ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №2, 2004 Механика

УДК 539.3

# ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**Атоян А.А., Саркисян С.О.**

Ա.Ա. Աթոյան, Ս.Հ. Սարգսյան
Բարակ սալի դինամիկական խնդիրը առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հիման վրա

Դիտարկվում է բարակ սալի եռաչափ տիրույթում առաձգականության ոչ սիմետրիկ ընդհանուր եռաչափ տեսության (երբ պտույտներն ազատ են) նախնական-եզրային խնդիրը: Խնդրի ուսումնասիրման համար որպես հիմք ընդունելով ասիմպտոտիկ մեթոդը, կառուցվում է ներքին խնդրի (կիրառական երկչափ տեսության) որոշիչ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը, ինչպես նաև եզրային և նախնական պայմանները: Սահմանային շերտը համարվում է քվազիստատիկ: Նույն խնդրի համար, որոշակի սահմանափակումներ դնելով սալի նյութի որոշ ֆիզիկական հաստատունների վրա (ասիմպտոտիկ իմաստով), ցույց է տրվում, որ ներքին խնդրի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը այս դեպքում հանգեցնում է միկրոպոլյար բարակ սալի կիրառական տեսության, երբ պտույտները արտահայտվում են տեղափոխություններով (կաշկանդված պտույտներ):

Առանձին ուսումնասիրվում է նաև այն դեպքը, երբ բարակ սալի եռաչափ տիրույթում հենց սկզբից տրվում են առաձգականության ոչ սիմետրիկ (եռաչափ) տեսության երկրորդ տարբերակի (այսպես կոչված կաշկանդված պտույտներով տեսության) հավասարումները, նախնական և եզրային պայմանները:

**A.A. Atoyan, S.H. Sargsyan**
**The Problem of the Thin Plate's Dynamics on the basis of the Asymmetrical Theory of Elasticity**

В трехмерной области тонкой пластинки рассматривается начально-краевая задача общей трехмерной несимметричной теории упругости (когда вращения свободны). Для изучения задачи как основу принимая асимптотический метод, построена определяющая система дифференциальных уравнений, а также граничные и начальные условия для внутренней задачи (для прикладной двумерной теории). Задача погранслоя принимается как квазистатическая. Для этой же задачи, требуя определенные ограничения (в смысле асимптотики) от некоторых физических констант материала пластинки, доказывается, что асимптотическое разложение для внутренней задачи, для этого случая, приведет к прикладной теории микрополярных пластин, когда повороты выражаются через перемещения (стесненные повороты).
Отдельно изучается также тот случай, когда в тонкой трехмерной области пластинки, с самого начала, даны уравнения, граничные и начальные условия второго варианта трехмерной несимметричной теории упругости (так называемая теория со стесненным вращением).

1. Глубокое изучение и детальное математическое описание механики явления, связанное с внутренним взаимодействием частиц в упругих телах, особенно имеющих микроструктуру, привели к обобщению классической математической модели теории упругости и созданию несимметричной (моментной, микрополярной) теории упругости, или иначе, континуума Коссера [1-7]. В настоящее время, накопленные экспериментальные факты свидетельствуют о высокой роли внутренней структуры материала в процессах, сопровождающих его деформирование. Особый интерес в этой области связан с появлением новой технологической возможности не только наблюдать и измерить элементы внутренней структуры твердых тел, но и оказывать влияние на эту структуру, а в случае нанотехнологии и, создавать необходимые или требуемые структурные элементы на микроуровне. Выявление динамических эффектов в твердых телах с микроструктурой является весьма эффективным средством изучения структуры и свойств современных материалов, для разработки новых методов и средств измерения, контроля и диагностики. На основе структурно-феноменологического подхода для изучения подобных динамических задач, а также задач о концентрации напряжений вокруг отверстий и трещин и.т.д. послужит математическая модель несимметричной теории упругости.

Актуальна проблема построения таких математических моделей динамики микрополярных тонких стержней, пластин и оболочек [1], которые могли бы с достаточной математической строгостью адекватно отражать физическую сущность соответствующих трехмерных начально-граничных задач, и которые, были бы приемлемы для их вычислительной реализации.

Асимптотический метод является особенно естественным методом в теории тонких стержней, пластин и оболочек, так как последние представляют собой тонкое деформируемое тело и малый параметр (относительная толщина) в сущности входит в определение самого объекта исследования. Асимптотические методы по классической теории упругости для тонких стержней, пластин и оболочек развиты в работах [8-11].

В работе [12], для задачи статики, развивается асимптотический подход и на этой базе строится общая теория тонких пластин на основе несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ). Изучается внутренний итерационный процесс, результаты которого приводят к общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин. Строится теория погранслоя по НТУ с НППВ. В отличие от классического случая, когда имеем плоский и антиплоский силовые погранслои, доказывается существование четырех типов погранслоев (силовой и моментный плоский и антиплоский погранслои). Изучаются основные свойства указанных типов погранслоев. Строятся функции типа погранслоя. Изучается задача сращивания двух асимптотических разложений (внутреннего итерационного процесса и погранслоя), в результате которого трехмерные граничные условия несимметричной теории упругости, которые поставлены на боковой цилиндрической поверхности пластинки, расщепляются между общей прикладной-двумерной теорией пластин и погранслоями. В результате, общая прикладная-двумерная статическая теория микрополярных тонких пластин выделяется как отдельная краевая задача математической физики. Разделяются также краевые задачи всех четырех типов погранслоев. Имеются результаты построения общей статической теории тонких пластин на основе НТУ со стесненным вращением (НТУ со СВ).

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Отнесем оси $x_1$, $x_2$ декартовой прямоугольной системы координат $x_i\ (i=1,2,3)$ к срединной плоскости пластинки, ось $x_3$ направим по вертикали вверх.

Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи НТУ с НППВ [2].

Уравнения движения

$$\sigma_{ji,j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\quad \mu_{ji,j} + \text{э}_{ijk}\sigma_{jk} = J\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij} \end{cases} \tag{1.2}$$

либо в обратной форме

$$\begin{cases} \gamma_{ji} = (\mu'+\alpha')\sigma_{ji} + (\mu'-\alpha')\sigma_{ij} + \lambda'\sigma_{kk}\delta_{ij} \\ \chi_{ji} = (\gamma'+\varepsilon')\mu_{ji} + (\gamma'-\varepsilon')\mu_{ij} + \beta'\mu_{kk}\delta_{ij} \end{cases} \tag{1.2'}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \text{э}_{kji}\omega_k,\quad \chi_{ji} = \omega_{i,j} \tag{1.3}$$

где $\sigma_{ij}$, $\mu_{ij}$ – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\gamma_{ij}$, $\chi_{ij}$ – компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения; $\vec{u}$ –

вектор перемещения, $\vec{\omega}$–вектор независимого поворота точек тела-пластинки; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ или $\lambda', \mu', \alpha', \beta', \gamma', \varepsilon'$ –упругие константы материала пластинки; $\text{Э}_{ijk}$ –символы Леви-Чивита; запятой в индексах обозначается дифференцирование по соответствующей независимой переменной. Индексы $i$, $j$ принимают значения 1,2,3.

На плоскостях $x_3 = \pm h$ пластинки считаются заданными силовые и моментные граничные условия

$$\sigma_{3i} = p_i^{\pm}, \mu_{3i} = m_i^{\pm} \text{ при } x_3 = \pm h, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

где $p_i^{\pm}, m_i^{\pm}$ $(i = 1, 2, 3)$–компоненты внешних заданных усилий и моментов на лицевых плоскостях пластинки.

На боковой цилиндрической поверхности $(\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ в общем случае считаем заданными граничные условия смешанного типа

$$\begin{cases} \sigma_{ji} \cdot n_j = p_{*i}, \mu_{ji} \cdot n_j = m_{*i} \text{ на } \sum_1 \ (i, j = 1, 2, 3) \\ \vec{u} = \vec{u}_*, \vec{\omega} = \vec{\omega}_* \text{ на } \sum_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

где $p_{*i}, m_{*i}$ $(i = 1, 2, 3)$–компоненты заданных внешних усилий и моментов; $\vec{u}_*, \vec{\omega}_*$ –заданные векторы перемещений и независимого поворота.

Будем считать, что заданы также начальные условия для вектора перемещения $\vec{u}$, вектора независимого поворота $\vec{\omega}$, вектора поступательной скорости $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ и вектора угловой скорости $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ для частиц тела при $t=0$.

Решение поставленной начально-граничной задачи (1.1)–(1.5) для пластинки складывается из суммы решений симметричной по $x_3$ и обратно-симметричной задач (в симметричной задаче четные по $x_3$ величины будут $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$, $\mu_{13}, \mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32}, u_1, u_2, \omega_3$, нечетные- $\sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{32}, \sigma_{23}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \omega_1, \omega_2, u_3$; в обратно-симметричной задаче–наоборот).

Предполагается, что толщина пластинки мала по сравнению с характерным размером ее $a$ в срединной плоскости ($2h << a$, $\delta = h/a << 1$ –малый геометрический параметр).

Хотя исходные уравнения и граничные условия (1.1)–(1.5) НТУ с НППВ не содержат малого параметра $\delta$, при введении надлежащих масштабов для координат и во времени, эти уравнения принимают форму, в которой малый параметр будет стоять перед некоторыми производными.

Поэтому, метод, излагаемый в данной работе, применяемый к решению динамических задач микрополярной упругой тонкой пластинки, будет относиться к категории методов сингулярных возмущений [8-11]. Придерживаясь основополагающего принципа асимптотической теории интегрирования сингулярно-вырождающихся систем дифференциальных уравнений, в основу рассуждений будет положено свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) по НТУ, испытывающий динамическое воздействие, выражаемое структурной формулой

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}}. \tag{1.6}$$

В этом равенстве нижними индексами отмечены по НТУ полное, внутреннее (проникающее) и краевое НДС пластинки. Здесь принято, что краевое НДС пластинки имеет квазистатический характер и, следовательно, оно возникает вблизи боковой цилиндрической поверхности пластинки $\sum$ и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от нее в глубь трехмерного тела тонкой пластинки. Что касается внутреннего НДС, то оно в каждом приближении будет описываться двумерными динамическими дифференциальными уравнениями (по переменным $x_1$ и $x_2$ и времени $t$).

Концепция расчленения НДС тонкой пластинки по НТУ на внутреннее (ВНДС) и краевое (КНДС) и факт коренного различия между их свойствами (как физического, так и математического характера) приведут к их раздельному исследованию. С этой точки зрения, основным предметом изучения будет вопрос о приближенных методах внутреннего расчета пластинки (определение ВНДС по НТУ) и краевого расчета (определение квазистатического КНДС по НТУ). Оба метода строятся на базе асимптотического (при малой относительной толщине пластинки) интегрирования трехмерных линейных уравнений (1.1)-(1.3) динамической задачи НТУ с учетом соответствующих граничных условий (1.4), (1.5) и начальных условий трехмерной НТУ с НППВ.

Таким образом, в трехмерных уравнениях НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) выполним замену независимых переменных

$$x_1 = a\xi,\ x_2 = a\eta,\ x_3 = h\zeta,\ t = t_0\tau \tag{1.7}$$

где $t_0 = \delta^{\omega} h / c_0$.

Здесь $c_0$ –характерная скорость распространения упругих волн в бесконечном стержне (по классической теории упругости).

Величина $\omega$ характеризует НДС по времени. Перейдем также к безразмерным величинам

$$\begin{gathered}\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}\ ,\ \ \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho C_0^2}\ ,\ \ \bar{\mu}_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\rho C_0^2 a}\ ,\ \ \delta^k \cdot \bar{J} = \frac{J}{\rho h^2}\\ \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho c_0^2}\ ,\ \ \bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho c_0^2}\ ,\ \ \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\rho c_0^2}\ ,\ \bar{\beta} = \frac{\beta}{\rho c_0^2 a^2}\ ,\ \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho c_0^2 a^2}\ ,\ \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\rho c_0^2 a^2}\end{gathered} \tag{1.8}$$

и после замены независимых переменных по формулам (1.7), на место уравнений (1.1)–(1.3) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром $\delta$.

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q^{вн} = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s Q^{(s)} \tag{1.9}$$

где $Q$ –любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов; $q$ –натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений (после подстановки (1.7)-(1.9) в систему уравнений (1.1)-(1.3) и приравнивая в каждом уравнении к нулю коэффициенты при всех степенях $\delta$, начиная с самого низкого).

Таким образом, получим (здесь мы изложим только задачу изгиба):

для обратно-симметричной по $x_3$ задачи (изгиб пластинки по НТУ с НППВ):

$$\begin{cases} q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, u_3, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \omega_1, \omega_2 \\ q = 0 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}, u_1,\ u_2, \omega_3 \\ \theta = -1\ ,\ k = -2 \end{cases} \tag{1.10}$$

Специфические свойства внутреннего итерационного процесса для трехмерного тонкого тела пластинки состоят в следующем:

а) так как полученная в асимптотических приближениях система уравнений НТУ с НППВ допускает интегрирование по переменной $\zeta$, то в результате получается, что ВНДС изменяется по толщине пластинки по довольно простому закону;

б) в описании ВНДС остается выяснить роль пространственных переменных $(\xi, \eta)$, задающих положение точки на срединной плоскости пластинки.

С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты.

Для задачи изгиба пластинки по НТУ (обратно-симметричная по $x_3$ задача) этими понятиями будут [12]: усилия $N_{mn}(mn: 13, 31, 23, 32)$, моменты $L_{ij}(ij: 11, 22, 33, 12, 21)$, $M_{ij}(ij: 11, 22, 33, 12, 21)$ и гипермоменты $\Lambda_{mn}(mn: 13, 31, 23, 32)$:

$$N_{mn} = \int_{-h}^{h} \sigma_{mn} dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^{h} \mu_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad \Lambda_{mn} = \int_{-h}^{h} \mu_{mn} x_3 dx_3 \quad (1.11)$$

Основная разрешающая система уравнений для ВНДС по НТУ с НППВ для задачи изгиба на уровне исходного асимптотического приближения $(s = 0)$, т. е. основная разрешающая система уравнений прикладной-двумерной теории тонких пластин по НТУ с НППВ получается относительно величин: $N_{13}^{(0)}, N_{23}^{(0)}, N_{31}^{(0)}, N_{32}^{(0)}$, $L_{11}^{(0)}, L_{22}^{(0)}, L_{33}^{(0)}, L_{12}^{(0)}, L_{21}^{(0)}, k_{11}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{33}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)}, \Gamma_{13}^{(0)}, \Gamma_{23}^{(0)}, \Gamma_{31}^{(0)}, \Gamma_{32}^{(0)}, W^{(0)}, O_1^{(0)}, O_2^{(0)}$ и выражается так:

уравнения движения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial x_2} = 2h\rho \dfrac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} - 2Z \\ \dfrac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2} - N_{23}^{(0)} - N_{32}^{(0)} = 2hJ \dfrac{\partial^2 O_1^{(0)}}{\partial t^2} - 2m \\ \dfrac{\partial L_{12}^{(0)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{13}^{(0)} - N_{31}^{(0)} = 2hJ \dfrac{\partial^2 O_2^{(0)}}{\partial t^2} - 2p \end{cases} \quad (1.12)$$

соотношения упругости

$$\begin{cases} N_{13}^{(0)} = 2h\left[(\mu + \alpha)\Gamma_{13}^{(0)} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}^{(0)}\right] \quad (1 \rightleftarrows 3) \\ N_{23}^{(0)} = 2h\left[(\mu + \alpha)\Gamma_{23}^{(0)} + (\mu - \alpha)\Gamma_{32}^{(0)}\right] \quad (2 \rightleftarrows 3) \\ L_{11}^{(0)} = 2h\left[(2\gamma + \beta)k_{11}^{(0)} + \beta\left(k_{22}^{(0)} + k_{33}^{(0)}\right)\right] \quad \left(\begin{matrix} 11 \to 22 \to 33 \\ \text{крут. перест. индексов} \end{matrix}\right) \\ L_{12}^{(0)} = 2h\left[(\gamma + \varepsilon)k_{12}^{(0)} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}^{(0)}\right] \quad (1 \rightleftarrows 2) \end{cases} \quad (1.13)$$

к которым следует присоединить полученные для $N_{31}^{(0)}$, $N_{32}^{(0)}$ и $L_{33}^{(0)}$ выражения

$$N_{31}^{(0)} = 2hX \ (1 \to 2, X \to Y), \quad L_{33}^{(0)} = 2hq \quad (1.14)$$

геометрические соотношения

$$\begin{cases} \Gamma_{13}^{(0)} = \dfrac{\partial W^{(0)}}{\partial x_1} + O_2^{(0)}, \ \Gamma_{23}^{(0)} = \dfrac{\partial W^{(0)}}{\partial x_2} - O_1^{(0)} \\ k_{11}^{(0)} = \dfrac{\partial O_1^{(0)}}{\partial x_1} \ (1 \rightleftarrows 2), \ \ k_{12}^{(0)} = \dfrac{\partial O_2^{(0)}}{\partial x_1} \ (1 \rightleftarrows 2) \end{cases} \tag{1.15}$$

В (1.12) и (1.14) следует учесть также

$$\begin{gathered} X = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, \ Y = \frac{p_2^+ - p_2^-}{2}, \ Z = \frac{p_3^+ + p_3^-}{2} \\ m = \frac{m_1^+ + m_1^-}{2}, \ p = \frac{m_2^+ + m_2^-}{2}, \ q = \frac{m_3^+ - m_3^-}{2} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Отметим, что величины $W^{(0)}(x_1,x_2,t), O_1^{(0)}(x_1,x_2,t), O_2^{(0)}(x_1,x_2,t)$ представляют собой вертикальное перемещение и повороты вокруг осей $x_1$ и $x_2$ точек срединной плоскости пластинки.

Остальные величины:

$$M_{11}^{(0)}, M_{22}^{(0)}, M_{12}^{(0)}, M_{21}^{(0)}, M_{33}^{(0)}, \Lambda_{13}^{(0)}, \Lambda_{23}^{(0)}, \Lambda_{31}^{(0)}, \Lambda_{32}^{(0)}, K_{11}^{(0)}, K_{22}^{(0)},$$

$K_{12}^{(0)}, K_{21}^{(0)}, K_{33}^{(0)}, \iota_{13}^{(0)}, \iota_{23}^{(0)}, \iota_{31}^{(0)}, \iota_{32}^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \Omega_3^{(0)}$ определяются после решения основной разрешающей системы уравнений (1.12)-(1.15) по формулам:

формулы типа физических соотношений

$$\begin{cases} M_{11}^{(0)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{Eh^3}{1-\upsilon^2}\left(K_{11}^{(0)} + \upsilon K_{22}^{(0)}\right) + \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} M_{33}^{(0)} \ (1 \rightleftarrows 2) \text{ где } M_{33}^{(0)} = \dfrac{2h^2}{3} Z \\ M_{12}^{(0)} = \dfrac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}^{(0)} + (\mu-\alpha)K_{21}^{(0)}\right] \ (1 \rightleftarrows 2) \\ \Lambda_{13}^{(0)} = \dfrac{2h^3}{3}\dfrac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\iota_{13}^{(0)} + \dfrac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Lambda_{31}^{(0)} \ (1 \to 2), \text{ где } \Lambda_{31}^{(0)} = \dfrac{2h^2}{3} m \ (1 \to 2, m \to p) \end{cases}$$

формулы типа геометрических соотношений

$$\begin{cases} \Gamma_{31}^{(0)} = \beta_1^{(0)} - O_2^{(0)}, \quad \Gamma_{32}^{(0)} = \beta_2^{(0)} + O_1^{(0)}, \quad K_{11}^{(0)} = \dfrac{\partial\beta_1^{(0)}}{\partial x_1} (1 \to 2), \quad K_{33}^{(0)} = 0 \\ K_{12}^{(0)} = \dfrac{\partial\beta_2^{(0)}}{\partial x_1} - \Omega_3^{(0)}, \ K_{21}^{(0)} = \dfrac{\partial\beta_1^{(0)}}{\partial x_2} - \Omega_3^{(0)}, \ k_{33}^{(0)} = \Omega_1^{(0)}, \ \iota_{13}^{(0)} = \dfrac{\partial\Omega_3^{(0)}}{\partial x_1} \ (1 \to 2), \ \iota_{31}^{(0)} = 0 \ (1 \to 2) \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \beta_1^{(0)} = \dfrac{1}{2h}\left|\dfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}N_{31}^{(0)} - \dfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}N_{13}^{(0)}\right| + O_2^{(0)}, \ \ \beta_2^{(0)} = \dfrac{1}{2h}\left|\dfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}N_{32}^{(0)} - \dfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}N_{23}^{(0)}\right| - O_1^{(0)} \\ \Omega_3^{(0)} = \dfrac{1}{2h}\left|\dfrac{\gamma+\beta}{\gamma(3\beta+2\gamma)}L_{33}^{(0)} - \dfrac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(L_{11}^{(0)} + L_{22}^{(0)}\right)\right| \end{cases}$$

Компоненты вектора перемещения и вектора независимого поворота точек трехмерного тела-пластинки выражаются формулами:

$$u_1 = x_3\beta_1^{(0)} \ (1 \to 2), \ u_3 = W^{(0)}, \quad \omega_1 = O_1^{(0)}(1 \to 2), \ \ \omega_3 = x_3\Omega_3^{(0)}$$

а компоненты силового и моментного тензоров напряжений, компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения будут определяться по выражениям:

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2h} N_{13}^{(0)} \left(1 \rightleftarrows 3, 1 \to 2, 2 \rightleftarrows 3\right), \; \sigma_{ij} = \frac{3}{2h^3} x_3 M_{ij}^{(0)} (ij:11, 22, 33, 12, 21)$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2h} L_{ij}^{(0)} (ij:11, 22, 33, 12, 21) \quad , \; \mu_{13} = \frac{3}{2h^3} x_3 \Lambda_{13}^{(0)} \left(1 \rightleftarrows 3, 1 \to 2, 2 \rightleftarrows 3\right)$$

$$\gamma_{13} = \Gamma_{13}^{(0)} \left(1 \rightleftarrows 3, 1 \to 2, 2 \rightleftarrows 3\right) \; , \; \gamma_{ij} = x_3 K_{ij}^{(0)} \; (ij:11, 22, 12, 21), \; \gamma_{33} = K_{33}^{(0)}$$

$$\chi_{ij} = k_{ij}^{(0)} (ij:11, 22, 33, 12, 21) \; , \; \chi_{13} = x_3 \iota_{13}^{(0)} (1 \to 2) \; , \; \chi_{31} = \iota_{31}^{(0)} (1 \to 2)$$

Вблизи боковой поверхности пластинки возникает напряженное состояние погранслоя по НТУ с НППВ, которое в квазистатическом приближении резко затухает при удалении от нее в глубь тела трехмерной пластинки. Введение этого напряженного состояния по НТУ дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности, сформулированным в терминах трехмерной НТУ с НППВ, установить граничные условия внутренней задачи и определить напряженное состояние вблизи края.

Считаем, что боковая цилиндрическая поверхность пластинки $\sum$ представляет собой замкнутый торец, и выбираем триортогональную систему координат $\alpha_i \; (i=1,2,3)$ так, чтобы она совмещалась с координатной поверхностью $\alpha_1 = \alpha_{10}$.

Погранслой около края $\alpha_1 = \alpha_{10}$ имеет большую изменяемость в направлении $\alpha_1$ и $\alpha_3$, а в направлении $\alpha_2$ и во времени имеет ту же изменяемость, что и внутреннее напряженное состояние.

В трехмерных уравнениях НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) в новых ортогональных криволинейных координатах $\alpha_i \; (i=1,2,3)$ вводим следующие замены:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = h\xi_1, \quad \alpha_2 = a\eta, \quad \alpha_3 = h\zeta, \quad t = t_0\tau \tag{1.17}$$

и перейдем к безразмерным величинам (1.8). Кроме того, коэффициенты Ляме и геодезические кривизны координатных линий $\alpha_1$ и $\alpha_2$ криволинейной системы координат представим в виде рядов Тейлора вблизи значения $\alpha_1 = \alpha_{10}$.

Решение преобразованных таким образом уравнений НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) представим в виде

$$R = \sum_{s=0}^{S} \delta^{-\chi+s} R^{(s)} \tag{1.18}$$

где $R$ – любое из безразмерных силовых и моментных напряжений, линейных безразмерных перемещений и независимых поворотов. Так как силовые и моментные неоднородные условия (1.4), заданные на лицевых плоскостях пластинки $\zeta = \pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (1.18) должно удовлетворять однородным граничным условиям на плоскостях $\zeta = \pm 1$:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0, \;\; \mu_{31} = \mu_{32} = \mu_{33} = 0 \;\; \text{при} \;\; \zeta = \pm 1.$$

После подстановки (1.18) в преобразованную с помощью (1.17) систему уравнений НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра $\delta$ в правых и левых частях, начиная с наинизшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно $R^{(s)}$, если

$$\bar{\sigma}_{ij} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \sigma_{ij}^{(s)}, \; \bar{\mu}_{ij} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \mu_{ij}^{(s)} \; (ij:11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32)$$

$$\bar{u}_i = \delta^{r+1}\sum_{s=0}^{S}\delta^s v_i^{(s)},\ \omega_i = \delta^{r+1}\sum_{s=0}^{S}\delta^s \omega_i^{(s)}\ \ (i = 1, 2, 3)$$

где целое число $r$ характеризует интенсивность погранслоя.

Полученную систему уравнений погранслоя по НТУ с НППВ в асимптотическом приближении ($s = 0$) можем представить в следующем виде:

а)
$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{11}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial\sigma_{31}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial\sigma_{13}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial\sigma_{33}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial t_1} = (2\mu' + \lambda')\sigma_{11}^{(0)} + \lambda'\left(\sigma_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)}\right)\\ 0 = (2\mu' + \lambda')\sigma_{22}^{(0)} + \lambda'\left(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)}\right),\ \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial\zeta} = (2\mu' + \lambda')\sigma_{33}^{(0)} + \lambda'\left(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)}\right)\\ \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial t_1} = (\mu' + \alpha')\sigma_{13}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{31}^{(0)},\ \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial\zeta} = (\mu' + \alpha')\sigma_{31}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{13}^{(0)}\end{gathered} \tag{1.19}$$

б)
$$\begin{gathered}\frac{\partial\mu_{11}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial\mu_{31}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial\mu_{13}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial\mu_{33}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial t_1} = (2\gamma' + \beta')\mu_{11}^{(0)} + \beta'\left(\mu_{22}^{(0)} + \mu_{33}^{(0)}\right)\\ 0 = (2\gamma' + \beta')\mu_{22}^{(0)} + \beta'\left(\mu_{11}^{(0)} + \mu_{33}^{(0)}\right),\ \frac{\partial\omega_3^{(0)}}{\partial\zeta} = (2\gamma' + \beta')\mu_{33}^{(0)} + \beta'\left(\mu_{11}^{(0)} + \mu_{22}^{(0)}\right)\\ \frac{\partial\omega_3^{(0)}}{\partial t_1} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{13}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{31}^{(0)},\ \frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial\zeta} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{31}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{13}^{(0)}\end{gathered} \tag{1.20}$$

в)
$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{12}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial\sigma_{32}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial t_1} = (\mu' + \alpha')\sigma_{12}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{21}^{(0)}\\ 0 = (\mu' + \alpha')\sigma_{21}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{12}^{(0)},\ 0 = (\mu' + \alpha')\sigma_{23}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{12}^{(0)}\\ \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial\zeta} = (\mu' + \alpha')\sigma_{32}^{(0)} + (\mu' - \alpha')\sigma_{23}^{(0)}\end{gathered} \tag{1.21}$$

г)
$$\begin{gathered}\frac{\partial\mu_{12}^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial\mu_{32}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial\omega_2^{(0)}}{\partial t_1} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{12}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{21}^{(0)}\\ 0 = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{21}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{12}^{(0)},\ 0 = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{23}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{32}^{(0)}\\ \frac{\partial\omega_2^{(0)}}{\partial\zeta} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{32}^{(0)} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{23}^{(0)}\end{gathered} \tag{1.22}$$

При $s = 0$, уравнения систем (1.19)-(1.22) однородны, независимы и совпадают с соответсвующими системами уравнений погранслоя статической задачи НТУ с НППВ для пластинки [12]. Таким образом, определение квазистатического погранслоя в динамической задаче НТУ с НППВ также, как и в статике [12], распадается на решение силового (плоского и антиплоского) и моментного (плоского и антиплоского) задач для полуполосы. Причем для динамических процессов, для которых изменяемость по времени $\omega$ определяется по (1.10) (для задачи изгиба), все четыре задачи силового и моментного погранслоев (1.19)-(1.22), как отметили, имеют квазистатический характер, т. е. инерционные члены (как поступательного движения, так и вращательного движения частиц тела пластинки) вообще не входят в уравнения ряда первых приближений, а в тех приближениях, в которых они проявляются, определяются через величины, известные из предыдущих приближений.

Итак, проблему раздельного построения дифференциальных уравнений внутренней задачи и квазистатических погранслоев в динамической теории пластин по НТУ с НППВ считаем решенной.

Таким образом, на основе структурной формулы (1.6), общее решение поставленной начально-краевой задачи НТУ с НППВ (1.1)-(1.5) можем представить в виде

$$J = \delta^{-q+s} \overset{\text{ин}}{Q}{}^{(s)} + \delta^{r+s} \overset{a}{R}{}^{(s)} + \delta^{\mu+s} \overset{p}{R}{}^{(s)} \tag{1.23}$$

где целые числа $r$ и $\mu$ характеризуют интенсивности соответственно для антиплоского и плоского погранслоев (по повторяющемуся индексу $s$ следует подразумевать сложение от $s=0$ до $s=S$). Величины $r$ и $\mu$ должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий НТУ с НППВ (1.5) на боковой цилиндрической поверхности пластинки.

Перейдем теперь к изучению проблемы разделения трехмерных граничных условий НТУ с НППВ на $\sum$, в рамках этого исследования необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия надо приписывать к внутренним и какие к погранслойным дифференциальным уравнениям НТУ с НППВ на каждом уровне асимптотического приближения.

Чтобы осуществить задачу сращивания решения внутренней задачи с решениями всех четырех типов квазистатических погранслоев, нам следует конкретизировать заданные на $\sum$ трехмерные граничные условия НТУ с НППВ. Для этого, далее рассмотрим случай, когда на всей боковой поверхности пластинки $(\alpha_1 = \alpha_{10})$ заданы пространственные граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ $\left(\sum_1 = \sum, \ \sum_2 = 0\right)$.

Таким образом, чтобы удовлетворить трехмерным граничным условиям (1.5) (при первой граничной задаче НТУ с НППВ), подставим туда (1.23) и приравним к нулю коэффициенты при соответствующих степенях $\delta$. При удовлетворении указанных граничных условий получим непротиворечивый итерационный процесс, если, как и в статике [12], $\chi = \mu = -1$ (для задачи изгиба пластинки по НТУ). Граничные условия в итерациях имеют такой же вид, как и в статике [12]. Отсюда следует, что двумерным динамическим уравнениям внутренней задачи по НТУ с НППВ (при $s=0$) соответствуют те же граничные условия, что и в статике [12]:

$$N_{11}^{(0)}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3, \quad L_{11}^{(0)}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_1^* d\alpha_3, \quad L_{12}^{(0)}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_2^* d\alpha_3 \tag{1.24}$$

Разрешающая система уравнений и граничные условия прикладной динамической теории изгиба тонких пластин на основе НТУ с НППВ из себя будут представлять уравнения (1.11)-(1.13) и граничные условия (1.24).

Начальные условия будут относиться к перемещениям, линейным скоростям, независимым поворотам и угловым скоростям точек срединной плоскости пластинки.

Отметим, что дифференциальный оператор системы уравнений прикладной двумерной теории пластин на основе НТУ с НППВ (1.12)-(1.15) с математической точки зрения является гиперболическим.

На основе системы уравнений (1.12)-(1.15) прикладной теории динамического изгиба микрополярной тонкой пластинки (когда трехмерная теория представляет собой НТУ с НППВ) можем изучать различные задачи собственных и вынужденных колебаний пластинки и выявить соответствующие динамические эффекты.

Особо хотим отметить, что уравнения (1.12)-(1.15) прикладной теории микрополярных пластин (по НТУ с НППВ) весьма идентичны с уравнениями общеизвестной уточняющей теории пластин С.А. Амбарцумяна [13,14] и теории Миндлина-Рейснера [14], только в данном случае сдвиги (угловые деформации) определяются по компонентам вектора независимого поворота точек пластинки. Важно на наш взгляд отметить и то, что для прикладной теории микрополярных пластин по НТУ с НППВ (1.12)-(1.15) имеются три граничные условия (1.24) на контуре области срединной плоскости пластинки.

2. При построении асимптотики (1.9), (1.10) для тонкой пластинки на основе НТУ с НППВ не были представлены какие-либо ограничения на материальные константы пластинки.

Оказывается, что если будем над новыми (в смысле микрополярности) безразмерными константами $\overline{\gamma}'$, $\overline{\varepsilon}'$ и $\overline{\beta}'$ ставить некоторые ограничения следующего характера

$$\overline{\gamma}' = \delta^{-2}\widetilde{\overline{\gamma}}', \quad \overline{\varepsilon}' = \delta^{-2}\widetilde{\overline{\varepsilon}}', \quad \overline{\beta}' = \delta^{-2}\widetilde{\overline{\beta}}' \tag{2.1}$$

(где безразмерные величины $\widetilde{\overline{\gamma}}'$, $\widetilde{\overline{\varepsilon}}'$, $\widetilde{\overline{\beta}}'$ считаются величинами порядка $\delta^0$), то для начально-краевой задачи (1.1)-(1.5) НТУ с НППВ для тонкой пластинки будет применима классическая асимптотика [15] (точнее, для перемещений и силовых напряжений верна классическая асимптотика, а для компонентов вектора поворота и моментных напряжений получим соответствующую асимптотику).

Таким образом, преобразуя систему уравнений (1.1)-(1.3) НТУ с НППВ на основе (1.7) и (1.8) с учетом (2.1) и решение внутренней задачи представляя в виде асимптотического разложения (1.9) в случае задачи изгиба, получим следующую асимптотику:

$$\begin{cases} q = 3 \text{ для } u_3, \omega_1, \omega_2 \\ q = 2 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, u_1, u_2, \omega_3 \\ q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21} \\ q = 0 \text{ для } \sigma_{33}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32} \\ \theta = -2, \; k = -2 \end{cases} \tag{2.2}$$

На основе асимптотики (2.2) из системы уравнений (1.1)-(1.3) (с учетом (1.7), (1.8), (1.9)) получим уравнения в асимптотических приближениях «$s$ ».

При $s = 0$ часть полученных уравнений можем интегрировать по $\zeta$, в результате, получим:

$$\overline{u}_3^{(0)} = \overline{w}^{(0)}$$

$$\overline{u}_1^{(0)} = \zeta \cdot \overline{v}_1^{(0)}, \quad \text{где} \quad \overline{v}_1^{(0)} = -\frac{\partial \overline{w}^{(0)}}{\partial \xi}; \quad \overline{u}_2^{(0)} = \zeta \cdot \overline{v}_2^{(0)}, \quad \text{где} \quad \overline{v}_2^{(0)} = -\frac{\partial \overline{w}^{(0)}}{\partial \eta}$$

$$\omega_1^{(0)} = \Omega_1^{(0)}, \quad \text{где} \quad \Omega_1^{(0)} = \frac{\partial \overline{w}^{(0)}}{\partial \eta}; \; \omega_2^{(0)} = \Omega_2^{(0)}, \quad \text{где} \quad \Omega_2^{(0)} = -\frac{\partial \overline{w}^{(0)}}{\partial \xi}$$

$$\overline{\sigma}_{11}^{(0)} = \zeta \cdot \overline{\tau}_{11}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \overline{\tau}_{11}^{(0)} = \frac{4\overline{\mu}(\overline{\lambda} + \overline{\mu})}{2\overline{\mu} + \overline{\lambda}} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{2\overline{\lambda}\overline{\mu}}{2\overline{\lambda} + \overline{\mu}} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \eta}$$

$$\overline{\sigma}_{22}^{(0)} = \zeta \cdot \overline{\tau}_{22}^{(0)}, \quad \text{где} \quad \overline{\tau}_{22}^{(0)} = \frac{4\overline{\mu}(\overline{\lambda} + \overline{\mu})}{2\overline{\mu} + \overline{\lambda}} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{2\overline{\lambda}\overline{\mu}}{2\overline{\lambda} + \overline{\mu}} \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \xi}$$

$$\overline{\mu}_{12}^{(0)} = \overline{\upsilon}_{12}^{(0)}, \qquad \text{где} \quad \overline{\upsilon}_{12}^{(0)} = \left(\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\right)\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\xi} + \left(\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\varepsilon}}\right)\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\eta}$$

$$\overline{\mu}_{21}^{(0)} = \overline{\upsilon}_{21}^{(0)}, \qquad \text{где} \quad \overline{\upsilon}_{21}^{(0)} = \left(\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\right)\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\eta} + \left(\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\varepsilon}}\right)\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\xi} \tag{2.3}$$

Как видно из представления (2.3), повороты $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ выражаются через производные от нормального к срединной плоскости пластинки перемещения $\overline{w}^{(0)}(\xi,\eta,\tau)$. Это означает, что в данном случае имеем дело с проявлением характера НТУ со стесненным вращением и, что главное, это явление получили исходя из теории НТУ с НППВ.

На основе (2.3) можем утверждать, что некоторая часть определяющих задачу величин $(\overline{u}_1^{(0)}, \overline{u}_2^{(0)}, \omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \overline{\sigma}_{11}^{(0)}, \overline{\sigma}_{22}^{(0)}, \overline{\mu}_{12}^{(0)}, \overline{\mu}_{21}^{(0)})$ выражается через прогиб пластинки $\overline{w}^{(0)}(\xi,\eta,\tau)$. Другая часть величин $(\omega_3^{(0)}, \overline{\sigma}_{31}^{(0)}, \overline{\sigma}_{32}^{(0)}, \overline{\sigma}_{12}^{(0)}, \overline{\sigma}_{21}^{(0)}, \overline{\mu}_{11}^{(0)}, \overline{\mu}_{22}^{(0)})$ выражается кроме этого и через величину $\overline{\mu}_{33}^{(0)}$, для определения которой приходим к дифференциальному уравнению (относительно поперечной к срединной плоскости пластинки координате $\zeta$) с соответствующими граничными условиями при $\zeta = \pm 1$:

$$\frac{\partial^2\overline{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{\overline{\alpha}'}\frac{\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}' + 3\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\tilde{\tilde{\gamma}}'}{\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'}\overline{\mu}_{33}^{(0)} = 0 \tag{2.4}$$

$$\overline{\mu}_{33}^{(0)}\Big|_{\zeta=\pm1} = \pm\tilde{\tilde{m}}_3^{\pm} \tag{2.5}$$

После решения граничной задачи (2.4), (2.5) и определения $\overline{\mu}_{33}^{(0)}$:

$$\overline{\mu}_{33}^{(0)} = \tilde{\tilde{q}}\,\frac{\mathrm{ch}\overline{P}\zeta}{\mathrm{ch}\overline{P}} \quad \text{где} \quad \tilde{\tilde{q}} = \frac{\tilde{\tilde{m}}_3^{+} - \tilde{\tilde{m}}_3^{-}}{2}, \qquad \overline{P} = \frac{4\overline{\alpha}}{2\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\beta}}} \tag{2.6}$$

указанные выше величины определяются по формулам:

$$\omega_3^{(0)} = \overline{\alpha}'\frac{\partial\overline{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial\zeta}, \;\; \overline{\mu}_{11}^{(0)} = \frac{2\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'}{4\tilde{\tilde{\gamma}}'\left(\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'\right)}\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\tilde{\tilde{\beta}}'}{4\tilde{\tilde{\gamma}}'\left(\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'\right)}\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\eta} - \frac{\tilde{\tilde{\beta}}'}{2\left(\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'\right)}\overline{\mu}_{33}^{(0)}$$

$$\overline{\mu}_{22}^{(0)} = \frac{2\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'}{4\tilde{\tilde{\gamma}}'\left(\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'\right)}\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\eta} - \frac{\tilde{\tilde{\beta}}'}{4\tilde{\tilde{\gamma}}'\left(\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'\right)}\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\tilde{\tilde{\beta}}'}{2\left(\tilde{\tilde{\gamma}}' + \tilde{\tilde{\beta}}'\right)}\overline{\mu}_{33}^{(0)}$$

$$\overline{\sigma}_{12}^{(0)} = -\zeta\frac{1}{2\overline{\mu}'}\frac{\partial^2\overline{w}^{(0)}}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial\zeta}, \quad \overline{\sigma}_{21}^{(0)} = -\zeta\frac{1}{2\overline{\mu}'}\frac{\partial^2\overline{w}^{(0)}}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\mu}_{33}^{(0)}}{\partial\zeta}$$

$$\overline{\sigma}_{31}^{(0)} = -\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial\tau_{11}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2\overline{\mu}'}\frac{\partial^3\overline{w}^{(0)}}{\partial\xi\partial\eta^2}\right) - \frac{1}{2\mathrm{ch}\overline{P}}\frac{\partial\tilde{\tilde{q}}}{\partial\eta}\left(\mathrm{ch}\overline{P}\zeta - 1\right) + \overline{\tau}_{31}^{(0)}$$

$$\text{где } \overline{\tau}_{31}^{(0)} = \tilde{\tilde{X}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tau_{11}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2\overline{\mu}'}\frac{\partial^3\overline{w}^{(0)}}{\partial\xi\partial\eta^2}\right) + \frac{1}{2\mathrm{ch}\overline{P}}\frac{\partial\tilde{\tilde{q}}}{\partial\eta}\left(\mathrm{ch}\overline{P} - 1\right), \quad \tilde{\tilde{X}} = \frac{\tilde{\tilde{p}}_1^{+} - \tilde{\tilde{p}}_1^{-}}{2}$$

$$\overline{\sigma}_{32}^{(0)} = -\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial\tau_{22}^{(0)}}{\partial\eta} - \frac{1}{2\overline{\mu}'}\frac{\partial^3\overline{w}^{(0)}}{\partial\xi^2\partial\eta}\right) + \frac{1}{2\mathrm{ch}\overline{P}}\frac{\partial\tilde{\tilde{q}}}{\partial\xi}\left(\mathrm{ch}\overline{P}\zeta - 1\right) + \overline{\tau}_{32}^{(0)} \tag{2.7}$$

где $\tau_{32}^{(0)} = \tilde{\tilde{Y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau_{22}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{1}{2\overline{\mu}}\frac{\partial^3 \overline{w}^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \eta}\right) - \frac{1}{2\mathrm{ch}\overline{P}}\frac{\partial \tilde{\tilde{q}}}{\partial \xi}(\mathrm{ch}\overline{P} - 1)$, $\quad \tilde{\tilde{Y}} = \frac{\tilde{\tilde{p}}_2^+ - \tilde{\tilde{p}}_2^-}{2}$

Отметим, что относительно величин $\overline{\mu}_{31}^{(0)}$ и $\overline{\mu}_{32}^{(0)}$ тоже приходим к отдельным дифференциальным уравнениям и граничным условиям (относительно координаты $\zeta$):

$$
\left(\frac{1}{4\overline{\alpha}} + \frac{1}{4\overline{\mu}}\right)\frac{\partial^2 \overline{\mu}_{31}^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\overline{\mu}_{31}^{(0)} = \frac{\overline{\lambda}}{2\overline{\mu}(3\overline{\lambda} + 2\overline{\mu})}\zeta\left(\frac{\partial \overline{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \overline{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \eta}\right) +
$$

$$
+\frac{1}{2\overline{\mu}}\frac{\partial \overline{\sigma}_{32}^{(0)}}{\partial \zeta} - \frac{\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{4\overline{\alpha}} + \frac{1}{4\overline{\mu}}\right)\frac{\partial^2 \overline{\mu}_{11}^{(0)}}{\partial \xi \partial \zeta} \tag{2.8}
$$

$$
\overline{\mu}_{31}^{(0)}\Big|_{\zeta=\pm 1} = \pm \tilde{\tilde{m}}_1^{\pm}
$$

$$
\begin{cases}
\left(\frac{1}{4\overline{\alpha}} + \frac{1}{4\overline{\mu}}\right)\frac{\partial^2 \overline{\mu}_{32}^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\overline{\mu}_{32}^{(0)} = -\frac{\overline{\lambda}}{2\overline{\mu}(3\overline{\lambda} + 2\overline{\mu})}\zeta\left(\frac{\partial \overline{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial \xi}\right) - \\
-\frac{1}{2\overline{\mu}}\frac{\partial \overline{\sigma}_{31}^{(0)}}{\partial \zeta} - \frac{\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \eta} - \left(\frac{1}{4\overline{\alpha}} + \frac{1}{4\overline{\mu}}\right)\frac{\partial^2 \overline{\mu}_{22}^{(0)}}{\partial \eta \partial \zeta} \\
\overline{\mu}_{32}^{(0)}\Big|_{\zeta=\pm 1} = \pm \tilde{\tilde{m}}_2^{\pm}
\end{cases} \tag{2.9}
$$

После решения граничных задач (2.8) и (2.9) можем определить следующие величины:

$$
\overline{\mu}_{13}^{(0)} = \frac{\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\overline{\mu}_{31}^{(0)} + \frac{4\tilde{\tilde{\gamma}}\tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \overline{\mu}_{23}^{(0)} = \frac{\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\overline{\mu}_{32}^{(0)} + \frac{4\tilde{\tilde{\gamma}}\tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\gamma}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}}\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \eta}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{13}^{(0)} &= \overline{\sigma}_{31}^{(0)} + \frac{\partial \overline{\mu}_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{\mu}_{22}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \overline{\mu}_{32}^{(0)}}{\partial \zeta} - \overline{J}\frac{\partial^2 \omega_2^{(0)}}{\partial t^2} \\
\overline{\sigma}_{23}^{(0)} &= \overline{\sigma}_{32}^{(0)} - \frac{\partial \overline{\mu}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \overline{\mu}_{21}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \overline{\mu}_{31}^{(0)}}{\partial \zeta} + \overline{J}\frac{\partial^2 \omega_1^{(0)}}{\partial t^2} \\
\overline{\sigma}_{33}^{(0)} &= \int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial^2 \overline{w}^{(0)}}{\partial t^2} - \frac{\partial \overline{\sigma}_{13}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \overline{\sigma}_{23}^{(0)}}{\partial \eta}\right)d\zeta
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

После перехода к размерным величинам и к усредненным по толщине пластинки силовым и моментным характеристикам, разрешающую систему уравнений микрополярной тонкой пластинки можем представить в следующем виде:

уравнения движения

$$
\frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial x_2} = 2h\rho\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2} - 2Z
$$

$$
\frac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2} + N_{23}^{(0)} - N_{32}^{(0)} = 2hJ\frac{\partial^2 O_1^{(0)}}{\partial t^2} - 2m_1 \quad \text{где} \quad O_1^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_2}
$$

$$\frac{\partial L_{12}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_2}+N_{31}^{(0)}-N_{13}^{(0)}=2hJ\frac{\partial^2 O_2^{(0)}}{\partial t^2}-2p,\quad \text{где } O_2^{(0)}=-\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_1}\tag{2.11}$$

уравнения физических соотношений

$$M_{11}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2}+\upsilon\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2}\right),\quad M_{12}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1+\upsilon}\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{2}L_{33}^{(0)}-hq$$

$$M_{22}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2}+\upsilon\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2}\right),\quad M_{21}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1+\upsilon}\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{2}L_{33}^{(0)}+hq\tag{2.12}$$

$$L_{11}^{(0)}=4h\gamma\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\beta}{2\gamma+\beta}L_{33}^{(0)},\quad L_{12}^{(0)}=-2h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2}+2h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2}$$

$$L_{22}^{(0)}=-4h\gamma\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\beta}{2\gamma+\beta}L_{33}^{(0)},\quad L_{21}^{(0)}=2h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_2^2}-2h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x_1^2}$$

к которым следует присоединить полученные для $N_{31}^{(0)}$, $N_{32}^{(0)}$ и $L_{33}^{(0)}$ выражения

$$N_{31}^{(0)}=\frac{\partial M_{11}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}^{(0)}}{\partial x_2}+2hX,\quad N_{32}^{(0)}=\frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}^{(0)}}{\partial x_2}+2hY$$

$$L_{33}^{(0)}=\frac{2\gamma+\beta}{2\alpha}\frac{q}{h}\,\mathrm{th}\,\frac{4h^2\alpha}{2\gamma+\beta}\tag{2.13}$$

В (2.11)–(2.13) следует учесть также (1.15).

На основании систем уравнений (2.11)-(2.13) можем приходить к решению следующего разрешающего уравнения относительно перемещения $W^{(0)}(x_1,x_2)$:

$$\left[2h(\gamma+\varepsilon)+\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\upsilon^2}\right]\nabla^2\nabla^2 W^{(0)}=$$

$$=2h\left(J\nabla^2\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2}\right)+2Z+2h\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}+\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)+2\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}-\frac{\partial m}{\partial x_2}\right)\tag{2.14}$$

Аналогичным образом (как в пункте 1) изучая погранслойное явление около боковой поверхности пластинки (имеем ввиду погранслой квазистатического характера), и далее, методом сращивания внутренней задачи и погранслоя (для первой граничной задачи НТУ с НПВ) получим следующие граничные условия (которые необходимо присоединить к дифференциальному уравнению (2.14)):

$$M_{11}^{(0)}+L_{12}^{(0)}=\int_{-h}^{h}p_1^*x_3dx_3+\int_{-h}^{h}m_2^*dx_3$$

$$N_{13}^{(0)}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(M_{12}^{(0)}-L_{11}^{(0)}\right)=\int_{-h}^{h}p_3^*dx_3+\int_{-h}^{h}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(p_2^*x_3-m_1^*\right)dx_3\tag{2.15}$$

К уравнению (2.14) следует присоединить также начальные условия для $W^{(0)}(x_1,x_2,t)$ и $\partial W^{(0)}(x_1,x_2,t)/\partial t$.

Рассмотрим теперь пластинку на основе НТУ со стесненным вращением (псевдоконтинуума Коссера) [2,16]. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи НТУ со стесненным вращением (СВ) [2,16]:

уравнения движения

$$\sigma_{ji,j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\qquad \mu_{ji,j}+\ni_{ijk}\sigma_{jk}=J\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2}\tag{2.16}$$

соотношения упругости

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)=2\mu\gamma_{ij}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \quad \mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji} \tag{2.17}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right), \quad k_{ij}=\omega_{j,i}, \quad \omega_i=\frac{1}{2}\,э_{ijk}u_{k,j} \tag{2.18}$$

К уравнениям будем присоединять граничные условия на плоскостях $\zeta=\pm1$; граничные условия на боковой цилиндрической поверхности пластинки и начальные условия .

В трехмерных уравнениях НТУ со СВ (2.16)-(2.18) перейдем к безразмерным величинам (1.8) и выполним замену независимых переменных (1.7). Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения (1.9). Далее, получим рекуррентную систему уравнений в асимптотических приближениях. если асимптотика поставленной задачи будет выражаться именно по (2.2).

При $(s=0)$ из полученной системы часть величин можно получить интегрированием по переменной $\zeta$, в результате получим:

$$\bar u_3^{(0)}=\bar w^{(0)}$$

$$\bar u_1^{(0)}=\zeta\cdot\bar v_1^{(0)},\ \text{где}\quad \bar v_1^{(0)}=-\frac{\partial\bar w^{(0)}}{\partial\xi};\quad \bar u_2^{(0)}=\zeta\cdot\bar v_2^{(0)},\ \text{где}\quad \bar v_2^{(0)}=-\frac{\partial\bar w^{(0)}}{\partial\eta}$$

$$\omega_1^{(0)}=\Omega_1^{(0)},\ \text{где}\quad \Omega_1^{(0)}=\frac{\partial\bar w^{(0)}}{\partial\eta};\quad \omega_2^{(0)}=\Omega_2^{(0)},\ \text{где}\quad \Omega_2^{(0)}=-\frac{\partial\bar w^{(0)}}{\partial\xi}$$

$$\bar\sigma_{11}^{(0)}=\zeta\cdot\bar\tau_{11}^{(0)},\ \text{где}\quad \bar\tau_{11}^{(0)}=\frac{4\bar\mu\left(\bar\lambda+\bar\mu\right)}{2\bar\mu+\bar\lambda}\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{2\bar\lambda\bar\mu}{2\bar\lambda+\bar\mu}\frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial\eta}$$

$$\bar\sigma_{22}^{(0)}=\zeta\cdot\bar\tau_{22}^{(0)},\ \text{где}\quad \bar\tau_{22}^{(0)}=\frac{4\bar\mu\left(\bar\lambda+\bar\mu\right)}{2\bar\mu+\bar\lambda}\frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial\eta}+\frac{2\bar\lambda\bar\mu}{2\bar\lambda+\bar\mu}\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial\xi}$$

$$\bar\sigma_{12}^{(0)}=\zeta\cdot\bar\tau_{12}^{(0)},\ \text{где}\quad \bar\tau_{12}^{(0)}=\bar\mu\left(\frac{\partial\bar v_2^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar v_1^{(0)}}{\partial\eta}\right)\ (1\to2)$$

$$\bar\sigma_{31}^{(0)}=-\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial\bar\tau_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar\tau_{21}^{(0)}}{\partial\eta}\right)+\bar\tau_{31}^{(0)}\quad\text{где}\quad \bar\tau_{31}^{(0)}=\tilde{\bar X}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar\tau_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar\tau_{21}^{(0)}}{\partial\eta}\right)$$

$$\bar\sigma_{32}^{(0)}=-\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial\bar\tau_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar\tau_{22}^{(0)}}{\partial\eta}\right)+\bar\tau_{32}^{(0)}\quad\text{где}\quad \bar\tau_{32}^{(0)}=\tilde{\bar Y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar\tau_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar\tau_{22}^{(0)}}{\partial\eta}\right)$$

$$\bar\mu_{12}^{(0)}=\bar\upsilon_{12}^{(0)},\quad\text{где}\quad \bar\upsilon_{12}^{(0)}=\left(\tilde{\bar\gamma}+\tilde{\bar\varepsilon}\right)\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\xi}+\left(\tilde{\bar\gamma}-\tilde{\bar\varepsilon}\right)\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\eta}$$

$$\bar\mu_{21}^{(0)}=\bar\upsilon_{21}^{(0)},\ \text{где}\quad \bar\upsilon_{21}^{(0)}=\left(\tilde{\bar\gamma}+\tilde{\bar\varepsilon}\right)\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\eta}+\left(\tilde{\bar\gamma}-\tilde{\bar\varepsilon}\right)\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\xi}$$

$$\bar\mu_{11}^{(0)}=\bar\upsilon_{11}^{(0)},\ \text{где}\quad \bar\upsilon_{11}^{(0)}=2\tilde{\bar\gamma}\,\frac{\partial\Omega_1^{(0)}}{\partial\xi};\quad \bar\mu_{22}^{(0)}=\bar\upsilon_{21}^{(0)},\ \text{где}\quad \bar\upsilon_{22}^{(0)}=2\tilde{\bar\gamma}\,\frac{\partial\Omega_2^{(0)}}{\partial\eta} \tag{2.19}$$

$$\bar\mu_{33}^{(0)}=0\ ,\quad \omega_3^{(0)}=0$$

Отметим, что относительно величин $\overline{\mu}_{31}^{(0)}$ и $\overline{\mu}_{32}^{(0)}$ тоже приходим к отдельным дифференциальным уравнениям и граничным условиям (относительно координаты $\zeta$):

$$\frac{1}{4\overline{\mu}}\frac{\partial^2\overline{\mu}_{31}^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\overline{\overline{\gamma}}+\overline{\overline{\varepsilon}}}\overline{\mu}_{31}^{(0)}=\frac{\overline{\lambda}}{2\overline{\mu}(3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})}\zeta\left(\frac{\partial\overline{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\overline{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{2\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{\sigma}_{32}^{(0)}}{\partial\zeta}$$

$$\left.\overline{\mu}_{31}^{(0)}\right|_{\zeta=\pm1}=\pm\tilde{\tilde{m}}_1^{*} \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{4\overline{\mu}}\frac{\partial^2\overline{\mu}_{32}^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\overline{\overline{\gamma}}+\overline{\overline{\varepsilon}}}\overline{\mu}_{32}^{(0)}=-\frac{\overline{\lambda}}{2\overline{\mu}(3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})}\zeta\left(\frac{\partial\overline{\tau}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overline{\tau}_{22}^{(0)}}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{2\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{\sigma}_{31}^{(0)}}{\partial\zeta}$$

$$\left.\overline{\mu}_{32}^{(0)}\right|_{\zeta=\pm1}=\pm\tilde{\tilde{m}}_2^{*} \tag{2.21}$$

После решения систем уравнений (2.20) и (2.21) остальные величины (связанные с $\overline{\mu}_{31}^{(0)}$ и $\overline{\mu}_{32}^{(0)}$) определятся (также как и в предыдущем случае) по формулам (2.10).

Переходя к размерным величинам и к интегральным характеристикам (1.11), можем разрешающую систему уравнений представить в следующем виде:

уравнения типа уравнений движения

$$\frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial x_2}=2h\rho\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial t^2}-2Z$$

$$\frac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2}+N_{23}^{(0)}-N_{32}^{(0)}=2hJ\frac{\partial^2O_1^{(0)}}{\partial t^2}-2m,\quad \text{где}\quad O_1^{(0)}=\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_2} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial L_{12}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_2}+N_{31}^{(0)}-N_{13}^{(0)}=2hJ\frac{\partial^2O_2^{(0)}}{\partial t^2}-2p,\quad \text{где}\quad O_2^{(0)}=-\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_1}$$

уравнения типа физических соотношений

$$M_{11}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1^2}+\upsilon\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_2^2}\right),\quad M_{12}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1+\upsilon}\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$M_{22}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_2^2}+\upsilon\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1^2}\right),\quad M_{21}^{(0)}=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1+\upsilon}\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2} \tag{2.23}$$

$$L_{11}^{(0)}=4h\gamma\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2},\quad L_{12}^{(0)}=-2h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1^2}+2h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_2^2}$$

$$L_{22}^{(0)}=-4h\gamma\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2},\quad L_{21}^{(0)}=2h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_2^2}-2h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2W^{(0)}}{\partial x_1^2}.$$

к которым следует присоединить полученные для $N_{31}^{(0)}$, $N_{32}^{(0)}$ и $L_{33}^{(0)}$ выражения

$$N_{31}^{(0)}=\frac{\partial M_{11}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}^{(0)}}{\partial x_2}+2hX,\quad N_{32}^{(0)}=\frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}^{(0)}}{\partial x_2}+2hY,\quad L_{33}^{(0)}=0 \tag{2.24}$$

Отметим, что в исходном ($s=0$) асимптотическом приближении внутреннего итерационного процесса из систем уравнений (2.22)-(2.24) и в данном случае тоже, приходим к разрешающему уравнению (2.14).

Аналогичным образом, как и в предыдущем случае, изучая погранслой (квазистатический) около боковой поверхности пластинки и применяя метод сращивания асимптотических разложений, приходим к граничным условиям (2.15) (для первой граничной задачи НТУ со СВ).

Здесь следует заметить, что при $\alpha \to \infty$ все величины и уравнения микрополярной пластинки со СВ на основе НТУ с НППВ ((2.3)-(2.15), принимая $q = 0$) будут совпадать с их аналогами по НТУ со СВ ((2.19)-(2.24)).

Отметим, что для статического случая уравнение (2.14) и граничные условия (2.15) совпадают со соответствующим уравнением и граничным условием, которые получены в работах [17,18], используя метод гипотез в НТУ со СВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван.: Изд-во НАН Армении, 1999.-214 с.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity.: Oxford New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt: Pergamon Press, 1986.-384 p.
3. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука , 1971.С. 54-59.
4. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.-256 с.
5. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories 1999 Springer-Verlag New York, Inc. I: Foundations and Solids.-325 p. II: Fluent Media.-342 p.
6. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
7. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399-1409.
8. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и приклад. механике. Вып 3. М.: Наука, 1966. С. 116-136.
9. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976.-512 с.
10. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.-415 с.
11. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван.: Изд-во АН Армении. 1992.-260 с.
12. Саркисян С.О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Посвященной 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван.: Изд-во НАН Армении. 2002. С. 285-296.
13. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987.-360 с.
14. Christian Decolon Analysis of Composite Structures. Paris Hermes Science Publications. 2002.-336 p.
15. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1072-1078.
16. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3 С. 89-112.
17. Геворгян Г.А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // ПМ. 1966. Т. 2. Вып. 10. С. 36-43.
18. Хоффмэн О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // ПМ. Тр. американск. об-ва инж. мех. Серия Е. 1964. Т. 31. №4. С. 149-150.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 21.06.2004