

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.Г.

Է.Խ Գրիգորյան, Կ.Է Սարգսյան

Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահրային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է դիէլեկտրիկ առածգական շերտ՝ դիէլեկտրիկ քափանցելիության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցով

Աշխատանքում ուսումնասիրված են առածգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (6mm դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահրային կայունացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստությամբ դիէլեկտրիկ առածգական շերտ՝ դիէլեկտրիկ քափանցելիության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցով: Աիջաձայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման գծային աղբյուրի հետևանքով: Օգտվելով Ֆուրյեյի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորության սերողով: Տույց է տրվում, որ էլեկտրական դաշտի ինդուկցիան և շոշափող լարումները՝ պիէլեկտրիկ շերտի և պիէզոէլեկտրիկ կիսատարածության հսկան տեղամասում ունեն վերջավոր բոլշ՝ պայմանավորված դիէլեկտրիկ քափանցելիության գործակիցների սարբերությամբ:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի, շոշափող լարման և տեղափոխության համար ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, K.H. Sargsyan

On the Shear Vibrations of Piezoelectric Half-Space, on the Boundary Surface of which a Dielectric Elastic Layer with Piecewise Constant Dielectric Permeability Coefficient is Fixed

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщиной с кусочно-постоянным диэлектрическим коэффициентом проницаемости. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению Фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений. Показано, что на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства индукция электрического поля и контактные напряжения на линии раздела диэлектриков имеют конечный скачок. Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля, контактных напряжений и перемещений в далеких точках участка контакта.

Предполагаем, что упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе x_1, x_2, x_3 . Плоскость $x_3 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем. Ось x_2 направлена по глубине пьезоэлектрического полупространства. Ось x_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной симметрии.

Рассмотрим динамическую контактную задачу для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический бесконечный слой малой толщиной ($k_2 h \ll 1$) с кусочно-постоянным коэффициентом диэлектрической проницаемости, причем коэффициент диэлектрической проницаемости при $|x_1| > a$ есть ϵ_1 , а при $|x_1| < a - \epsilon_2$. Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $P\delta(x_1)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω – частота колебаний, t – параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в определении индукции электрического поля на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Обозначим упругие перемещения пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя $u^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $u^{(2)}(x_1, x_2, t)$, а электрические потенциалы $\phi^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $\phi^{(2)}(x_1, x_2, t)$ соответственно.

Упругие перемещения и электрические потенциалы ищем в виде:

$$u^{(1)}(x_1, x_2, t) = u^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad u^{(2)}(x_1, x_2, t) = u^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

$$\phi^{(1)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad \phi^{(2)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

Тогда поставленная задача в амплитудах сводится к граничной задаче [1]:

$$\Delta u^{(1)} + k_1^2 u^{(1)} = 0, \quad \Delta \phi^{(1)} = -\frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} k_1^2 u^{(1)}, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 u^{(2)}(x_1) = \frac{1}{hG_2} (P\delta(x_1) - \tau(x_1)) \quad (2)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} \left. c_{44} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} + \left. e_{15} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \tau(x_1) \\ \left. e_{15} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} - \left. \epsilon_{11} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = D_1^{(2)}(x_1, 0) + D_2^{(2)}(x_1, 0) \\ u^{(1)}|_{x_2=0} = u^{(2)}(x_1), \quad \phi^{(1)}|_{x_2=0} = \phi^{(2)}|_{x_2=0} \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau(x_1)$ – контактное напряжение,

$$D_1^{(2)}(x_1, 0) = (\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a))D^{(2)}(x_1, 0),$$

$$D_2^{(2)}(x_1, 0) = (\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a))D^{(2)}(x_1, 0), \quad -\infty < x_1 < \infty$$

$$D^{(2)}(x_1, 0) = -\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \quad \text{при } |x_1| > a, \quad D^{(2)}(x_1, 0) = -\varepsilon_2 \left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \quad \text{при}$$

$|x_1| < a, \quad D^{(2)}(x_1, x_2)$ — индукция электрического поля.

$\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2, \quad c_1^2 = c_{44} / \rho_1, \quad k_1^2 = \omega^2 / c_1^2 (1 + \chi^2), \quad \chi^2 = e_{15}^2 / c_{44} \varepsilon_{11}$ — коэффициент электромеханической связи, e_{15} — пьезоэлектрическое постоянное, ε_{11} — коэффициент диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — коэффициенты диэлектрической проницаемости диэлектрика, ρ_1 — плотность пьезоэлектрика, c_{44} — коэффициент упругости пьезоэлектрика, $c_2^2 = G_2 / \rho_2, \quad k_2^2 = \omega^2 / c_2^2, \quad G_2$ и ρ_2 — соответственно модуль сдвига и плотность материала диэлектрического слоя.

В силу малости толщины диэлектрического слоя считается, что $D^{(2)}(x_1, x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D^{(2)}(x_1, x_2) = D^{(2)}(x_1, 0)$, тогда в силу $\phi^{(2)}|_{x_2=h} = 0$ для $\phi^{(2)}(x_1, x_2)$ будем иметь:

$$\phi^{(2)}(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1} D_1^{(2)}(x_1, 0) - \frac{1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1, 0) \right) (x_2 + h), \quad -\infty < x_1 < \infty \quad (4)$$

Для решения уравнений (1), (2), (4) с контактными условиями (3), применим интегральное преобразование Фурье —

$$\bar{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty.$$

Получим граничную задачу:

$$\frac{d^2 \bar{u}^{(1)}}{dx_2^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{u}^{(1)} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\varphi}^{(1)}}{dx_2^2} - \sigma^2 \bar{\varphi}^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cdot k_1^2 \cdot \bar{u}^{(1)} \quad (5)$$

$$\bar{u}^{(2)}(\sigma) = \frac{\bar{\tau}(\sigma) - P}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)}, \quad \bar{\varphi}^{(2)}(\sigma; 0) = -\frac{h}{\varepsilon_1} \bar{D}_1^{(2)}(\sigma; 0) - \frac{h}{\varepsilon_2} \bar{D}_2^{(2)}(\sigma; 0)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} c_{44} \left. \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} + e_{15} \left. \frac{d\bar{\varphi}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} = \bar{\tau}(\sigma) \\ e_{15} \left. \frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left. \frac{d\bar{\varphi}^{(1)}}{dx_2} \right|_{x_2=0} = \bar{D}_1^{(2)}(\sigma, 0) + \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0) \\ \bar{u}^{(1)}|_{x_2=0} = \bar{u}^{(2)}(\sigma), \quad \bar{\varphi}^{(1)}|_{x_2=0} = \bar{\varphi}^{(2)}|_{x_2=0} \end{cases} \quad (6)$$

Выше имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точку $\sigma = -k_2$ сверху, а точку $\sigma = k_2$ снизу.

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$\left(\chi^2 |\sigma| - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1} h |\sigma| \right) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \right) \cdot \bar{D}_1^{(2)}(\sigma, 0) + \quad (7)$$

$$\left(\chi^2 |\sigma| - \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_2} h |\sigma| \right) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \right) \cdot \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0) = -\frac{P e_{15}}{c_{44}} |\sigma|$$

После этого, имея в виду функциональное уравнение (7), для упругого перемещения, электрического потенциала в пьезоэлектрике и контактных напряжений получим:

$$\bar{u}^{(1)}(\sigma, x_1) = \frac{P / c_{44} (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) + e_{15} / c_{44} \cdot (1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2) h |\sigma| \cdot \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_1} \quad (8)$$

$$\bar{\varphi}^{(1)}(\sigma, x_2) = \frac{-\frac{P e_{15} \varepsilon_2}{c_{44} \varepsilon_{11}} - (1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2) / h \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \cdot \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} +$$

$$\frac{P e_{15} / \varepsilon_{11} c_{44} (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) + \chi^2 (1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2) h |\sigma| \cdot \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \cdot e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_2} \quad (9)$$

Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$. При этом контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma = -k_1$ сверху, а точку $\sigma = k_1$ снизу [2].

$$\bar{\tau}(\sigma) = \frac{P \left(\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (1 + \chi^2) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \right) + \frac{e_{15} G_2}{c_{44}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) h^2 |\sigma| (\sigma^2 - k_2^2) \cdot \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0)}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]} \quad (10)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (7).

Для решение функционального уравнения (7) перепишем его в виде:

$$\bar{D}_1^{(2)}(\sigma, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0) = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) K(\sigma) \bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0) - \bar{S}(\sigma) \quad (11)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\varepsilon_1 \left(\chi^2 |\sigma| - \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \right)}{\left(\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \right)}$$

$$\bar{S}(\sigma) = \frac{P e_{15} \varepsilon_1 |\sigma|}{c_{44} \left(\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \right)}$$

Далее приступим к исследованию знаменателя $\bar{K}(\sigma)$, $\bar{S}(\sigma)$:

$$\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] = f(\sigma)$$

Легко видеть, что при $k_2 > k$ ($k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}$) и при любых значениях χ

$f(k_1) > 0$, $f(k_2) < 0$. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial \sigma} < 0$ при $\sigma > k_1$ и при любых значениях χ .

Из этого следует, что в интервале $k_1 < \sigma < k_2$ функция $f(\sigma)$ имеет единственный нуль $\sigma = \sigma_0$. Из-за четности функции $f(\sigma)$ следует, что $\sigma = -\sigma_0$ в интервале $-k_1 < \sigma < -k_2$ также является нулем этой функции. Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точку $\sigma = -\sigma_0$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_0$ - снизу. Из вышесказанного следует, что существует электроупругая поверхностная волна Лява, которая распространяется со скоростью $C_L = \omega / \sigma_0$.

Применив к уравнению (11) обратное преобразование Фурье и пользуясь теоремой о свертке, будем иметь:

$$D_1^{(2)}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1, 0) = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} K(|x_1| - l) D^{(2)}(l, 0) dl - S(x_1)$$

$$K(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\sigma) e^{-i\sigma x_1} d\sigma, \quad S(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}(\sigma) e^{-i\sigma x_1} d\sigma \quad -\infty < x_1 < \infty$$

Требую, чтобы $|x_1| \leq a$, для определения $D^{(2)}(x_1, 0)$ получим Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода:

$$D^{(2)}(x_1, 0) = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} K(|x_1| - l) D^{(2)}(l, 0) dl - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} S(x_1) \quad \text{при } |x_1| \leq a \quad (12)$$

допускающее решение методом последовательных приближений в пространстве непрерывных функции $C[-a; a]$ при

$$\left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right| \max_{|x_1| \leq a} \int_{-a}^a K(|x_1 - l|) D^{(2)}(l, 0) dl < 1.$$

После определения $D^{(2)}(x_1, 0)$ при $|x_1| \leq a$ её значение $|x_1| \geq a$ определится по формуле:

$$D^{(2)}(x_1, 0) = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \int_{-a}^a K(|x_1 - l|) D^{(2)}(l, 0) dl - S(x_1) \text{ при } |x_1| \geq a \quad (13)$$

Поскольку $\bar{K}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ имеет порядок $|\sigma|^{-1}$, то из свойства интеграла Фурье следует, что $K(|x_1 - l|)$ при $x_1 = l$ имеет логарифмическую особенность, поскольку $\bar{F}^{-1}(|\sigma|^{-1}) = -\frac{1}{\pi} \ln|x_1| + \text{const}$, где F – обобщенное преобразование Фурье, F^{-1} – обратное преобразование Фурье. Что касается $S(x)$, то она непрерывная функция, поскольку $\bar{S}(\sigma)$ абсолютно интегрируемая функция.

В силу вышесказанного следует, что функция $D_1^{(2)}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1, 0)$ в точках $x_1 = \pm a$ непрерывна. Следовательно, функция $D^{(2)}(x, 0) = D_1^{(2)}(x, 0) - D_2^{(2)}(x, 0)$ в точках $x_1 = \pm a$ может иметь конечный скачок, поскольку $D^{(2)}(a + 0; 0) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D^{(2)}(a - 0; 0)$.

$$D^{(2)}(-a - 0; 0) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D^{(2)}(-a + 0; 0) \text{ при } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

Исходя из функционального уравнения, в силу вышесказанного $D_1^{(2)}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1, 0)$ можно представить в виде:

$$D_1^{(2)}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{g}(\sigma) - \frac{2A\sigma_0}{\sigma^2 - \sigma_0^2} \right) e^{-i\alpha x} d\sigma + iAe^{i\sigma_0 x} \quad (14)$$

где $-\infty < x_1 < \infty$, а A является вычетом $\bar{g}(\sigma)$ и определяется в следующем виде:

$$A = \frac{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_{11} \chi^2 h \sigma_0^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h \sigma_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) D_2^{(2)}(\sigma_0, 0) - \frac{Pe_{11} \sigma_0}{c_{44}}}{f'(\sigma)_{\sigma=\sigma_0}}$$

$$\bar{g}(\sigma) = \frac{\left(\varepsilon_{11} \chi^2 |\sigma| - \varepsilon_1 \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right] \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) D_2^{(2)}(\sigma, 0) - \frac{Pe_{11} |\sigma|}{c_{44}}}{\chi^2 \varepsilon_{11} |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]}$$

Если учесть, что функция $D^{(2)}(x_1, 0)$ принимает при $x_1 = 0$ конечное значение, то в силу свойств интеграла Фурье можно заключить, что $\bar{D}_2^{(2)}(\sigma, 0)$ имеет порядок $\frac{2 \sin a\sigma}{\sigma}$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Тогда легко видеть, что

$\bar{g}(\sigma) - \frac{2A\sigma_0}{\sigma^2 - \sigma_0^2}$ и $\frac{d}{d\sigma} \left(\bar{g}(\sigma) - \frac{2A\sigma_0}{\sigma^2 - \sigma_0^2} \right)$ — абсолютно интегрируемые функции ($-\infty < \sigma < \infty$). И после интегрирования по частям, можно убедиться, что интегральный член в выражении $D_1^{(2)}(x_1, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1, 0)$

при $|x_1| \rightarrow \infty$ имеет порядок $o(x_1^{-1})$. Таким образом, для $\bar{D}^{(2)}(\sigma, 0)$ получим асимптотическую формулу:

$$D^{(2)}(x_1, 0) = iAe^{i\sigma_0|x_1|} + o(x_1^{-1}), \quad |x_1| \rightarrow \infty \quad (15)$$

Теперь приступим к исследованию $\tau(x_1)$. Для этого $\tau(x_1)$ запишем в виде:

$$\tau(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{L}(\sigma) e^{-i\sigma x_1} d\sigma + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) D_2^{(2)}(x_1, 0)$$

где

$$\bar{L}(\sigma) = \frac{P(\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (1 + \chi^2) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2})}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]}$$

$$- \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left\{ \chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (1 + \chi^2) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \varepsilon_1 \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right\} D_2^{(2)}(\sigma_0, 0)$$

$$- \frac{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]}{\chi^2 \varepsilon_1 |\sigma| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h |\sigma|) \left[(1 + \chi^2) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma^2 - k_2^2) \right]}$$

Нетрудно убедиться, что интегральный член является непрерывной функцией в точках $x_1 = \pm a$, значит $\tau(x_1)$ в точках $x_1 = \pm a$ может иметь конечный скачок, как и функция $D_2^{(2)}(x_1, 0)$. Далее поступая, как и выше, для $\tau(x_1)$ получим асимптотическую формулу:

$$\tau(x_1) = iB e^{i\sigma_0|x_1|} + o(x_1^{-1}), \quad |x_1| \rightarrow \infty \quad (16)$$

$$B = \frac{P(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11} h \sigma_0) \frac{G_2 h}{c_{44}} (\sigma_0^2 - k_2^2) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left\{ \sigma_0 \frac{G_2 h^2}{c_{44}} (\sigma_0^2 - k_2^2) \right\} D_2^{(2)}(\sigma_0, 0)}{f'(\sigma)_{\sigma=\sigma_0}}$$

Представляет интерес также получение поведения $\tau(x_1)$ при $|x_1| \rightarrow 0$.

Так как функция $\bar{L}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ имеет вид $\bar{L}(\sigma) = \frac{E}{|\sigma|} + o(\sigma^{-1})$, то в силу

свойств интеграла Фурье будем иметь: $\tau(x_1) = -\frac{E}{\pi} \ln|x_1| + O(1)$, $|x_1| \rightarrow 0$.

$$E = \frac{(1+\chi^2)k_{33}P}{G_2 h}$$

Асимптотическая формула для перемещения $u^{(1)}(x_1, 0)$ имеет вид:

$$u^{(1)}(x_1, 0) = iCe^{ik_2|x_1|} + o(x_1^{-1}) \text{ при } |x_1| \rightarrow \infty$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакриев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ. 1962. 279с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
29.01.2004