УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ,
УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.С.

Գրիգորյան Է.Խ., Սարգսյան Կ.Ս.

Կոնտակտային խնդիր երկու անվերջ ստրինգերներով ուժեղացված առանձնական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ համասեռ սալի խնդիրը, որը ուժեղացված է երկու անվերջ անվերջ առանձնական ստրինգերներով: Սալը դեֆորմացվում է ստրինգերների վրա ազդող ուժերի ազդեցության տակ, որոնք ուղղված են ստրինգերներով: Ֆորմիչի ձևափոխության օգնությամբ որոշված են կոնտակտային տանգենցիալ լարումները և ստրինգերներում նորմալ լարումները: Այդ լարումների համար ստացված են ախնապատական բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի ազդման կետերի շրջակայքում և նրանցից հեռու կետերում:

Grigoryan E.Kh., Sargsyan K.S.

The contact problem for elastic plate strengthened by two infinite stringers

В работе рассматривается задача для бесконечной однородной пластины, усиленной двумя бесконечными параллельными упругими стрингерами. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к стрингерам и направленных вдоль стрингеров. С помощью преобразования Фурье определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, действующие в стрингерах. Для этих напряжений получены асимптотические формулы, характеризующие поведение этих напряжений вблизи и вдалеке от точек приложений сил.

1. Пусть бесконечная однородная пластина малой постоянной толщины H усилена двумя параллельными бесконечными стрингерами и деформируется под действием сосредоточенных сил, приложенных к стрингерам и направленных вдоль стрингеров.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений и нормальных напряжений в стрингерах.

Задача для упругой пластины, усиленной одним бесконечным стрингером, рассматривалась в работах [1,2].

В рассматриваемом случае уравнения равновесия пластины запишутся в виде:

$$\begin{aligned} (\lambda' + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda' + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X(x; y) &= 0 \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda' + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda' + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$
$$(-\infty < x < \infty; -x < y < x)$$

где

$$X(x; y) = \frac{1}{H} [P(x; a)\delta(y - a) + P(x; -a)\delta(y + a)]$$

$$P(x; a) = b\tau(x; a); \quad P(x; -a) = b\tau(x; -a).$$

$\tau(x; a)$; $\tau(x; -a)$ – контактные напряжения, b – ширина стрингеров.

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda \text{ и } \mu \text{ – упругие постоянные Ламе.}$$

Учитывая модель контакта по линии, уравнение равновесия стрингера при $y = a$, когда на него действует сосредоточенная сила $R\delta(x)$, запишется в виде:

$$F_s \frac{dq(x; a)}{dx} - P(x; a) + R\delta(x) = 0 \quad (1.2)$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s) ds = R \quad (1.2)$$

где $q(x; a)$ – интенсивность нормальных напряжений стрингера, $F_s = hb$ – площадь поперечного сечения стрингера, h – толщина стрингера.

Отдельно рассмотрим четную задачу, когда силы, действующие на стрингеры, имеют одинаковые направления и величины ($R = R_1$; $q(x; a) = q_1(x)$) и нечетную задачу, когда действующие силы имеют противоположные направления ($R = R_1$; $q(x; a) = q_2(x)$).

Рассмотрим четную задачу. В этом случае $P(x; a) = P(x; -a) = P_1(x)$, естественно $u(x; a) = u(x; -a)$, следовательно

$$X(x; y) = \frac{P_1(x)}{H} [\delta(y - a) + \delta(y + a)] \quad (1.3)$$

Применив к уравнениям (1.1) преобразование Фурье по переменной x и разрешив полученные уравнения относительно $\bar{u}_1(\sigma; y)$ и $\bar{v}_1(\sigma; y)$ при $y = a$, получим:

$$\bar{u}_1(\sigma; a) = \bar{P}_1(\sigma) \left\{ \left[\frac{(\lambda^* + 3\mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|} - \frac{(\lambda^* + \mu)}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H} \cdot a \right] e^{-2|\sigma|a} + \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|} \right\} \quad (1.4)$$

$$\tilde{f}(\sigma) = \int f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Уравнение равновесия струнгиера (1.2) запишем в перемещениях, имея в виду, что $q_1(x) = E_s \frac{du_s}{dx}$.

$$\frac{d^2 u_s}{dx^2} - \frac{P_1(x)}{F_s E_s} + \frac{R_1 \delta(x)}{F_s E_s} = 0 \quad (1.5)$$

где E_s – модуль упругости струнгиера.

Применив к уравнению (1.5) преобразование Фурье, получим:

$$-\sigma^2 \bar{u}_s(\sigma) = \frac{\bar{P}_1(\sigma)}{F_s E_s} - \frac{R_1}{F_s E_s} \quad (1.6)$$

Далее имея в виду условие контакта

$$u_1(x; a) = u_s(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.7)$$

для $\bar{P}_1(\sigma)$ получим

$$\bar{P}_1(\sigma) = \frac{TR_1}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a - ka\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (1.8)$$

где

$$T = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \cdot \frac{H}{F_s E_s}; \quad k = \frac{2(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 3\mu} \quad (1.9)$$

Применив к уравнению (1.2) преобразование Фурье, для определения $\bar{q}(\sigma)$ получим:

$$-i\sigma \bar{q}_1(\sigma) = \frac{\bar{P}_1(\sigma)}{F_s} - \frac{R_1}{F_s} \quad (1.10)$$

Отсюда

$$\bar{q}_1(\sigma) = \frac{i\bar{P}_1(\sigma)}{\sigma F_s} - \frac{iR_1}{F_s \sigma} + c\delta(\sigma)$$

Так как $q_1(x)$ – нечетная функция, то и $\bar{q}_1(\sigma)$ – нечетная функция, следовательно, $c = 0$.

Таким образом, для $\bar{q}_1(\sigma)$ получим:

$$\bar{q}_1(\sigma) = \frac{iR_1}{F_s} \cdot \frac{ka\sigma e^{-2|\sigma|a} - 2\operatorname{sgn} \sigma e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a - ka\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (1.11)$$

Окончательно для искоемых величин $P_1(x)$ и $q_1(x)$ получим:

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x d\sigma}{T + 2\sigma e^{-\sigma a} \operatorname{ch} \sigma a - ka\sigma^2 e^{-2\sigma a}} \quad (1.12)$$

$$q_1(x) = \frac{R_1}{\pi F_s} \int_0^{\infty} \frac{(ka\sigma e^{-2\sigma a} - 2e^{-\sigma a} \operatorname{ch} \sigma a) \sin \sigma x}{T + 2\sigma e^{-\sigma a} \operatorname{ch} \sigma a - ka\sigma^2 e^{-2\sigma a}} d\sigma$$

Интересно заметить, что при $a \rightarrow 0$ для $P_1(x)$ получим:

$$P_1(x) = \frac{7R_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T/2 + \sigma} d\sigma$$

из которого видно, что жесткость стрингеров удваивается. Это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается.

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_1(x)$, когда $|x| \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что при $|\sigma| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(\sigma) = R_1 \left\{ 1 - \frac{2|\sigma|}{T} + \frac{(2+k)aT + 4}{T^2} \sigma^2 - \frac{2(1+k)a^2T^2 + 4(2+k)aT + 8}{T^3} |\sigma|^3 + \right. \\ \left. + \frac{(4/3 + 2k)a^3T^2 + (k^2 - 12k + 12)a^2T + 12(2+k)a}{T^3} \sigma^4 \right\} + O(|\sigma|^5) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тогда по известному свойству интеграла Фурье получим при $|x| \rightarrow \infty$:

$$P_1(x) = \frac{R_1}{\pi} \left\{ \frac{2T}{(Tx)^2} - \frac{6T}{(Tx)^3} [2(1+k)a^2T^2 + 4(2+k)aT + 8] \right\} + O(x^{-6}) \quad (1.14)$$

Здесь были использованы формулы [3]

$$\begin{aligned} F^{-1} [|\sigma|^{2n+1}] &= (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!}{\pi} x^{-2n-2} \\ F^{-1} [\sigma^{2n}] &= (-1)^n \delta^{(2n)}(x), \quad n = 0; 1; 2; \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $F[\]$ — обобщенное преобразование Фурье, а $F^{-1}[\]$ — обратное преобразование.

Для получения асимптотической формулы $q_1(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, пользуясь формулой (1.2) и (1.2) выражение $q_1(x)$ запишем в виде:

$$q_1(x) = \frac{1}{F_s} \int_x^{\infty} P_1(s) ds - \frac{R_1}{F_s} \Theta(-x) \quad (1.16)$$

Далее имея в виду нечетность функции $q_1(x)$ из формулы (1.16) с учетом (1.14) при $|x| \rightarrow \infty$ получим:

$$q_1(x) = \frac{R_1}{\pi F_s} \left\{ \frac{2}{Tx} - \frac{2T}{(Tx)^3} [2(1+k)a^2T^2 + 4(2+k)aT + 8] \right\} + O(x^{-5}) \quad (1.17)$$

Определим асимптотические формулы для $P_1(x)$ и $q_1(x)$ при $|x| \rightarrow 0$.

Для этого представим $P_1(x)$ в виде

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(ks^2 - s)e^{-2s} \cos \frac{sx}{a} ds}{(T^* + s + se^{-2s} - ks^2 e^{-2s})(T^* + s)} + \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma \quad (1.18)$$

$$T^* = Ta$$

Заметим, что при $a \rightarrow \infty$ из (1.18) получится решение задачи для одного стрингера [1.2], который имеет вид

$$\frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma = \frac{TR_1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(xT) \right] \sin(xT) - \text{Ci}(xT) \cos(xT) \right\}$$

$$0 < x < \infty \quad (1.19)$$

Получим представление интеграла (1.19) в виде ряда, для чего разложим подынтегральное выражение в ряд при $\sigma \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{T + \sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T^{n+1}}{\sigma^{n+2}}$$

Тогда в силу свойства интеграла Фурье будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} T^{2m} F^{-1} \left[|\sigma|^{-2m-1} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} T^{2m-1} F^{-1} \left[\sigma^{-2m-2} \right] \quad |x| \rightarrow 0 \quad (1.20)$$

где [3]

$$F^{-1} \left[|\sigma|^{-2m-1} \right] = (-1)^m \frac{x^{2m}}{\pi(2m)!} \left[\psi(2m+1) - \psi(1) + C - \ln|x| \right]$$

$$F^{-1} \left[\sigma^{-2m-2} \right] = (-1)^{m-1} \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m+1)!} \quad m = 0; 1; 2; \dots \quad (1.21)$$

где C — неизвестная постоянная, подлежащая определению, $\psi(z)$ — известная функция пси

Для определения C интеграл (1.20) представим в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \sigma x}{T + \sigma} d\sigma = ix \left[\int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{T}{\sigma} \right) \sin \sigma x d\sigma + \int_0^{\infty} \ln \frac{\sigma}{T} \sin \sigma x d\sigma \right] \quad (1.22)$$

где

$$ix \int_0^{\infty} \ln \frac{\sigma}{T} \sin \sigma x d\sigma = \psi(1) - \ln(Tx)$$

Сопоставляя формулы (1.20) и (1.22) при $|x| \rightarrow 0$, получим $C = \psi(1)$.

Таким образом, получим следующее:

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(xT) \right] \sin(xT) - \text{Ci}(xT) \cos(xT) \right\} = \frac{1}{\pi} [\psi(1) - \ln(Tx)] + \frac{T|x|}{2} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m (Tx)^{2m}}{\pi(2m)!} [\psi(2m+1) - \ln(Tx)] + \frac{1}{2} \frac{|Tx|^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} \quad (1.23)$$

где ряд сходится при любых x .

Окончательно для $P_1(x)$ при $|x| < a$ получим:

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a} \right)^{2m-2} A_m + \psi(1) - \ln(Tx) + \frac{\pi T|x|}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m}}{(2m)!} [\psi(2m+1) - \ln(Tx)] + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(T|x|)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} \quad (1.24)$$

где

$$A_m = \int_0^{\infty} \frac{(ks^2 - s)s^{2(m-1)}e^{-2s} ds}{(T^* + s + se^{-2s} - ks^2 e^{-2s})(T^* + s)} \quad (1.25)$$

Можно утверждать, что первый ряд в (1.24) сходится по крайней мере при $|x| < a$.

Для получения асимптотической формулы для $q_1(x)$, когда $|x| \rightarrow 0$, воспользуемся следующим представлением (1.2), (1.2'):

$$q_1(x) = \frac{1}{F_1} \int_0^{\infty} P_1(s) ds = \frac{R_1}{2F_1} \text{sgn } x \quad (1.26)$$

Подставляя выражение $P_1(x)$ из (1.24) для $q_1(x)$ при $|x| \rightarrow 0$ получим:

$$q_1(x) = \frac{TR_1}{\pi F_1} \left\{ a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} A_m}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a} \right)^{2m-1} + x[\psi(2) - \ln(xT)] + \frac{\pi T|x|}{4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m+1}}{2T(2m+1)!} [\psi(2m+2) - \ln(xT)] + \frac{\pi|x|}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Tx)^{2m+1}}{(2m+2)!} \right\} - \frac{R_1}{2F_1} \text{sgn } x$$

2. Рассмотрим нечетную задачу. В этом случае в уравнениях (1.1)

$$X(x; y) = \frac{P_2(x)}{H} [\delta(y-a) - \delta(y+a)] \quad (2.1)$$

где

$$P_2(x) = P(x; a) = -P(x; -a).$$

В рассматриваемом случае для $\bar{u}(\sigma; a)$ получим (1.1):

$$\bar{u}(\sigma; a) = \bar{P}_2(\sigma) \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|} e^{-a|\sigma|} \operatorname{sha}|\sigma| + \frac{\lambda^* + \mu}{\mu(\lambda^* + 2\mu)H} a e^{-2a|\sigma|} \right] \quad (2.2)$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, для $\bar{P}_2(\sigma)$, $\bar{q}_2(\sigma)$ в исследуемой задаче ($R = R_2$; $q(x; a) = q_2(x)$) получим:

$$\bar{P}_2(\sigma) = \frac{TR_2}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{sha}|\sigma| + k\alpha\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}} \quad (2.3)$$

$$\bar{q}_2(\sigma) = -\frac{iR_2}{F_1} \frac{k\alpha\sigma e^{-2a|\sigma|} + 2\operatorname{sgn}\sigma e^{-|\sigma|a} \operatorname{sha}|\sigma|}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{sha}|\sigma| + k\alpha\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}} \quad (2.4)$$

Таким образом, для искомым величин $P_2(x)$ и $q_2(x)$ находим:

$$P_2(x) = \frac{TR_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\sigma x d\sigma}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a} \operatorname{sh}|\sigma|a + k\alpha\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (2.5)$$

$$q_2(x) = -\frac{R_2}{\pi F_1} \int_0^\infty \frac{2e^{-\sigma a} \operatorname{sha}\sigma + k\alpha\sigma e^{-2\sigma a}}{T + 2\sigma e^{-\sigma a} \operatorname{sha}\sigma + k\alpha\sigma^2 e^{-2\sigma a}} \sin\sigma x d\sigma \quad (2.6)$$

При $a \rightarrow 0$ $P_2(x) = R_2\delta(x)$, т.е. жесткость стрингеров стремится к нулю. Значит, в случае нечетной задачи, при приближении стрингеров их жесткость как бы уменьшается.

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_2(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Для $\bar{P}_2(\sigma)$ имеем

$$\bar{P}_2(\sigma) = R_2 \left\{ 1 - \frac{(2+k)\alpha\sigma^2}{T} + \frac{2(1+k)\alpha^2|\sigma|^3}{T} + \left[\frac{(2+k)^2 a^2}{T^2} - \frac{2(2+3k)a^3}{3T} \right] \sigma^3 + \dots \right\} + O(|\sigma|^5), \quad |\sigma| \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Тогда для $P_2(x)$ получим:

$$P_2(x) = R_2 \frac{12a^2(1+k)}{\pi T} \frac{1}{x^4} + O(x^{-6}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Используя формулу (1.16), для $q_2(x)$ получим:

$$q_2(x) = -R_2 \frac{4a^2(1+k)}{\pi T F_1} \frac{1}{x^3} + O(|x|^{-5}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Аналогичным образом получим формулы для $P_2(x)$ и $q_2(x)$ при $|x| < a$.

$$P_2(x) = \frac{TR_2}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2m-2} B_m + \psi(1) - \ln(Tx) + \frac{\pi T|x|}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m}}{(2m)!} [\psi(2m+1) - \ln(Tx)] + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(T|x|)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right\} \quad (2.10)$$

$$q_2(x) = \frac{TR_2}{\pi F_s} \left\{ a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-2} B_m}{(2m-2)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2m-1} + x[\psi(2) - \ln(xT)] + \frac{\pi T|x|x|}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tx)^{2m+1}}{2T(2m+1)!} [\psi(2m+2) - \ln(xT)] + \frac{\pi|x|}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Tx)^{2m+1}}{(2m+2)!} \right\} - \frac{R_2}{2F_s} \operatorname{sgn} x \quad (2.11)$$

где

$$B_m = \int_0^{\infty} \frac{(s - ks^2) s^{2(m-1)} e^{-2s} ds}{(T^* + s - s e^{-2s} + ks^2 e^{-2s})(T^* + s)}$$

Из полученных результатов можно получить решение задачи, когда при $y = a$ по направлению x действует сила $P\delta(x)$, а при $y = -a$ — сила $Q\delta(x)$. В этом случае контактные напряжения равны

$$P(x; a) = P_1(x) + P_2(x); \quad R_1 + R_2 = P$$

$$P(x; -a) = P_1(x) - P_2(x); \quad R_1 - R_2 = Q$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. // Ingenieur-Archiv. 1932. Bd.3. Haft 2. p.123-129.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980. 416с.
3. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 544с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
17.02.2004