ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №2, 2004 Механика

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН УПРУГИЙ СЛОЙ, СОСТОЯЩИЙ ИЗ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЧАСТЕЙ

Саркисян К.Г.

Կ.Հ. Սարգսյան

Խնդիր պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է առաձգական շերտ՝ բաղկացած երկու կիսանվերջ դիէլեկտրիկներից

Աշխատանքում ուսումնասիրված են առաձգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (6mm դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահքային կայունացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստությամբ առաձգական շերտ՝ բաղկացած երկու կիսանվերջ դիէլեկտրիկներից: Միջավայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման գծային աղբյուրի հետևանքով: Օգտվելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի խնդրին:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և շոշափող լարման համար ասիմպտոտական բանաձևեր դիէլեկտրիկների բաժանման գծի տեղամասում և կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում, որոնցից հետևում է, որ էլեկտրական դաշտի ինդուկցիան կոնտակտի տեղամասում, դիէլեկտրիկների բաժանման գծի վրա ունի վերջավոր թռիչք, իսկ շոշափող լարումները պարունակում են խզվող գումարելի՝ պայմանավորված դիէլեկտրիկ թափանցելիության տարբեր գործակիցներով:

K.H. Sargsyan

On the Shear Vibrations of Piezoelectric Half-Space on the Boundary Surface of which a Dielectric Elastic Layer Consisting of two Semi-infinite Dielectrics is Fixed

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщины, состоящий из двух полубесконечных диэлектрических частей. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению задачи Римана в теории аналитических функций.

Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля и контактных напряжений в окрестности линии раздела диэлектриков и в далеких точках участка контакта, из которых следует, что индукция электрического поля на контактном участке, на линии раздела диэлектриков имеет конечный скачок, а контактные напряжения содержат разрывное слагаемое, обусловленное разностью коэффициентов диэлектрических проницаемостей.

Рассмотрим сдвиговые колебания пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен бесконечный диэлектрический слой малой толщины $(k_2 h << 1)$, состоящий из двух полубесконечных частей с разными коэффициентами диэлектрической проницаемости, причем коэффициент диэлектрической проницаемости при $x_1 > 0$ – ε_1, а при $x_1 < 0$ – ε_2. Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $P\delta(x_1)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω – частота колебаний, t – параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в определении индукции электрического поля на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Предполагаем, что упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе $Ox_1x_2x_3$. Плоскость $x_2 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем. Ось Ox_2 направлена в глубь пьезоэлектрического полупространства. Ось Ox_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной симметрии.

Обозначим упругие перемещения пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя $u_*^{(1)}(x_1,x_2,t)$, $u_*^{(2)}(x_1,x_2,t)$, а электрические потенциалы – $\phi_*^{(1)}(x_1,x_2,t)$, $\phi_*^{(2)}(x_1,x_2,t)$, соответственно. Упругие перемещения и электрические потенциалы ищем в виде:

$$u_*^{(1)}(x_1,x_2,t) = u^{(1)}(x_1,x_2)e^{-i\omega t}, \quad u_*^{(2)}(x_1,x_2,t) = u^{(2)}(x_1,x_2)e^{-i\omega t}$$

$$\phi_*^{(1)}(x_1,x_2,t) = \phi^{(1)}(x_1,x_2)e^{-i\omega t}, \quad \phi_*^{(2)}(x_1,x_2,t) = \phi^{(2)}(x_1,x_2)e^{-i\omega t}$$

Тогда поставленная задача в амплитудах сводится к граничной задаче [1]:

$$\Delta u^{(1)} + k_1^2 u^{(1)} = 0, \quad \Delta\phi^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k_1^2 u^{(1)}, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 u^{(2)}(x_1) = \frac{1}{hG_p}\left(P\delta(x_1) - \tau(x_1)\right), \quad -\infty < x_1 < \infty \tag{2}$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} c_{44} \left.\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} + e_{15} \left.\dfrac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \tau(x_1) \\ e_{15} \left.\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left.\dfrac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = D^+(x_1,0) + D^-(x_1,0) \\ \left.u^{(1)}\right|_{x_2=0} = u^{(2)}(x_1), \quad \left.\phi^{(1)}\right|_{x_2=0} = \left.\phi^{(2)}\right|_{x_2=0} \end{cases} \tag{3}$$

где $\tau(x_1)$ – контактное напряжение.

$$D^+(x_1,0) = \theta(x_1)D(x_1,0), \; D^-(x_1,0) = \theta(-x_1)D(x_1,0), \quad D(x_1,0) = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$$

при $x_1 > 0$, $D(x_1,0) = -\varepsilon_2 \left.\dfrac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$ при $x_1 < 0$, $D(x_1,x_2)$–индукция электрического поля на контактном участке, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, $c_1^2 = c_{44}/\rho_1$, $k_1^2 = \omega^2/c_1^2(1+\chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ – коэффициент электромеханической связи, e_{15} – пьезоэлектрическое постоянное, ε_{11} и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – коэффициенты диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика и диэлектрика соответственно, ρ_1 – плотность пьезоэлектрика, c_{44} – коэффициент упругости пьезоэлектрика,

$c_2^2 = G_2/\rho_2$, $k_2^2 = \omega^2/c_2^2$, G_2 и ρ_2 – соответственно модуль сдвига и плотность материала диэлектрического слоя.

В силу малости толщины диэлектрического слоя считается, что $D(x_1, x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D(x_1, x_2) = D(x_1, 0)$, тогда в силу $\phi^{(2)}\big|_{x_2=-h} = 0$ для $\phi^{(2)}(x_1, x_2)$ будем иметь:

$$\phi^{(2)}(x_1; x_2) = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1} D^+(x_1, 0) - \frac{1}{\varepsilon_2} D^-(x_1, 0)\right)(x_2 + h), \; -\infty < x_1 < \infty \qquad (4)$$

Для решения уравнений (1), (2), (4) с контактными условиями (3) применим интегральное преобразование Фурье $\overline{\varphi}(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty$.

Получим граничную задачу:

$$\frac{d^2 \overline{u}^{(1)}}{dx_2^2} - \left(\sigma^2 - k_1^2\right)\overline{u}^{(1)} = 0, \; \frac{d^2 \overline{\phi}^{(1)}}{dx_2^2} - \sigma^2 \overline{\phi}^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cdot k_1^2 \cdot \overline{u}^{(1)}$$

$$\overline{u}^{(2)}(\sigma) = \frac{\overline{\tau}(\sigma) - P}{hG_2\left(\sigma^2 - k_2^2\right)}, \; \overline{\phi}^{(2)}(\sigma; 0) = -\frac{h}{\varepsilon_1} \overline{D}^+(\sigma; 0) - \frac{h}{\varepsilon_2} \overline{D}^-(\sigma; 0) \qquad (5)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} c_{44} \left.\dfrac{d\overline{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} + e_{15} \left.\dfrac{d\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} = \overline{\tau}(\sigma) \\ e_{15} \left.\dfrac{d\overline{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left.\dfrac{d\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} = \overline{D}^+(\sigma, 0) + \overline{D}^-(\sigma, 0) \\ \left.\overline{u}^{(1)}\right|_{x_2=0} = \overline{u}^{(2)}(\sigma), \; \left.\overline{\phi}^{(1)}\right|_{x_2=0} = \left.\overline{\varphi}^{(2)}\right|_{x_2=0} \end{cases} \qquad (6)$$

Выше имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точку $\sigma = -k_2$ сверху, а точку $\sigma = k_2$ – снизу.

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$\left(\chi^2|\sigma| - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1} h|\sigma|\right)\left[\left(1 + \chi^2\right)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2 - k_2^2\right)\right]\right) \cdot \overline{D}^+(\sigma, 0) +$$

$$+ \left(\chi^2|\sigma| - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_2} h|\sigma|\right)\left[\left(1 + \chi^2\right)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}\left(\sigma^2 - k_2^2\right)\right]\right) \cdot \overline{D}^-(\sigma, 0) = -\frac{P e_{15}}{c_{44}}|\sigma| \qquad (7)$$

После этого, имея в виду функциональные уравнения (7), для контактных напряжений, упругого перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрике получим:

$$\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2)=\frac{P/c_{44}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)+e_{15}/c_{44}\cdot\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h|\sigma|\cdot\overline{D}^-(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \quad (8)$$

$$\overline{\phi}^{(1)}(\sigma,x_2)=\frac{-Pe_{15}\varepsilon_1/c_{44}\varepsilon_{11}-\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\cdot\overline{D}^-(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}\cdot e^{-|\sigma|x_2}+$$

$$+\frac{Pe_{15}/\varepsilon_{11}c_{44}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)+\chi^2\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h|\sigma|\cdot\overline{D}^-(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \quad (9)$$

Для удовлетворения условий уходящей волны однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$ и $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$. При этом контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma=-k_1$ сверху, а точку $\sigma=k_1$ – снизу [2].

$$\overline{\tau}(\sigma)=\frac{P\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\right)+\frac{e_{15}G_2}{c_{44}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)h^2|\sigma|\left(\sigma^2-k_2^2\right)\cdot\overline{D}^-(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]} \quad (10)$$

Таким образом, задача свелась к решению задачи Римана теории аналитической функции относительно $\overline{D}^-(\sigma,0)$ и $\overline{D}^-(\sigma,0)$ [(7)]
Для решения уравнения, (7) перепишем в виде

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overline{K}(\sigma)\overline{D}^-(\sigma,0)+\overline{D}^-(\sigma,0)=-\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\overline{S}(\sigma) \quad (11)$$

где $\overline{K}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\chi^2\varepsilon_2|\sigma|-\left(\varepsilon_2+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}$$

$$\overline{S}(\sigma)=\frac{\varepsilon_1|\sigma|}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}$$

Для решения уравнения (11) факторизуем функцию $\overline{K}(\sigma)$, представив ее в виде [3]. $\overline{K}(\sigma)=\overline{K}^+(\sigma)\cdot\overline{K}^-(\sigma)$, где $\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$.

$$\bar{K}^{+}(\sigma)=\exp\bar{L}^{+}(\sigma),\quad \bar{K}^{-}(\sigma)=\exp\bar{L}^{-}(\sigma),\quad \bar{L}^{+}(\sigma)=\int\limits_{0}^{+\infty}L(x_1)e^{i(\sigma+i0)x_1}dx_1,$$

$$\bar{L}^{-}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{0}L(x_1)e^{i(\sigma-i0)x_1}dx_1$$

$$L(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\chi^2|\sigma|-\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2-k_2^2)\right]\right)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2-k_2^2)\right]}\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma$$

Затем, уравнения (11) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\bar{K}^{-}(\sigma)\bar{D}^{-}(\sigma,0)+\frac{\bar{D}^{+}(\sigma,0)}{\bar{K}^{+}(\sigma)}=-\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\cdot\bar{R}^{+}(\sigma)-\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\bar{R}^{-}(\sigma)$$

где $\bar{R}^{+}(\sigma)+\bar{R}^{-}(\sigma)=\bar{R}(\sigma)=\dfrac{\bar{S}(\sigma)}{\bar{K}^{+}(\sigma)}$. $\bar{R}^{+}(\sigma)=\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}R(x_1)e^{i(\sigma+i0)x_1}dx_1$

$$\bar{R}^{-}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{0}R(x_1)e^{i(\sigma-i0)x_1}dx_1,\quad R(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{R}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma$$

После чего будем иметь:

$$\bar{F}^{-}(\sigma)=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\bar{K}^{-}(\sigma)\bar{D}^{-}(\sigma,0)+\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\bar{R}^{-}(\sigma)=-\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\bar{R}^{+}(\sigma)-\frac{\bar{D}^{+}(\sigma,0)}{\bar{K}^{+}(\sigma)}=\bar{F}^{+}(\sigma)\quad(12)$$

Дальнейшие рассуждения приводятся, как в [4]. Применив к (12) обратное преобразование Фурье, получим $F^{-}(x_1)=F^{+}(x_1)$, где $F^{-}(x_1)=0$ при $x_1>0$, $F^{+}(x_1)=0$ при $x_1<0$, следовательно, [5-6]. $F^{-}(x_1)=F^{+}(x_1)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}(x_1)$ (*), где $\delta^{(0)}(x_1)=\delta(x_1),\ldots,\delta^{(k)}(x_1)$ – производные $\delta(x_1)$ $(k=1,\ldots n)$. Применив интегральное преобразование Фурье к (*), получим $\bar{F}^{-}(\sigma)=\bar{F}^{+}(\sigma)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(-i)^k\sigma^k$.

Так как $1-\bar{K}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеет порядок $|\sigma|^{-1}$, то в силу свойств интеграла Фурье следует, что $L(x_1)$ имеет порядок $\ln|x_1|$ при $|x_1|\to 0$, поскольку $\bar{F}^{-1}\left(|\sigma|^{-1}\right)=-\dfrac{1}{\pi}\ln|x_1|+\mathrm{const}$, где F -обобщенное преобразование Фурье, F^{-1} – обратное преобразование Фурье. Тогда $\bar{L}^{+}(\sigma)=O\left(\dfrac{\ln(\sigma+i0)}{\sigma+i0}\right)$ и $\bar{L}^{-}(\sigma)=O\left(\dfrac{\ln(\sigma-i0)}{\sigma-i0}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$. Отсюда легко видеть, что $\bar{K}^{\pm}(\sigma)\to 1$, когда

$|\sigma| \to \infty$. Далее так как $\bar{\phi}^{-}(\sigma;0) = -\dfrac{h}{\varepsilon_1}\bar{D}^{-}(\sigma;0)$, $\bar{\phi}^{+}(\sigma;0) = -\dfrac{h}{\varepsilon_2}\bar{D}^{-}(\sigma;0)$ и поскольку $\Phi(x_1)$ имеет конечное значение в точке $x_1 = 0$, следовательно:

$$\bar{D}^{-}(\sigma;0) = O\left(\frac{1}{\sigma - i0}\right), \quad \bar{D}^{+}(\sigma;0) = O\left(\frac{1}{\sigma + i0}\right) \text{ при } |\sigma| \to \infty.$$

Поскольку $\bar{R}(\sigma)$ – абсолютно интегрируемая функция, то $R(x_1)$ – непрерывная функция, следовательно, $R^{-}(0) = R(0)/2$, $R^{+}(0) = R(0)/2$.

$$\bar{R}^{-}(\sigma) = O\left(\frac{1}{i(\sigma - i0)}\right), \quad \bar{R}^{+}(\sigma) = O\left(\frac{1}{i(\sigma + i0)}\right) \text{ при } |\sigma| \to \infty.$$

Из вышесказанного следует, что $\bar{F}^{-}(\sigma)$ и $\bar{F}^{+}(\sigma)$ стремятся к нулю при $|\sigma| \to \infty$.

Отсюда следует, что $a_k = 0$ $(k = 0,...n)$, т.е. $\bar{F}^{-}(\sigma) = \bar{F}^{+}(\sigma) = 0$.

Из этого следует, что $\bar{D}^{-}(\sigma,0)$ и $\bar{D}^{+}(\sigma,0)$ определятся в виде:

$$\bar{D}^{-}(\sigma,0) = -\frac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1}\cdot\frac{\bar{R}^{-}(\sigma)}{\bar{K}^{-}(\sigma)}, \quad \bar{D}^{+}(\sigma,0) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\bar{R}^{+}(\sigma)\cdot\bar{K}^{+}(\sigma) \tag{13}$$

где $\bar{R}^{-}(\sigma)/\bar{K}^{-}(\sigma)$ и $\bar{R}^{+}(\sigma)\cdot\bar{K}^{+}(\sigma)$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\bar{R}^{-}(\sigma)}{\bar{K}^{-}(\sigma)} = \frac{\varepsilon_1|\sigma| - \left\{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1-\chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \dfrac{G_2 h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2)\right]\right\}\bar{R}^{+}(\sigma)\cdot\bar{K}^{+}(\sigma)}{\chi^2\varepsilon_2|\sigma| - (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \dfrac{G_2 h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2)\right]}\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\bar{R}^{+}(\sigma)\cdot\bar{K}^{+}(\sigma) = \frac{\varepsilon_2|\sigma| - \left\{\chi^2\varepsilon_2|\sigma| - (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1-\chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \dfrac{G_2 h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2)\right]\right\}\bar{R}^{-}(\sigma)/\bar{K}^{-}(\sigma)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \dfrac{G_2 h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2)\right]}$$

Далее приступим к исследованию знаменателей $\bar{R}^{-}(\sigma)/\bar{K}^{-}(\sigma)$ и $\bar{R}^{+}(\sigma)\cdot\bar{K}^{+}(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \chi^2\varepsilon_1|\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2)\right] = f_1(\sigma) \\ \chi^2\varepsilon_2|\sigma| - (\varepsilon_2 + \varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}}(\sigma^2 - k_2^2)\right] = f_2(\sigma) \end{aligned} \tag{14}$$

Исследуем первое выражение из уравнения (14). Легко видеть, что при $k_2 > k$ $(k^2 = \dfrac{\omega^2}{c_1^2})$ и при любых значениях χ $f_1(k_1) > 0$, $f_1(k_2) < 0$. Кроме того, $\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma} < 0$ при $\sigma > k_1$ и при любых значениях χ. Из этого следует, что в интервале $k_1 < \sigma < k_2$ функция $f_1(\sigma)$ имеет единственный нуль $\sigma = \sigma_1$. Из-за четности функции $f_1(\sigma)$ следует, что $\sigma = -\sigma_1$ в интервале $-k_2 < \sigma < -k_1$, также является нулем этой функции. Аналогично можно показать, что $f_2(\sigma)$ в интервале $k_1 < \sigma < k_2$ имеет единственный нуль $\sigma = \sigma_2$, а в интервале $-k_2 < \sigma < -k_1$ – $\sigma = -\sigma_2$. Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точки $\sigma = -\sigma_1$, $\sigma = -\sigma_2$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$ –снизу. Из вышесказанного следует, что существуют электроупругие поверхностные волны Лява, которые распространяются со скоростьями $C_{31} = \dfrac{\omega}{\sigma_1}$, $C_{32} = \dfrac{\omega}{\sigma_2}$, соответственно по положительным и отрицательным направлениям оси x_1.

Далее, применив к уравнению (13) обратное преобразавание Фурье, для $D^-(x_1,0)$ и $D^+(x_1,0)$ получим следующие представления

$$D^-(x_1,0) = -\frac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon_1|\sigma| - f_1(\sigma)\bar{R}^+(\sigma)\bar{K}^+(\sigma)}{f_2(\sigma)}\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{A_*}{\sigma-\sigma_2}\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma +$$

$$+\frac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1}\cdot iA_*e^{-i\sigma_2 x_1}$$

$$D^+(x_1,0) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon_2|\sigma| - f_2(\sigma)\bar{R}^-(\sigma)/\bar{K}^-(\sigma)}{f_1(\sigma)} - \frac{B_*}{\sigma+\sigma_1}\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma +$$

$$+\frac{Pe_{15}}{c_{44}}\cdot iB_*e^{i\sigma_1 x_1}$$

Поскольку $\dfrac{d}{d\sigma}\left(\dfrac{\bar{R}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} - \dfrac{A_*}{\sigma-\sigma_2}\right)$ и $\dfrac{d}{d\sigma}\left(\bar{R}^+(\sigma)\cdot\bar{K}^+(\sigma) - \dfrac{B_*}{\sigma+\sigma_1}\right)$ – абсолютно интегрируемые функции, то после интегрирования по частям, можно убедиться, что имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} D^-(x_1,0) &= \frac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1}\cdot iA_*e^{-i\sigma_2 x_1} + o\left(x_1^{-1}\right), \quad x_1 \to -\infty \\ D^+(x_1,0) &= \frac{Pe_{15}}{c_{44}}\cdot iB_*e^{i\sigma_1 x_1} - o\left(x_1^{-1}\right), \quad x_1 \to +\infty \end{aligned} \tag{15}$$

$$A_* = \frac{\sigma_1 - \dfrac{\chi^2\sigma_1^2 h\varepsilon_{11}(1/\varepsilon_2 - 1/\varepsilon_1)}{\left(1+\sigma_1 h\varepsilon_{11}/\varepsilon_2\right)}\cdot\bar{R}^+(\sigma_1)\cdot\bar{K}^+(\sigma_1)}{\left.f_1'(\sigma)\right|_{\sigma=\sigma_1}}$$

$$B_* = \frac{-\sigma_2 - \dfrac{\chi^2\sigma_2^2 h\varepsilon_{11}(1/\varepsilon_1 - 1/\varepsilon_2)\varepsilon_2}{\left(1-\sigma_2 h\varepsilon_{11}/\varepsilon_1\right)\varepsilon_1}\cdot\dfrac{\bar{R}^-(-\sigma_2)}{\bar{K}^-(-\sigma_2)}}{\left.f_2'(\sigma)\right|_{\sigma=-\sigma_2}}$$

Далее так как $\overline{D}^{-}(\sigma)=\dfrac{Pe_{15}\varepsilon_2}{c_{44}\varepsilon_1}\cdot\dfrac{R(0)}{2i(\sigma-i0)}+O\left(\dfrac{\ln(\sigma-i0)}{\sigma-i0}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$ и

$\overline{D}^{+}(\sigma)=-\dfrac{Pe_{15}}{c_{44}}\dfrac{R(0)}{2i(\sigma+i0)}+O\left(\dfrac{\ln(\sigma+i0)}{\sigma+i0}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$, то в силу свойств интеграла Фурье получим:

$$D(x_1,0)=\frac{Pe_{15}R(0)}{2c_{44}}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\theta(-x_1)+\theta(x_1)\right)+O(x_1\ln|x_1|) \tag{16}$$

при $|x_1|\to 0$.

Отсюда следует, что $D(x_1,0)$ имеет конечный скачок на линии раздела ($x_1=0$) диэлектрика.

Поступая как выше, можно получить асимптотические формулы для $\tau(x_1)$.

$$\tau(x_1)=-\frac{(1+\chi^2)c_{44}P}{G_2h}\cdot\frac{1}{\pi}\ln|x_1|+\frac{P\chi^2R(0)}{2}\left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\theta(-x_1)+\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\theta(x_1)\right]+O(1) \tag{17}$$

$$|x_1|\to 0$$

Асимптотические формулы для $\tau(x_1)$ при $|x_1|\to\infty$ получим в виде:

$$\tau(x_1)=iE_1e^{i\sigma_1x_1}+o(x_1^{-1}) \text{ при } x_1\to+\infty \tag{18}$$

$$\tau(x_1)=iE_2e^{-i\sigma_2x_1}+o(x_1^{-1}) \text{ при } x_1\to-\infty$$

где

$$E_1=\frac{P(\varepsilon_1-\varepsilon_{11}h\sigma_1)\dfrac{G_2h}{c_{44}}(\sigma_1^{\,2}-k_2^2)+\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\dfrac{G_2h^2}{c_{44}}\sigma_1(\sigma_1^{\,2}-k_2^2)D^-(-\sigma_1,0)}{f_1'(\sigma)\big|_{\sigma=-\sigma_1}}$$

$$E_2=\frac{P(\varepsilon_2-\varepsilon_{11}h\sigma_2)\dfrac{G_2h}{c_{44}}(\sigma_2^{\,2}-k_2^2)+\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1-\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\dfrac{G_2h^2}{c_{44}}\sigma_2(\sigma_2^{\,2}-k_2^2)D^-(\sigma_2,0)}{f_2'(\sigma)\big|_{\sigma=\sigma_2}}$$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э.Х. Григоряну за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ. 1962. 279с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Изд. 3-е, перераб. и дополн. М.: Наука. 1977. 640с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Ученые записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №3. С.29-34.
5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 283с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 328с.

Ереванский Государственный
Университет

Поступила в редакцию
1.03.2004