиба полубесконечной пластинки-полосы будем иметь:

$$a) \quad w(\xi, y, t) = \frac{q_1}{D\lambda_1^4} F_c(\xi, k, \theta_1) \sin \lambda_1 y \cos \omega t,$$

$$F_c(\xi, k, \theta_1) = \frac{1}{(k^2 - 1 - \theta_1)(k^2 - 1 + \theta_1)} \left[e^{-k\xi} + \frac{k(k^2 - 2 + \nu)(1 - \nu - \theta_1) + \sqrt{1 - \theta_1}(k^2 - \nu)(1 - \nu + \theta_1)}{(1 - \nu - \theta_1)^2 \sqrt{1 + \theta_1} - (1 - \nu + \theta_1)^2 \sqrt{1 - \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 + \theta_1}} - \frac{k(k^2 - 2 + \nu)(1 - \nu + \theta_1) + \sqrt{1 + \theta_1}(k^2 - \nu)(1 - \nu - \theta_1)}{(1 - \nu - \theta_1)^2 \sqrt{1 + \theta_1} - (1 - \nu + \theta_1)^2 \sqrt{1 - \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 - \theta_1}} \right] \quad (10)$$

$$F_c(\xi, k, \theta_1) = \frac{1}{4k(k^2 - 1)} \left[-\xi e^{-k\xi} + \frac{(3k^2 - 2 + \nu)(1 - \nu - \theta_1) + 2k(1 - \nu + \theta_1)\sqrt{1 - \theta_1}}{(1 - \nu - \theta_1)^2 \sqrt{1 + \theta_1} - (1 - \nu + \theta_1)^2 \sqrt{1 - \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 + \theta_1}} - \frac{(3k^2 - 2 + \nu)(1 - \nu + \theta_1) + 2k(1 - \nu - \theta_1)\sqrt{1 + \theta_1}}{(1 - \nu - \theta_1)^2 \sqrt{1 + \theta_1} - (1 - \nu + \theta_1)^2 \sqrt{1 - \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 - \theta_1}} \right] \quad (11)$$

$$b) \quad w(\xi, y, t) = \frac{q_1}{D\lambda_1^4} F_\alpha(\xi, k, \theta_1) \sin \lambda_1 y \cos \omega t,$$

$$F_\alpha(\xi, k, \theta_1) = \frac{1}{(k^2 - 1 - \theta_1)(k^2 - 1 + \theta_1)} \left[e^{-k\xi} - \frac{k(k^2 - 1 + \theta_1)}{2\theta_1 \sqrt{1 + \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 + \theta_1}} + \frac{k(k^2 - 1 - \theta_1)}{2\theta_1 \sqrt{1 - \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 - \theta_1}} \right] \quad (12)$$

$$F_\alpha(\xi, k, \theta_1) = \frac{1}{8k(k^2 - 1)} \left[-2\xi e^{-k\xi} + \frac{1 - \theta_1 - 3k^2}{\theta_1 \sqrt{1 + \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 + \theta_1}} + \frac{3k^2 - 1 - \theta_1}{\theta_1 \sqrt{1 - \theta_1}} e^{-\xi \sqrt{1 - \theta_1}} \right] \quad (13)$$

где $k = \frac{\alpha}{\lambda_1} > 0$, $\xi = \lambda_1 x$.

Исследуем поведение прогиба полубесконечной пластинки-полосы при $x = 0$ в зависимости от частоты поперечной нагрузки.

В случае, когда на кромке $x = 0$ выполняется условие скользящего контакта, из (12) следует

$$F_{ck}(0, k, \theta_1) = \frac{1}{(k^2 - 1 - \theta_1)(k^2 - 1 + \theta_1)} \left(1 - \frac{k}{2\theta_1} \left(\frac{k^2 - 1 + \theta_1}{\sqrt{1 + \theta_1}} - \frac{k^2 - 1 - \theta_1}{\sqrt{1 - \theta_1}} \right) \right) \quad (14)$$

При частотах

$$\theta_1 = \begin{cases} k^2 - 1, & k \in (1; \sqrt{2}) \\ 1 - k^2, & k \in (0; 1) \end{cases}$$

которые удовлетворяют условию $0 < \theta_1 < 1$, знаменатель выражения (14) обращается в нуль. При этом выражение (14) становится неопределенностью вида $0/0$. Раскрывая данную неопределенность, замечаем, что при этих частотах прогиб полубесконечной пластинки-полосы остается конечным.

Рассмотрим случай, когда кромка пластинки $x = 0$ свободна. Из (10) получаем

$$F_c(0, k, \theta_1) = \frac{(k^2 - 1 + \theta_1)(1 - \nu - \theta_1)\sqrt{1 + \theta_1} - (k^2 - 1 - \theta_1)(1 - \nu + \theta_1)\sqrt{1 - \theta_1} + 2k\theta_1(k^2 - 2 + \nu)}{(k^2 - 1 - \theta_1)(k^2 - 1 + \theta_1)(\sqrt{1 - \theta_1} - \sqrt{1 + \theta_1})(\nu^2 - 2(1 - \nu)\sqrt{1 - \theta_1^2} - (1 - \theta_1^2))} \quad (15)$$

Нули знаменателя (15), удовлетворяющие условию затухания $0 < \theta_1 < 1$ [1], следующие:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= k^2 - 1 & (k \in (1; \sqrt{2})) \\ \theta_1 &= 1 - k^2 & (k \in (0; 1)) \end{aligned} \quad (16)$$

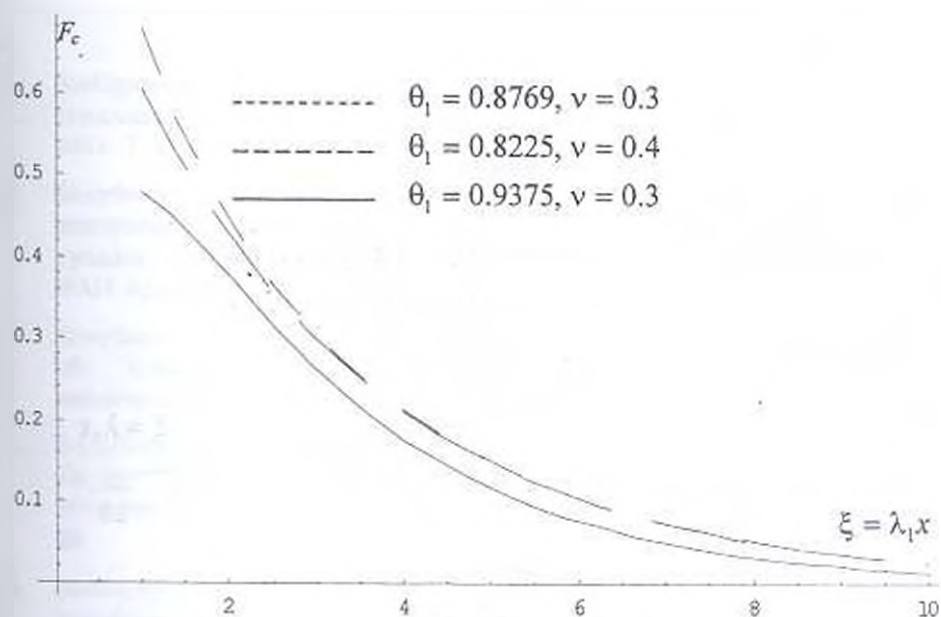
$$\theta_1 = \theta_v = \sqrt{4\nu - 1 - 3\nu^2 + 2\sqrt{2\nu^4 - 6\nu^3 + 7\nu^2 - 4\nu + 1}}$$

При $\theta_1 = k^2 - 1$ или $\theta_1 = 1 - k^2$ выражение (15) является неопределенностью вида $0/0$. После раскрытия неопределенности тем не менее прогиб полубесконечной пластинки-полосы в данном случае остается конечным. Частота поперечной нагрузки (1) $\omega = \omega_1 \theta_v$ является резонансной частотой [1].

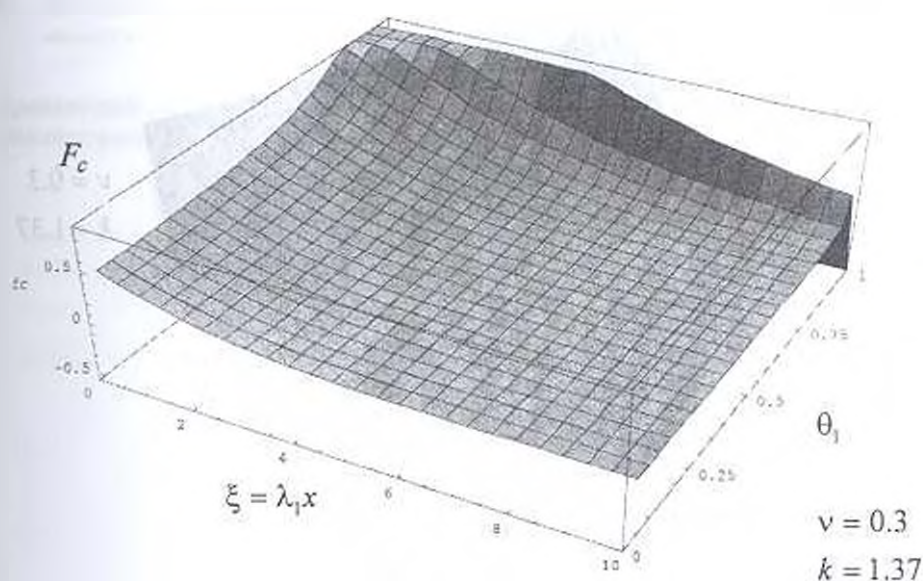
В случае, когда поперечная нагрузка (1) имеет вид $q(x, y, t) = q_1 e^{-\lambda_1 y} \sin \lambda_1 y \cos \omega t$, что соответствует случаю $k = 1$, из (14) и (15) следует: если кромка $x = 0$ пластинки-полосы удовлетворяет условию скользящего контакта (9), то прогиб пластинки остается конечным при любых значениях ω , удовлетворяющих условию затухания; если кромка $x = 0$ пластинки удовлетворяет условию свободного края (8), то прогиб пластинки остается конечным при любых значениях ω , за исключением $\omega = \omega_1 \theta_v$.

На основе формул (10) и (12) проведены численные исследования поведения функций $F_{ck}(x, k, \theta_1)$ и $F_c(x, k, \theta_1)$, характеризующие прогиб полубесконечной пластинки-полосы, при разных значениях частоты поперечной нагрузки $\theta_1 = \omega/\omega_1$ и коэффициента Пуассона.

Результаты численных исследований приведены на фиг. 1-4.

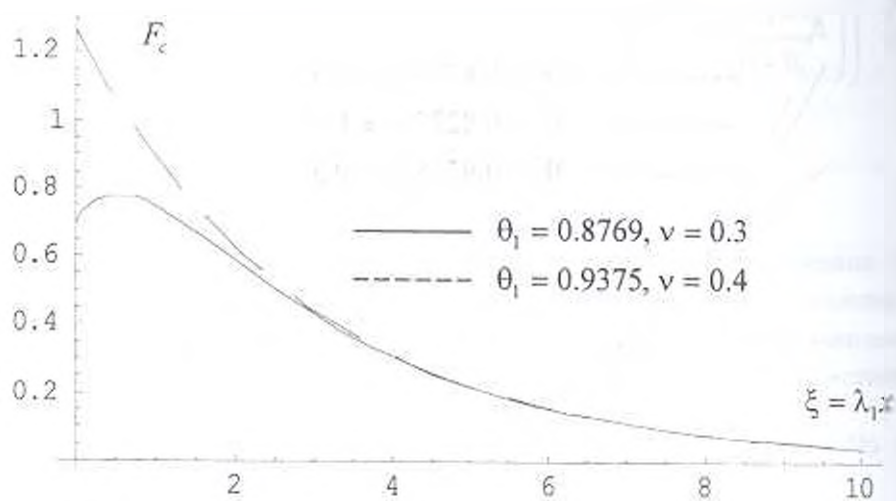


Фиг. 1

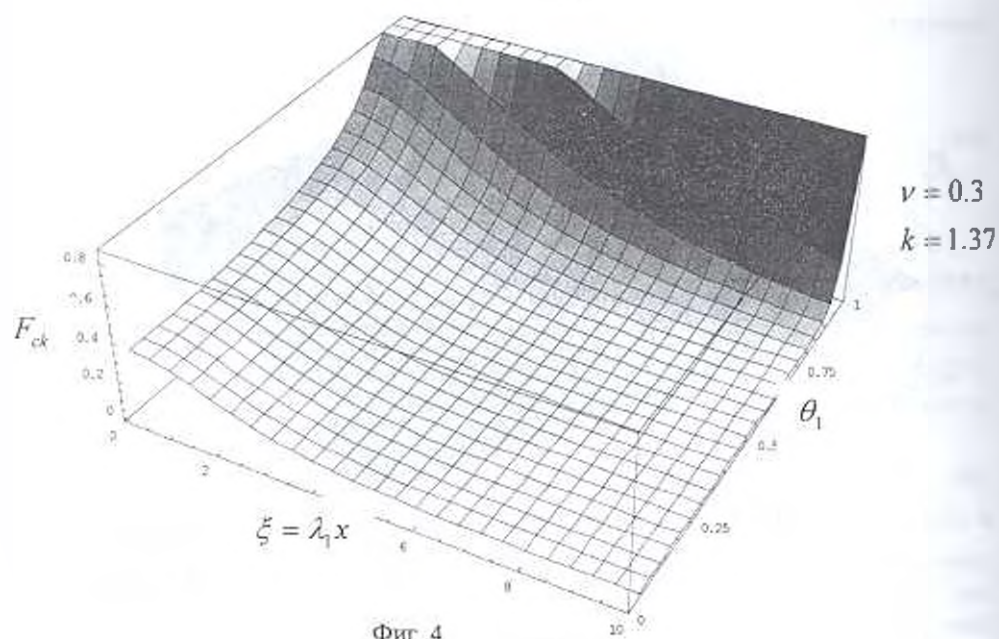


Фиг. 2

На фиг. 2 приведено трехмерное поведение прогиба полубесконечной пластинки-полосы в окрестности резонансной частоты $\omega = \omega_1 \theta_v$, когда кромка пластинки $x = 0$ свободна.



Фиг. 3



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. // ПМ. НАН Украины. 1994. Т.30. №2. С.61-68
2. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. / В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел" (Посвящ. 80-летию С. А. Амбарцумяна) Ереван, Изд. НАН Армении, 2002, с.67-88.
3. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. / В сб.: "Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем". Ереван: ЕГУ, 1997. С.95-99.
4. Белубекян В.М. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки. / В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел" (Посвящ. 80-летию С. А. Амбарцумяна) Ереван: Изд. НАН Армении, 2002. С.61-66.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, 1987. 360с.
6. Васильев В.В. Классическая теория пластин история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.46-58.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
15.07.2004