

УДК 534.1. 539.1

К УПРАВЛЕНИЮ ДВИЖЕНИЕМ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

Габриелян М.С., Мовсисян А.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Ա.Ա. Մովսիսյան

Առաձգամածուցիկ հեծանի շարժման դեկավարման մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ (Մաքսվելի և Մաքսվել-Թամսոնի մոդելներ) հեծանի դեկավարման խնդիրը: Օպտիմիզացման իարքը դրվում է սովորական ձևով և խնդիրը լուծվում է մոմենտների պրոցեսին միջոցով: Սակայն ի տարբերություն առաձգական խնդիրներից, այստեղ օպտիմալ բեռները որոշվում են հաստատուն գումարելիների ճշտությամբ, որի հասար անհրաժեշտ է լինում դարձյալ կատարել օպտիմիզացիա:

M.S.Gabrielyan, A.A.Movsisyan

On Control of Motion of Viscoelastic beam

В работах [1-3 и др.] были рассмотрены задачи управления движением упругих систем в различных постановках. В настоящей статье изучается задача управления последственно-упругих систем (на примере балки и для всех деформируемых систем, уравнения движения которых допускает разделения переменных решения строятся аналогичным образом). Задачи для систем с наследственно-упругими свойствами принципиально отличаются от [1-3] не только техникой их решения, но и разнообразием понятия оптимальности. В отличие от упругих задач, когда для заданного времени требуется, чтобы перемещения и скорость принимали определенные значения, для наследственно-упругих систем вследствие ползучести материала необходимо, чтобы интервалы действия нагрузки и желаемого результата совпадали. Так что возможны различные постановки, однако здесь изучается лишь один вариант, аналогичный упругой задаче.

Задача решается с помощью проблемы моментов [4]. Однако в отличие от предыдущих задач, здесь управляющая нагрузка определяется с точностью произвольных постоянных, так что их можно определить, исходя из каких-то соображений целесообразности или еще раз из минимальных условий.

1. Уравнение движения балки возьмем в виде

$$\tilde{E}I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1.1)$$

здесь $\tilde{E}$ — оператор и будем изучать два вида материалов:

а) материал с затухающей памятью, в частности, материал Томпсона-Максвелла

$$\tilde{E}u = E \left[u - \frac{E-H}{En} \int_0^t e^{-\frac{E-H}{En}(t-\tau)} u(\tau) d\tau \right] \quad (1.2)$$

здесь E — мгновенный модуль упругости, H — длительный модуль, n — время релаксации,

б) материал с памятью типа Максвелла — в (1.2) отсутствует H .
В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\Gamma = \frac{E-H}{En}, \quad \frac{1}{n} = \kappa \quad (1.3)$$

для второго материала $\Gamma = \kappa$.

В (1.1) под $q(x, t)$ подразумевается сумма двух величин: заданная действующая нагрузка $q^{(1)}(x, t)$ и искомая $q^{(0)}(x, t)$ нагрузка, которая оптимальным образом управляет движением объекта. Причем, не обязательно, чтобы интервалы действия $q^{(0)}$ и $q^{(1)}$ совпадали и были расположены по всей длине балки.

К уравнению (1.1) должны быть присоединены еще начальные условия

$$w = \Psi_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Psi_2(x) \text{ при } t = 0 \quad (1.4)$$

Вопрос ставится обычным образом: в момент времени $t = t_1$ движение (1.1) с начальными условиями (1.4) привести к заданному положению и скорости

$$w = \Psi_3(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Psi_4(x) \text{ при } t = t_1 \quad (1.5)$$

при этом минимизируя некоторый функционал (подробно об этом чуть позже).

2. Если перейти к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\tau = at/l$, $a = (E/\rho)^{1/2}$ и искать решение (1.1) в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) X_m(\xi) \quad (2.1)$$

где $X_m(\xi)$ — фундаментальные [собственные] функции соответствующей однородной задачи (по этим функциям разлагаются также $q(\xi, \tau)$ и условия (1.4), (1.5)), то для $f_m(\tau)$ будем иметь

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \left[f_m - \Gamma \int_0^1 e^{-\kappa(\tau-\theta)} f_m(\theta) d\theta \right] = q_m(\tau) \quad (2.2)$$

здесь $\omega_m^2 = \frac{EI}{\rho S} k_m^4$ — собственные частоты упругой балки, k_m — собственные значения соответствующей однородной задачи.

Преобразованные условия (1.4) и (1.5) для (2.2) соответственно будут

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \psi_m^{(1)}, & f_m(0) &= \psi_m^{(2)} \\ f_m(\tau) &= \psi_m^{(3)}, & f_m(\tau) &= \psi_m^{(4)}, \quad T = at_1/l \end{aligned} \quad (2.3)$$

Вместо интегродифференциального уравнения (2.2) исключением интегрального члена можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 f_m}{d\tau^3} + \kappa \frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \frac{df_m}{d\tau} + \omega_m^2 (\kappa - \Gamma) f_m &= F_m \\ F_m = F_m^{(0)} + F_m^{(1)} &= \left(\frac{dq_m^{(0)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(0)} \right) + \left(\frac{dq_m^{(1)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь к первым условиям (2.3) должны быть добавлены

$$\ddot{f}_m(0) = \psi_m^{(s)} = -\omega_m^2 \psi_m^{(1)} \quad (2.5)$$

В дальнейшем, там, где не создается путаница, для краткости индексы m будем опускать.

В случае а) характеристическое уравнение для (2.4) имеет один действительный и два комплексных (сопряженных) корня, причем действительная часть отрицательна

$$\begin{aligned} p_1 &= -2\sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{ctg} 2\varepsilon = \alpha < 0 \\ p_{2,3} &= \sqrt{\frac{a}{3}} (\operatorname{ctg} 2\varepsilon \pm i\sqrt{3} \operatorname{cosec} 2\varepsilon) = \beta \pm i\gamma, \quad (\beta < 0, \gamma > 0) \\ \operatorname{tg} 2\varepsilon &= \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}, \quad \left(|\varepsilon| \leq \frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2}{b} \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}, \quad \left(|\delta| \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ a &= \omega^2 - \frac{\kappa^2}{3}, \quad b = 2\left(\frac{\kappa}{3}\right)^3 - \frac{\kappa\omega^2}{3} + \omega^2(\kappa - \Gamma) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для случая б) ($\kappa = \Gamma$) корни характеристического уравнения суть

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \quad p_{2,3} = \beta \pm i\gamma \\ \beta &= -\frac{\kappa}{2}, \quad \gamma = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поставленную задачу будем решать с помощью проблемы моментов [4].

В качестве минимизируемого функционала будем изучать два случая:

а) можно минимизировать квадратичный функционал от искомой нагрузки $q^{(1)}(x, t)$, т.е.

$$I_1 = \int_0^T \int_0^1 [q^{(1)}(\xi, \tau)]^2 d\xi d\tau \quad (2.8)$$

Учитывая, что фундаментальные функции $X_m(\xi)$ ортогональны и $q_m^{(1)}(\tau)$ независимы, минимизация функционала (2.8) равносильна минимизации

$$I_m^{(1)} = \int_0^T [q_m^{(1)}(\tau)]^2 d\tau \quad (2.9)$$

б) так как в дифференциальном уравнении правая часть есть $F = F^{(e)} + F^{(i)}$, по аналогии (2.8) можно минимизировать $F^{(i)}$, которая приводит к условиям типа (2.9), т.е.

$$I_m^{(2)} = \int_0^T [F_m^{(i)}(\tau)]^2 d\tau = \int_0^T \left[\frac{dq_m^{(i)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(i)} \right]^2 d\tau \quad (2.10)$$

3. Построим теперь фундаментальную матрицу. Для первого материала

$$y_{11} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \sigma Y_1 + Y_2 \left[\alpha(\alpha - 2\beta)Y_4 - \frac{\alpha}{\gamma}(\gamma^2 - \beta\alpha + \beta^2)Y_3 \right] \right\}$$

$$y_{21} = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\alpha\sigma Y_1 + Y_2\sigma \left[\frac{\alpha}{\gamma}(\alpha - \beta)Y_3 + \alpha Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{31} = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\alpha^2\sigma Y_1 + \frac{\alpha}{\gamma}Y_2 \left[(\alpha\beta(\beta^2 + 2\gamma^2) - \sigma^2)Y_3 + \alpha\beta\sigma Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{12} = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2\beta Y_1 + Y_2 \left[\frac{1}{\gamma}(\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2)Y_3 - 2\beta Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{22} = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2\alpha\beta Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2 \left[\beta(\sigma - \alpha^2)Y_3 - \gamma(\alpha^2 + \sigma)Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{32} = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2\alpha^2\beta Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2 \left[(\sigma^2 + \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2))Y_3 - 2\alpha^2\beta\gamma Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{13} = \frac{1}{\Delta} \left\{ -Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2 \left[(\beta - \alpha)Y_3 + \gamma Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{23} = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\alpha Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2 \left[(\alpha^2 - \sigma)Y_3 + \alpha\gamma Y_4 \right] \right\}$$

$$y_{33} = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\alpha^2 Y_1 + \frac{1}{\gamma}Y_2 \left[(\alpha(\beta^2 - \gamma^2) - \beta\sigma)Y_3 + \gamma(2\alpha\beta - \sigma)Y_4 \right] \right\}$$

здесь

$$\Delta = \gamma^2 + (\alpha - \beta)^2, \quad \sigma = \beta^2 + \gamma^2, \quad Y_1 = e^{\sigma\tau}, \quad Y_2 = e^{\beta\tau}, \quad Y_3 = \sin \gamma\tau, \quad Y_4 = \cos \gamma\tau$$

Для второго материала элементы фундаментальной матрицы получаются из предыдущих, положив $\alpha = 0$.

Имея фундаментальную матрицу (y_{ij}) , по формуле Коши решение системы (2.4) запишем

$$y(\tau) = Y(\tau, 0)y(0) + \int_0^\tau \begin{pmatrix} y_{13}(\tau, \theta) \\ y_{23}(\tau, \theta) \\ y_{33}(\tau, \theta) \end{pmatrix} (F^{(0)}(\theta) + F^{(1)}(\theta)) d\theta \quad (3.1)$$

Учитывая начальные и конечные значения для функций $y_i(\tau)$, получим следующее интегральное условие:

$$\int_0^t h_i(\theta) F^{(1)}(\theta) d\theta = c_i \quad (3.2)$$

здесь

$$h_i(\theta) = y_{i3}(T, \theta), \quad i = 1, 2, 3$$

$$c_i = y_i(0) - (y_{ij}(0, T))\psi_j - \int_0^T \begin{pmatrix} y_{13}(0, \theta) \\ y_{23}(0, \theta) \\ y_{33}(0, \theta) \end{pmatrix} F^{(0)}(\theta) d\theta$$

$$\psi_i = \Psi(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(5)})$$

При (3.3) норма основного пространства определится

$$\rho_0^2 = \min_{\sum_{i=1}^3 l_i c_i = 0} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^3 l_i h_i(\theta) \right]^2 d\theta > 0$$

т.к. функции $h_i(\theta)$ линейно независимы. Если обозначить через

$$s_{ij} = \int_0^T h_i(\theta) h_j(\theta) d\theta, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

то (3.4) можно записать в виде

$$\rho_0^2 = \min_{\sum_{i=1}^3 l_i c_i} \sum_{i,j=1}^3 s_{ij} l_i l_j$$

Учитывая, что матрица $\|s_{ij}\|$ симметричная и определенно положительная, для минимизирующих l_i получим

$$l_i^0 = A_i / \sum_{k=1}^3 A_k c_k, \quad i = 1, 2, 3$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} c_1 & s_{12} & s_{13} \\ c_2 & s_{22} & s_{23} \\ c_3 & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} s_{11} & c_1 & s_{13} \\ s_{21} & c_2 & s_{23} \\ s_{31} & c_3 & s_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & c_1 \\ s_{21} & s_{22} & c_2 \\ s_{31} & s_{32} & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = |s_{ij}| > 0$$

Тогда для оптимальной $F_0^{(1)}$ получим

$$F_0^{(1)}(\tau) = \frac{1}{\rho_0^2} \sum_{i=1}^3 l_i^0 h_i(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i h_i(\tau)}{\sum_{i=1}^3 A_i c_i}$$

Однако, оптимальная нагрузка определится, исходя из связи (2.4)

$$\frac{dq^{(1)}}{d\tau} + \kappa q^{(1)} = F_0^{(1)}(\tau)$$

то есть

$$q_0^{(1)}(\tau) = Ce^{-\kappa\tau} + \int_0^\tau e^{-\kappa(\tau-\theta)} \frac{\sum_{i=1}^3 A_i h_i(\theta)}{\sum_{i=1}^3 A_i c_i} d\theta \quad (3.9)$$

Оптимальную нагрузку можно определить и исходя из (2.9). Если в (3.2) поставить связь между $q^{(1)}$ и $F^{(1)}$ по (2.4) и совершить интегрирование по частям, то взамен (3.2) будем иметь

$$\tilde{c}_i = \int_0^\tau \tilde{h}_i(\tau) q^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.10)$$

где уже

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i &= c_i + (h_i(0)q^{(1)}(0) - h_i(\tau)q^{(1)}(\tau)) \\ \tilde{h}_i(\tau) &= \kappa h_i(\tau) - \dot{h}_i(\tau) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Окончательные выражения для $q_0^{(1)}$ будут определяться по виду (3.7), но уже соответствующие величины должны быть заменены величинами с волной по (3.11).

Как видно из (3.9) и из последнего выражения для $q_0^{(1)}$, они определяются с точностью до постоянных слагаемых, в частности, значения $q_0^{(1)}(0)$ и $q_0^{(1)}(\tau)$. Произвольные постоянные можно выбирать как из специфики и удобства осуществления оптимальной нагрузки, так и, что еще естественно, из новых минимальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян А.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №3. С.15-23.
2. Мовсисян А.А., Габриелян М.С. Некоторые задачи оптимального управления движением упругих систем. / Сб. научн. тр. конференции. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: 1997. с.67-70.
3. Габриелян М.С., Мовсисян А.А. К оптимальному управлению движением упругих систем. // Изв. НАН РФ. МТТ. 1999. №6. С.146-153.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
23.01.2004