ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №3, 2004 Механика

УДК 531.8

О КЛАССИЧЕСКОЙ И УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИЯХ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Геворкян Г.З., Гнуни В.Ц., Киракосян Р.М.

Գ.Զ. Գևորգյան, Վ. Ց. Գնունի, Ռ.Մ. Կիրակոսյան
Օրթոտրոպ սալերի ստատիկ կայունության խնդիրներում դասական և ճշգրտված տեսությունների մասին

Բազմաթիվ ուսումնասիրություններ կան նվիրված անիզոտրոպ սալերի կայունության հարցերին, որտեղ հաշվի են առնված ընդլայնական սահքերի, ինչպես նաև սեփական չափերի փոփոխության ազդեցությունները ([1]-[6] և այլն)։ Այս աշխատանքում [1] ճշգրտված տեսության շրջանակներում բերվում են հաստատուն հաստության օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալերի ստատիկ կայունության խնդրի հավասարումները ընդլայնական սահքերի, սալի չափերի փոփոխության և նորմալ σ_z լարման ազդեցությունների հաշվառումով։ Որպես մասնավոր դեպք լուծվում է եզրերով հոդակապորեն հենված սալ-շերտի խնդիրը։ Դիտարկվում է չորս տարբերակ, որոնցից երեքում հաշվի է առնվում վերը նշված գործոններից յուրաքանչյուրի ազդեցությունը առանձին, իսկ չորրորդ տարբերակում՝ բոլորի ազդեցությունները միասին։ Ցույց է տրվում, որ իզոտրոպ սալ-շերտի դեպքում ընդլայնական սահքի, չափերի փոփոխության և σ_z լարման ազդեցությունները իրար համակշռում են և սեղմող ուժերի կրիտիկական արժեքները գործնականում համընկնում են դասական տեսության համապատասխան արժեքների հետ։ Հետևաբար իզոտրոպ սալերի համար իմաստ չունի կիրառել ճշգրտված տեսություն և կարելի է բավարարվել դասական տեսությամբ։ Մինչդեռ օրթոտրոպ սալերի համար այս եզրակացությունը ընդհանուր առմամբ ճիշտ չէ։ Զգալի անիզոտրոպության դեպքում պետք է դիմել ճշգրտված տեսության, ընդ որում, սահքի և σ_z լարման ազդեցությունները հաշվի առնելիս չի կարելի արհամարհել սկզբնական չափերի փոփոխության ազդեցությունը

G.Z. Gevorgyan, V. Ts. Gnuni, R.M. Kirakosyan
On the Classical and Refined Theory in the Statical Stability Problem of Orthotropic Plates

Многие исследования посвящены вопросам устойчивости анизотропных пластин, где учитываются влияния поперечных сдвигов, а также изменения размеров ([1] - [6] и т.д.). В настоящей работе в рамках уточненной теории [1] приводятся уравнения задачи статической устойчивости ортотропных пластин постоянной толщины при учете влияний поперечных сдвигов, изменения размеров и нормального напряжения σ_z. В качестве примера решается задача шарнирно опертой по краям пластинки-полосы. Рассматриваются четыре варианта. В трех из них учитываются влияния отмеченных факторов в отдельности. В четвертом варианте учитываются влияния всех факторов вместе. Показывается, что в случае изотропной полосы факторы поперечного сдвига, изменения размеров и напряжения σ_z с большой точностью компенсируют друг друга и критические значения сжимающих сил практически совпадают с соответствующими значениями классической теории. В случае ортотропных пластин со значительной анизотропией это утверждение неверно. Тогда необходимо обратиться к уточненной теории. Однако, при учете влияния поперечного сдвига и напряжения σ_z в обязательном порядке надо учитывать и влияние изменения размеров.

1. Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластинку со сторонами a_0, b_0 и постоянной толщины h_0. Пластинку отнесем к декартовой системе координат $Oxyz$. Координатную плоскость Oxy совместим со

срединной плоскостью, направив оси Ox и Oy вдоль сторон пластинки, а ось Oz так, чтобы образовалась правая система координат. Будем считать, что главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям. Пусть на пластинку статически прикладываются сжимающие силы и в ней возникает безмоментное напряженно-деформированное состояние с однородными внутренними тангенциальными усилиями

$$T_x^0 = -P, \quad T_y^0 = -\lambda P, \quad S_{xy}^0 = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda = T_y^0 / T_x^0$ – отношение сжимающих усилий.

Из обобщенного закона Гука ортотропного тела [1] имеем:

$$e_x = -\frac{P}{E_1 h_0} + \frac{\nu_{12}}{E_2}\frac{\lambda P}{h_0}, \quad e_y = -\frac{\lambda P}{E_2 h_0} + \frac{\nu_{12}}{E_2}\frac{P}{h_0}, \quad e_z = \frac{\nu_{13} P}{E_3 h_0} + \frac{\nu_{23}}{E_3}\frac{\lambda P}{h_0} \tag{1.2}$$

Здесь e_x, e_y, e_z и E_1, E_2, E_3 – компоненты деформации и модули Юнга материала вдоль координатных осей, ν_{12}, ν_{13}, ν_{23} – коэффициенты Пуассона.

В результате деформирования размеры пластинки изменятся и в момент наступления потери устойчивости примут значения a, b и h. Пользуясь (1.2) и геометрическими соотношениями, находим:

$$a = a_0\left(1 - \frac{P}{E_1 h_0} + \frac{\nu_{12}\lambda P}{E_2 h_0}\right), \quad b = b_0\left(1 - \frac{\lambda P}{E_2 h_0} + \frac{\nu_{12} P}{E_2 h_0}\right) \tag{1.3}$$

$$h = h_0\left(1 + \frac{\nu_{13} P}{E_3 h_0} + \frac{\nu_{23}\lambda P}{E_3 h_0}\right) \tag{1.4}$$

Поступая, как обычно, из системы уравнений изгиба пластинки [1] можно получить следующую систему уравнений статической утойчивости, учитывающую влияния поперечных сдвигов, изменения размеров и напряжения σ_z:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{12P}{h^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\begin{gathered}
D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10}\left[a_{55}\left(D_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \right. \\
\left. + a_{44}\left(D_{12} + D_{66}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}\right] + \frac{h^3\varphi}{12} = \frac{A_1 h^2 P}{10}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \\
D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10}\left[a_{44}\left(D_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \right. \\
\left. + a_{55}\left(D_{12} + D_{66}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\right] + \frac{h^3\psi}{12} = \frac{A_2 h^2 P}{10}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \lambda\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь w – прогиб, D_{ij} – жесткости пластинки, A_1, A_2 – коэффициенты, учитывающие влияние напряжения σ_z; φ и ψ — функции, характеризующие распределение поперечных сдвигов.

К системе (1.5) следует присоединить известные граничные условия [1], записанные для измененных краев пластинки $x = 0, a$ и $y = 0, b$. Отметим, что значения a и b соответствуют моменту наступления потери устойчивости пластинки и являются функциями от неизвестного критического значения параметра сжимающих сил P.

2. В качестве примера рассмотрим задачу статической устойчивости шарнирно-опертой по краям $x = 0, a$ ортотропной пластинки-полосы. Полоса сжимается равномерно распределенными силами погонной интенсивности P, приложенными на шарнирно-опертых сторонах. По длине полоса свободна и может беспрепятственно перемещаться вдоль оси Oy, в силу чего усилие T_y отсутствует. Пользуясь формулами (1.3) и (1.4), находим:

$$a = a_0\left(1 - \frac{P}{E_1 h_0}\right), \quad h = h_0\left(1 + \frac{\nu_{13} P}{E_3 h_0}\right) \tag{2.1}$$

где a_0 и h_0 — начальные значения ширины и толщины.

Интегрируя первое и второе уравнения системы (1.5) по x и имея в виду условия шарнирного опирания пластинки, приходим к одному уравнению. Пользуясь выражением коэффициента A_1 [1], это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60 E_3 G_{13} P}{B_{11} h^2 \{5 E_3 G_{13} h + 6P[(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})G_{13} - E_3]\}} w = 0 \tag{2.2}$$

Здесь G_{13} — модуль поперечного сдвига, а B_{11} выражается через упругие постоянные материала по известной формуле [1].

Отметим, что уравнение (2.2) относится к общему случаю, при котором одновременно учитываются влияния всех факторов: поперечного сдвига, изменения размеров полосы и напряжения σ_z. Краевые условия задачи в этом случае имеют вид:

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=a} = 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Влияния всех перечисленных факторов пренебрегаются (классическая постановка). Разрешающее уравнение (2.2) и краевые условия в этом случае имеют вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{12P}{B_{11} h_0^3} w = 0 \tag{2.4}$$

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=a_0} = 0 \tag{2.5}$$

б) Учитывается только влияние поперечного сдвига. Краевые условия совпадают с (2.5), а разрешающее уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60 G_{13} P}{B_{11} h_0^2 (5 G_{13} h_0 - 6P)} w = 0 \tag{2.6}$$

в) Учитывается только влияние напряжения σ_z. Краевые условия совпадают с (2.5). Разрешающее уравнение будет:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{60E_3P}{B_{11}h_0^2[5E_3h_0+6P(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})]}w=0 \qquad (2.7)$$

г) Учитывается только влияние изменения размеров полосы. Краевые условия совпадают с (2.3), а разрешающее уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{12P}{B_{11}h^3}w=0 \qquad (2.8)$$

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными величинами:

$$\overline{x}=x/a_0,\ \overline{w}=w/h_0,\ n_1=E_1/\sigma_0,\ n_3=E_3/\sigma_0,\ n_{11}=B_{11}/\sigma_0$$

$$n_{13}=G_{13}/\sigma_0,\ \varepsilon=a_0/h_0,\ \overline{P}=P/(\sigma_0h_0) \qquad (2.9)$$

σ_0 – характерное напряжение, играющее роль масштаба.

Отметим, что разрешающее уравнение всех случаев с учетом (2.9) можно записать в единой безразмерной форме:

$$\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}+k^2\overline{w}=0 \qquad (2.10)$$

где k^2 для различных случаев имеет различные выражения. Подчинив общее решение уравнения (2.10) краевым условиям, для определения критических значений сжимающих усилий $\overline{P}$ получим

$$\sin k\overline{a}=0 \qquad (2.11)$$

Здесь

$$\overline{a}=\begin{cases}1 - \text{при неучете влияния изменения размеров}\\ 1\text{-}\overline{P}/n_1 - \text{при учете влияния изменения размеров}\end{cases} \qquad (2.12)$$

Из (2.11) следует

$$k\overline{a}=j\pi,\quad j=1,2,... \qquad (2.13)$$

где j – номер формы потери устойчивости. В случаях неучета влияния изменения размеров уравнение (2.13) линейно относительно $\overline{P}_j$. В случаях же учета этого влияния оно становится кубическим.

В табл. 1 приведены выражения k^2 для всех случаев, значения $\overline{P}_j$ в случаях а), б), в) и кубическое уравнение относительно $\overline{P}_j$ для остальных случаев. Из выражения $\overline{P}_j$ для случаев а) и в) заключаем, что учет влияния только напряжения σ_z приводит к увеличению значений критических сил по сравнению с классическими. Исходя из физических соображений, можно ожидать, что учет изменения размеров (уменьшение ширины и увеличение толщины) полосы также должен привести к росту критических значений сжимающих сил. С другой стороны, как видно из выражения $\overline{P}_j$ для случая б), учет поперечных сдвигов, наоборот, уменьшает значения критических сил. Возникает вопрос: в какой мере влияния отмеченных факторов будут взаимокомпенсировать друг друга при их одновременном учете.

Таблица 1

Случаи	k^2	$\overline{P}_j$
а)	$\dfrac{12\varepsilon^2\overline{P}_j}{n_{11}}$	$\dfrac{n_{11}j^2\pi^2}{12\varepsilon^2}$
б)	$\dfrac{60\varepsilon^2 n_{13}\overline{P}_j}{n_{11}(5n_{13}-6\overline{P}_j)}$	$\dfrac{5n_{11}n_{13}j^2\pi^2}{6(10n_{13}\varepsilon^2+n_{11}j^2\pi^2)}$
в)	$\dfrac{60\varepsilon^2 n_3\overline{P}_j}{n_{11}[5n_3+6\overline{P}_j(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})]}$	$\dfrac{5n_{11}n_3 j^2\pi^2}{6[10n_3\varepsilon^2-n_{11}(\nu_{11}+\nu_{12}\nu_{23})j^2\pi^2]}$
г)	$\dfrac{12\varepsilon^2 n_3^3\overline{P}_j}{n_{11}(n_3+\nu_{13}\overline{P}_j)^3}$	$k^2(n_1-\overline{P}_j)^2=j^2\pi^2n_1^2$
общий	$\dfrac{60\varepsilon^2 n_{13}n_3^3\overline{P}_j}{n_{11}(n_3+\nu_{13}\overline{P})^2\left[5n_{13}n_3+(11\nu_{13}n_{13}-6n_3+6\nu_{12}\nu_{23}n_{13})\overline{P}_j\right]}$	$k^2(n_1-\overline{P}_j)^2=j^2\pi^2n_1^2$

3. Рассмотрим примеры изотропных и ортотропных полос со значениями геометрического параметра

$$\varepsilon = 40;\ 30;\ 20;\ 15;\ 12;\ 10 \tag{3.1}$$

Для изотропных полос примем

$$n_1 = n_3 = 1000;\ n_{13} = 400;\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0{,}25;\ n_{11} = 1066{,}7 \tag{3.2}$$

Для ортотропных

$$n_1 = 1000;\ n_3 = 50;\ n_{13} = 25;\ \nu_{12} = 0{,}1;\ \nu_{13} = 0{,}2;\ \nu_{23} = 0{,}3;\ n_{11} = 1200 \tag{3.3}$$

В табл.2 представлены первые критические значения сжимающей силы $\overline{P}_1^{(l)}$ в случаях учета каждого из факторов в отдельности и при одновременном их учете. Представлены также процентные отклонения от соответствующих классических значений $\overline{P}_1^{(0)}$

$$\Delta_l = \frac{\overline{P}_1^{(0)} - \overline{P}_1^{(l)}}{\overline{P}_1^{(0)}}100\%, \quad l = 1,2,3,4 \tag{3.4}$$

Здесь l указывает постановку задачи. При $l=1$ учитывается только влияние поперечного сдвига, $l=2$ – только напряжения σ_z, $l=3$ – только изменение размеров полосы, а при $l=4$ учитываются влияния всех отмеченных факторов одновременно.

Данные табл.2 приводят к следующим заключениям.

1. В случае изотропных полос учет влияния любого фактора в отдельности приводит к незначительным поправкам критических значений сжимающих сил. Например, при достаточно большой относительной толщине $h_0/a_0 = 0{,}1$ $(\varepsilon = 10)$ поправки от поперечного сдвига, напряжения σ_z и изменения размеров в отдельности составляют

2,56%, $-0{,}33\%$ и $-2{,}51\%$ соответственно. При одновременном же учете этих факторов происходит почти полная взаимокомпенсация их влияний и общая поправка практически исчезает (составляет лишь $-0{,}09\%$). Поэтому в задачах статической устойчивости изотропных полос, особенно настолько тонких, которые теряют устойчивость в пределах пропорциональности, можно ограничиться классической теорией пластин.

Таблица 2

	$\varepsilon = 40$	$\varepsilon = 30$	$\varepsilon = 20$	$\varepsilon = 15$	$\varepsilon = 12$	$\varepsilon = 10$
	Изотропная полоса					
$\overline{P}_1^{(0)}$	0,5483	0,9748	2,1933	3,8991	6,0923	8,7730
$\overline{P}_1^{(1)}$	0,5474	0,9719	2,1789	3,8540	5,9830	8,5480
Δ_1	0,16	0,30	0,66	1,16	1,79	2,56
$\overline{P}_1^{(2)}$	0,5484	0,9751	2,1951	3,9048	6,1063	8,8019
Δ_2	-0,02	-0,03	-0,08	-0,15	-0,23	-0,33
$\overline{P}_1^{(3)}$	0,5491	0,9774	2,2066	3,9416	6,1973	8,9933
Δ_3	-0,15	-0,27	-0,61	-1,09	-1,72	-2,51
$\overline{P}_1^{(4)}$	0,5483	0,9749	2,1938	3,9009	6,0966	8,7813
Δ_4	0	-0,01	-0,02	-0,05	-0,07	-0,09
	ортотропная полоса					
$\overline{P}_1^{(0)}$	0,6168	1,0966	2,4674	4,3865	6,8539	9,8696
$\overline{P}_1^{(1)}$	0,5991	1,0418	2,2061	3,6235	5,1572	6,6970
Δ_1	2,87	5,00	10,59	17,39	24,76	32,15
$\overline{P}_1^{(2)}$	0,6190	1,1033	2,5015	4,4953	7,1234	10,438
Δ_2	-0,36	-0,61	-1,38	-2,48	-3,93	-5,76
$\overline{P}_1^{(3)}$	0,6222	1,1138	2,5569	4,6813	7,6150	11,571
Δ_3	-0,88	-1,57	-3,63	-6,72	-11,10	-17,23
$\overline{P}_1^{(4)}$	0,6061	1,0630	2,3011	3,8785	5,6687	7,5463
Δ_4	1,73	3,06	6,74	11,58	17,29	23,54

2. Для ортотропных полос это заключение в общем случае неверно. Например, в рассмотренном случае ортотропии (3.3) при $h_0 / a_0 = 0{,}1$, $(\varepsilon = 10)$ поправки от поперечного сдвига, напряжения σ_z и изменения размеров в отдельности довольно ощутимы и составляют $32{,}15\%$,

$-5{,}76\%$ и $-17{,}23\%$ соответственно. При одновременном учете этих факторов полная взаимокомпенсация их влияний не происходит и общая поправка все же ощутима и составляет $23{,}54\%$. Следовательно, для ортотропных полос необходимо обратиться к уточненной теории. Однако, при учете влияния поперечных сдвигов в обязательном порядке надо учитывать также и влияния изменения размеров и напряжения σ_z.

3. Из-за нелинейности взаимовлияний сумма поправок от отдельных факторов не равна поправке от их совместного учета, т.е.

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta_i \neq \Delta_4 \qquad (3.5)$$

Это неравенство более ощутимо в случае ортотропии и резко усиливается с ростом относительной толщины (с убыванием параметра ε).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с
2. Томашевский В.Т. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку. 1966. М.: Наука. 1966. С.753-761.
3. Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. //ПМ. 1966. Т.2. Вып. 2.
4. Акопян А.С., Киракосян Р.М. Об устойчивости ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечного сдвига. // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т. 48. №4. С.3-9.
5. Гнуни В.Ц. Некоторые соображения о расчетных моделях упругих пластинок. // Изв. НАН РА. Механика. 1999. Т. 52. №3. С.86-89.
6. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластинки с учетом поперечных сдвигов. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С.5-11.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
6.09.2004