

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

Мартirosян Э. В.

Է. Վ. Մարտիրոսյան

Լիցքահաղորդական մակերևութային սահքի ալիքները բառ իդեալ հաղորդիչ կիսատարածության ներքին

Դիտարկվում է կիսատարածություն առաձգական լիցեալ հաղորդիչ նյութից, որը սահմանափակված է փակուղմի շերտով: Լիցեալից հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությունը, որը գործում է կիսատարածության ներքին ուղղահայաց հարթությունում, ապահովում է փոխազդեցություն զրգճված էլեկտրա-մագնիսական դաշտի և կիսատարածության առաձգական տեղափոխումների դաշտի միջև: Ցույց է տրվում որ նշված փոխազդեցությունը բնութս է մակերևութային սահքի ալիքների առաջացմանը

E. V. Martirosyan

Magnetoelastic surface shear waves along the boundary of perfectly conducting semi-space

Рассматривается упругое полупространство из идеально-проводящего материала, граничащее со слоем вакуума. Наличие внешнего постоянного магнитного поля, действующего в плоскости, перпендикулярной границе полупространства, обуславливает взаимодействие возмущенных электромагнитного поля и поля упругих перемещений полупространства. Показывается, что указанное взаимодействие приводит к появлению поверхностных сдвиговых волн.

§ 1. Вначале исследуется вопрос существования поверхностных сдвиговых волн в случае полупространства из упругого идеально-проводящего материала, граничащего с вакуумом.

Рассмотрим упругое идеально - проводящее полупространство $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 < x_2 < +\infty$, $-\infty < x_3 < +\infty$. Плоскость $x_2 = 0$ отделяет полупространство от вакуума ($x_2 < 0$). В начальном невозмущенном состоянии полупространство находится в постоянном магнитном поле, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости $x_1 O x_2$:

$$\vec{H}_0 = H_{01} \vec{i} + H_{02} \vec{j}$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ -орты осей x_1, x_2 , соответственно. Задача состоит в изучении вопроса существования сдвиговой поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы полупространства.

Отметим, что в случае поперечного магнитного поля, т. е. когда $H_{01} = 0$, поставленная задача исследовалась в [4]. Похожая задача, однако без полного анализа полученных результатов, изучалась в [5].

В случае антиплоской упругой деформации $u = v = 0$, $w = w(x_1, x_2, t)$, а также при предположении, что все искомые величины возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты x_3 , линеаризованное уравнение магнитоупругости [3] имеет вид: при $x_2 > 0$

$$(C_1^2 + V_1^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (C_2^2 + V_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2V_1 V_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Здесь

$$V_k^2 = \frac{\mu}{4\pi\rho} H_{0k}^2, \quad k = 1, 2 \quad (1.2)$$

$C_i^2 = G\rho^{-1}$, G — модуль сдвига, ρ — плотность материала среды, μ — ее магнитная проницаемость.

Уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в области $x_2 < 0$ приводятся к виду

$$c^2 \Delta h_2 = \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = c \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \quad (1.3)$$

где e_1 — компонента напряженности вектора возмущенного электрического поля, h_3 — компонента напряженности вектора возмущенного магнитного поля, Δ — оператор Лапласа, c — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

На плоскости $x_2 = 0$ решения уравнений (1.2) и (1.3) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$G \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\mu}{4\pi} H_{02} \left(H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{4\pi} H_{02} h_3 \quad (1.4)$$

$$\frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} = e_1$$

Первое из условий (1.4) означает, что на границе $x_2 = 0$ выполняется граничное условие типа свободной границы [1]–[3]. Второе условие из (1.4) обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты напряженности e_1 возмущенного электрического поля при переходе через границу $x_2 = 0$.

Решения типа поверхностной волны должны удовлетворять также следующим условиям затухания:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} w = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} h_3 = 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5).

Для решения уравнений (1.1), (1.3) введем обозначения

$$\chi_k = \frac{V_k^2}{C_i^2}, \quad k = 1, 2 \quad (1.6)$$

Уравнение (1.1) и второе уравнение из (1.3) примут, соответственно, следующий вид:

$$(1 + \chi_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (1 + \chi_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\sqrt{\chi_1 \chi_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{C_i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} + \sqrt{\chi_2} \left(\sqrt{\chi_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \sqrt{\chi_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu G}} h_3$$

Решения уравнений (1.1), (1.3) будем искать в виде гармонических волн с частотой ω и волновым числом k :

$$w = f(x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$h_3 = g(x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$e_1 = p(x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где f, g, p — неизвестные функции (f, g из класса $C^2(-\infty, +\infty)$, p — класса $C(-\infty, +\infty)$).

Так как для уравнения (1.1) ищется затухающее решение, удовлетворяющее первому условию из (1.5), то функция $f(x_2)$ должна иметь следующий вид:

$$f(x_2) = A \exp(-k\alpha x_2)$$

где A, α — постоянные, причем $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Подставляя значение w в уравнение (1.1), приведем его к виду

$$(1 + \chi_2)\alpha^2 + 2i\sqrt{\chi_1\chi_2}\alpha - (1 + \chi_1 - \eta) = 0$$

где $\eta = \frac{\omega^2}{k^2 C_1^2}$ — безразмерная характеристика квадрата фазовой скорости волны.

Анализ полученного квадратного уравнения показывает, что для обеспечения условия $\operatorname{Re} \alpha > 0$ нужно требовать выполнения ограничения

$$0 < \eta < 1 + \frac{\chi_1}{1 + \chi_2} \quad (1.7)$$

$$\text{и взять } \alpha = \frac{\sqrt{1 + \chi_1 + \chi_2 - (1 + \chi_2)\eta} - i\sqrt{\chi_1\chi_2}}{1 + \chi_2} \quad (1.8)$$

Итак, при выполнении условия затухания (1.7) имеем

$$w = A \exp(-k\alpha x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где α определяется по (1.8), A — произвольная постоянная.

Аналогично, из уравнений (1.3) с учетом второго условия из (1.5) получим значения функций g и p :

$$g(x_2) = B \exp(k\sqrt{1 - \theta_1\eta} x_2)$$

$$p(x_2) = \frac{Bck}{i\omega} \sqrt{1 - \theta_1\eta} \exp(k\sqrt{1 - \theta_1\eta} x_2)$$

$$e_1(x_2) = \frac{ck}{i\omega} \sqrt{1 - \theta_1\eta} B \exp(k\sqrt{1 - \theta_1\eta} x_2)$$

где $\theta_1 = C_1^2 c^{-2}$, B — произвольная постоянная.

Следовательно, решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие (1.5), выражаются формулами

$$w = A \exp(-k\alpha x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$h_3 = B \exp(k\sqrt{1 - \theta_1\eta} x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$e_1 = \frac{ck}{i\omega} \sqrt{1 - \theta_1\eta} B \exp(k\sqrt{1 - \theta_1\eta} x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

Для нахождения произвольных постоянных A, B используем граничные условия (1.4). Подставляя в них значения w, h_3, e_1 , получим систему линейных

уравнений относительно неизвестных A, B :

$$k\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta}A + \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu G}}B = 0$$

$$\frac{\omega^2\mu}{c^2 k}H_{02}A + \sqrt{1-\theta_1\eta}B = 0$$

Чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, ее определитель должен равняться нулю. Определитель последней системы равен $kN(\eta)$, где

$$N(\eta) = \sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta} \sqrt{1-\theta_1\eta} - \chi_2\theta_1\eta$$

Таким образом, для решения изучаемой задачи требуется найти корень уравнения

$$N(\eta) = 0 \quad (1.9)$$

удовлетворяющий условию затухания (1.7).

Легко проверить, что если $\chi_2 > 0$, т. е. с учетом (1.2) и (1.6) $H_{02} \neq 0$, то уравнение (1.9) имеет единственный корень, удовлетворяющий (1.7); если же $\chi_2 = 0$, т. е. $H_{02} = 0$, то уравнение (1.9) не имеет корней, удовлетворяющих (1.7). Следовательно, в приведенной постановке поверхностная сдвиговая волна существует, если только $H_{02} \neq 0$. Однако, квадрат фазовой скорости поверхностной волны очень мало отличается от C_s^2 (т. е. η близка к $1 + \frac{\chi_1}{1+\chi_2}$) даже в случае

сверхсильных магнитных полей. Это обстоятельство хорошо видно из численных данных, приведенных ниже в табл. 1. Поэтому представляется интересным рассмотреть видоизмененную постановку задачи, в которой эффект магнитного поля, обуславливающий существование сдвиговых поверхностных волн, мог бы быть более существенным.

§ 2. Рассмотрим следующий аналог задачи из § 1. Пусть полупространство из упругого идеально-проводящего материала $-\infty < x_1 < \infty$, $0 < x_2 < \infty$, $-\infty < x_3 < +\infty$ граничит с параллельным слоем $-\infty < x_1 < +\infty$, $-h < x_2 < 0$, $-\infty < x_3 < +\infty$, свойства которого отождествляются со свойствами вакуума, причем на границе $x_2 = 0$ выполняется граничное условие типа свободной границы, а плоскость $x_2 = -h$ является экраном для электрического поля. В начальном невозмущенном состоянии полупространство находится в постоянном магнитном поле, вектор напряженности H_0 которого параллелен плоскости $(x_1 O x_2)$. Задача состоит в изучении вопроса существования сдвиговой поверхностной волны вдоль границы полупространства.

Решение рассматриваемой задачи во многом сходно с решением ее предельного случая из § 1. Уравнения (1.1), (1.3), граничные условия (1.4) и первое из условий

затухания (1.5) остаются без изменений: второе из условий (1.5) нужно заменить условием

$$e_1 = 0 \text{ при } x_2 = -h \quad (2.1)$$

Решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие первому условию из (1.5), выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} w &= A \exp(-k\alpha x_2) \exp[i(\omega t - kx_1)] \\ h_3 &= [B \exp(kx_2 \sqrt{1-\theta_1 \eta}) + D \exp(-kx_2 \sqrt{1-\theta_1 \eta})] \cdot \exp[i(\omega t - kx_1)] \\ e_1 &= \frac{ck}{i\omega} \sqrt{1-\theta_1 \eta} \left\{ [B \exp(kx_2 \sqrt{1-\theta_1 \eta}) - D \exp(-kx_2 \sqrt{1-\theta_1 \eta})] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp[i(\omega t - kx_1)] \right\} \end{aligned}$$

где A, B, D — произвольные постоянные и предполагается выполненным ограничение (1.7). Подставляя в граничные условия (1.4) и условие (2.1) значения функций w, h_3, e_1 , найдем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных A, B, D

$$k \left[(1 + \chi_2) \alpha + i \sqrt{\chi_1 \chi_2} \right] A + \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu} G} (B + D) = 0$$

$$\frac{\omega^2 \mu}{c^2 k} H_{02} A + \sqrt{1-\theta_1 \eta} (B - D) = 0$$

$$D = B \exp(-2kh \sqrt{1-\theta_1 \eta})$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим следующее дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи:

$$N_1(\eta) = 0 \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} N_1(\eta) &= \sqrt{1-\theta_1 \eta} \sqrt{1+\chi_1 + \chi_2 - (1+\chi_2)\eta} - \\ &\quad - \theta_1 \chi_2 \eta \operatorname{cth}(kh \sqrt{1-\theta_1 \eta}) \end{aligned}$$

Таким образом, решение изучаемой задачи сводится к нахождению корней уравнения (2.2), удовлетворяющих условию затухания (1.7).

Анализ полученного результата приводит к заключению, что в рассмотренной постановке, как и выше в § 1, поверхностная сдвиговая упругая волна существует, если только $H_{02} \neq 0$. Однако теперь, сравнение дисперсионных уравнений (2.2) и (1.9) показывает, что влияние магнитного поля на величину сдвиговой поверхностной волны зависит от порядка величины kh . Этот факт иллюстрируют числовые данные из табл. 2. В частности, при $kh \rightarrow +\infty$ имеем $\operatorname{cth}(kh \sqrt{1-\theta_1 \eta}) \rightarrow 1$, поэтому из (2.2) в пределе получается уравнение (1.9).

Если же $kh \rightarrow 0$, то имеем $\text{cth}(kh\sqrt{1-\theta, h}) \sim (kh\sqrt{1-\theta, \eta})^{-1}$ и более существенно проявляется влияние экрана.

Таблица 1

χ_1	χ_2	θ_1	η	$\text{Re } \alpha$	ky_1
0	0,1	10^{-10}	$1,9 \cdot 10^{-23}$	$9,0453 \cdot 10^{-6}$	0
0,01	0,1	10^{-8}	$1+909 \cdot 10^{-8}$	$0,9091 \cdot 10^{-1}$	109,251
0,01	0,1	10^{-10}	$1+909 \cdot 10^{-5}$	$0,9091 \cdot 10^{-3}$	109,251
0,02	0,1	10^{-8}	$1+1818 \cdot 10^{-5}$	$0,9091 \cdot 10^{-2}$	77,2338
0,02	0,1	10^{-10}	$1+1818 \cdot 10^{-2}$	$1,2856 \cdot 10^{-1}$	77,2338
0,05	0,1	10^{-8}	$1+4545 \cdot 10^{-5}$	$1,2856 \cdot 10^{-1}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	$1+4545 \cdot 10^{-3}$	$1,2856 \cdot 10^{-3}$	48,8469
0,08	0,1	10^{-8}	$1+7272 \cdot 10^{-5}$	$2,5713 \cdot 10^{-1}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	$1+7272 \cdot 10^{-3}$	$2,5713 \cdot 10^{-1}$	38,6169
0,1	0,1	10^{-8}	$1+909 \cdot 10^{-2}$	$2,8748 \cdot 10^{-3}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	$1+909 \cdot 10^{-2}$	$2,8748 \cdot 10^{-3}$	34,54

Таблица 2

χ_1	χ_2	θ_1	kh	η	$\text{Re } \alpha$	ky_1
0	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1,9,091 \cdot 10^{-17}$	$9,09545 \cdot 10^{-6}$	
0	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1,9,091 \cdot 10^{-18}$	$9,09545 \cdot 10^{-5}$	
0	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1,9,091 \cdot 10^{-11}$	$9,09545 \cdot 10^{-7}$	
0	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1,9,091 \cdot 10^{-11}$	$9,09545 \cdot 10^{-6}$	
0	0,1	10^{-10}	10^{-1}	$1,9,091 \cdot 10^{-21}$	$9,09095 \cdot 10^{-11}$	
0	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1,9,091 \cdot 10^{-19}$	$9,09068 \cdot 10^{-9}$	
0	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1,9,091 \cdot 10^{-17}$	$9,09091 \cdot 10^{-8}$	
0,01	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+9,09 \cdot 10^{-2}$	$9,0909 \cdot 10^{-2}$	109,225
0,01	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+9,09 \cdot 10^{-2}$	$9,0909 \cdot 10^{-2}$	109,225
0,02	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+1,818 \cdot 10^{-2}$	$1,2856 \cdot 10^{-3}$	77,2338
0,05	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+4,545 \cdot 10^{-2}$	$2,0328 \cdot 10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+4,545 \cdot 10^{-2}$	$2,0328 \cdot 10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+4,545 \cdot 10^{-2}$	$2,0328 \cdot 10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+4,545 \cdot 10^{-2}$	$2,0328 \cdot 10^{-3}$	48,8469
0,08	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+7,2727 \cdot 10^{-2}$	$4,9793 \cdot 10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+7,2727 \cdot 10^{-2}$	$4,9793 \cdot 10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+7,2727 \cdot 10^{-2}$	$4,9793 \cdot 10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+7,2727 \cdot 10^{-2}$	$4,9793 \cdot 10^{-3}$	38,6169
0,1	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+9,0909 \cdot 10^{-2}$	$2,8748 \cdot 10^{-2}$	34,54
0,1	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+9,0909 \cdot 10^{-2}$	$2,8748 \cdot 10^{-2}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+9,0909 \cdot 10^{-2}$	$2,8748 \cdot 10^{-2}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1+9,0909 \cdot 10^{-2}$	$2,8748 \cdot 10^{-2}$	34,54

Пояснения к таблицам:

1. Амплитуда поверхностной волны w равна $A \exp(-ky \text{Re } \alpha)$, поэтому величина $\exp(-2\pi \text{Re } \alpha)$ показывает, во сколько раз уменьшается величина амплитуды при уменьшении y на величину, равную длине волны $2\pi/k$.

2. Волна $w = E \exp \left[i \left(ky \frac{\sqrt{\chi_1 \chi_2}}{1 + \chi_2} \right) \right]$, где $E \neq 0$, является волной типа шепчущей

волны Галилея. Вдоль оси y она имеет нули, определяемые уравнением

$$\operatorname{Re} E \cos(ky \operatorname{Im} \alpha) - \operatorname{Im} E \sin(ky \operatorname{Im} \alpha) = 0$$

В частном случае, когда $\operatorname{Re} E = 0$ и $\operatorname{Im} E \neq 0$, первый нетривиальный нуль y_1 приводится в таблицах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян А. В., Казарян К. Б. Отражение и преломление магнитоупругой сдвиговой волны от упругого слоя. – В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1984. С.111-115.
2. Геворкян А. В. Магнитоупругие волны Лява в случае диэлектрического слоя и идеально проводящего полупространства. – В сб.: "Исследования по механике твёрдого деформируемого тела". Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1981. С.81-86.
3. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic field in the case of perfect conductor. // Proc. of Vibr. Probl.. 1960, № 5, pp. 63 – 80.
4. Бслубекян М. В. Шелевые магнитоупругие сдвиговые волны. – В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред", Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1984. С.70-74.
5. Chakraborty S., Chattopadhyay M. On Love-type magnetoclastic surface waves. // Journal of Applied Mechanics (Trans. of the ASME), 1998, v. 65, № 2, pp. 535-539.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.02.2004