

УДК 539.3

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ НА  
 ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКОСТИ, УСТОЙЧИВОСТИ И  
 КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ  
 ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ**

Գոունի Վ.Ս.

ՎՃԳՆՈՒՆԻ

Նրկյակի, եաստատուն փորը կորության թաղանթների կոլտության, կայունության և տաստանումների  
 ընտրապահիների վրա յայնական սահրրի ազդության վնթուծությունը  
 Այլատանրում նրկյակի եաստատուն փորը կորության թաղանթների կոլտության, տաստանումների և  
 կառնության խնդիրների օրինակների վրա կատարվում է յայնական սահրրի հայվածան ազդության  
 վնթուծությունը թաղանթի եռչվարկային ընտրապահիների վրա Տրանսվերսալ իզոտրոպ կոլտիզ  
 պարաստված, եռչվարկորնն անրազված թաղանթի հասար գտնված մն թաղանթի կորության  
 ընտրապահիի տանանները, որոնցից հետո յայնական սահրրի ազդությունը կարնչի է առանարն 5% յ  
 ճասրյանը

V. T. Gouni

**Analysis of Influence of Transverse Shear on Rigidity, Stability and Vibration  
 of Shallow Shells of Double Constant Curve**

В работе на примерах задач жесткости, колебаний и устойчивости весьма пологих оболочек двойкой постоянной кривизны делается анализ влияния учета поперечных сдвигов на расчетные характеристики. Для радиально опертой по четырем краям оболочки, изготовленной из трансверсально-изотропного материала найдены границы параметра кривизны оболочки после которых влиянием учета поперечных сдвигов можно пренебречь с точностью до 5%

1. Пусть оболочка двойкой постоянной кривизны  $k_1, k_2$  с размерами  $a, b, h$  и техническими постоянными материала  $E, \nu, G'$  загружена давлением

$$q(x, y) = q_1 \sin \lambda_1 x \sin \mu_1 y \quad \left( \lambda_1 = \frac{\pi}{a}, \mu_1 = \frac{\pi}{b} \right) \quad (1.1)$$

При (1.1) для наибольшего по координатам  $x, y$  прогиба оболочки (прогиб в точке  $x = 0.5a, y = 0.5b$ ) получается формула [1]

$$w_{11} = q_1 \left[ \frac{D(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^{-1}}{1 + k_{11}} - Eh \frac{(k_1 \lambda_1^2 + k_2 \mu_1^2)^{-1}}{(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^2} \right] \quad (1.2)$$

где  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ,  $k_{11} = Eh^2(\lambda_1^2 + \mu_1^2)/10(1 - \nu^2)G'$

Здесь  $k_{11}$  характеризует влияние поперечных сдвигов и приводит к увеличению максимального прогиба оболочки. В случае пластинки [2]

$$w_1 = \frac{q_1}{D(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^2} (1 + k_{11}) = w_1^0 (1 + k_{11})$$

где  $w_1^0$  — наибольший прогиб пластинки по классической теории.

При  $k_{11} \leq 0.05$  влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь уже для пластинок ( $k_1 = k_2 = 0$ ). В этом случае для относительных толщин

$$\frac{h^*}{a} \leq 0.225 \sqrt{\frac{(1-\nu^2)G'}{(1+\chi^2)E}} \quad (\chi = a/b) \quad (1.3)$$

влияние поперечных сдвигов на максимальный прогиб пластинки не превышает 5%.

В случае квадратной изотропной пластинки ( $a = b$ ) и при  $\nu = 0.3$  получается  $h^*/a \leq 0.0941$ .

В случае оболочек вклад второго члена в знаменателе (1.2) приводит к уменьшению максимального прогиба  $w_1$  и влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь при относительных толщинах больше, чем в (1.3). Требование, чтобы поправка от учета влияния поперечных сдвигов была меньше 5%, приводит к условию

$$\frac{w_1}{w_1^0} = \frac{A+B}{\frac{A}{1+k_{11}} + B} \leq 1.05 \quad (1.4)$$

где  $w_1^0$  — наибольший прогиб оболочки по классической теории

$$A = D(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^2, \quad B = Eh \frac{(k_1 \lambda_1^2 + k_2 \mu_1^2)^2}{(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^2} \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует

$$B \geq \frac{20(k_{11} - 0.05)}{k_{11} + 1} A \quad (1.6)$$

Здесь следует отметить, что при  $k_{11} \leq 0.05$  влиянием поперечных сдвигов с точностью до 5% можно пренебречь уже для пластинки.

Из условия (1.6), с учетом обозначений (1.5), для параметра кривизны получается

$$(k_1 + k_2 \chi^2) a \geq 12.7 (1 + \chi^2)^2 \frac{h}{a} \sqrt{\frac{k_{11} - 0.05}{(1 - \nu^2)(1 + k_{11})}} \quad (1.7)$$

В случае квадратной в плане ( $a = b$ ) сферической оболочки ( $k_1 = k_2 = 1/R$ ), при  $\nu = 0.3$  из (1.7) получается

$$\frac{a^2}{hR} \geq 26.7 \sqrt{\frac{k_{11} - 0.05}{k_{11} + 1}} \quad (1.8)$$

В табл. 1 в зависимости от  $k_{11}$  приведены значения параметра кривизны оболочки  $a^2/Rh$ , при котором поправка от учета влияния поперечных сдвигов не превышает 5%.

Последняя строка табл. 1 показывает увеличение наибольшего прогиба пластинки при учете влияния поперечных сдвигов по сравнению с классической теорией. Между тем для оболочек при данных  $k_{11}$  влияние

учета поперечных сдвигов пренебрежимо с точностью до 5%.

Таблица 1

$k_{11}$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$a^2/hR$	10.9	14.6	16.9	18.4	19.5	20.3	21.0	21.5
$w_1/w_1^0$	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
$R=0$								

Определим теперь параметр кривизны оболочки, для которой влиянием первого слагаемого в знаменателе формулы (1.2) можно пренебречь по сравнению со вторым, т.е. пренебрегается влияние моментного состояния на наибольший прогиб оболочки

$$B \geq \frac{20A}{1+k_{11}} \quad (1.9)$$

Из (1.9) для параметра кривизны оболочки получается

$$(k_2 + k_1 \chi^2) a \geq 12,7 \frac{(1 + \chi^2)^2}{\sqrt{(1+k_{11})(1-\nu^2)}} \quad (1.10)$$

Для сферической оболочки ( $k_1 = k_2 = 1/R$ ) при  $a = b$  и  $\nu = 0,3$  получается оценка

$$\frac{a^2}{Rh} \geq \frac{26,7}{\sqrt{1+k_{11}}} \quad (1.11)$$

При (1.10) оболочку в смысле наибольшего прогиба можно считать безмоментной  $w_1 = q_1/B = q_1(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 / Eh(k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2)^2$ , откуда для вышеприведенной сферической оболочки получается  $w_1 = q_1 R^2 / Eh$ .

2. Рассмотрим теперь вопрос влияния поперечных сдвигов на частоты свободных колебаний оболочки.

Для частот собственных колебаний оболочки с учетом влияния поперечных сдвигов имеется формула [1]

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ \frac{D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{1+k_{mn}} + Eh \frac{(k_1 \mu_n^2 + k_2 \lambda_m^2)^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right] \quad (2.1)$$

где  $\lambda_m = m\pi/a, \mu_n = n\pi/b, m, n$  — числа полуволн по направлениям координатных осей  $Ox, Oy, k_{mn} = Eh^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)/10(1-\nu^2)G'$ .

Очевидно, что первая (наименьшая) частота собственных колебаний пластинки достигается при  $m = n = 1$  и равна

$$\omega_{11} = \omega_{11}^0 / \sqrt{1+k_{11}}, \quad \omega_{11}^0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\pi^2}{a^2} (1 + \chi^2) \quad (2.2)$$

где  $\omega_{11}^0$  — первая частота собственных колебаний пластинки, найденной по классической теории.

Учет влияния поперечных сдвигов приводит к уменьшению частот собственных колебаний.

Из (2.2) получается, что при

$$\frac{\omega_{11}^0}{\omega_{11}} = \sqrt{1 + k_{11}} \leq 1,05 \Rightarrow k_{11} \leq 0.1025 \quad (2.3)$$

влиянием поперечных сдвигов на первую частоту собственных колебаний пластинки можно пренебречь.

В случае квадратной ( $\chi = 1$ ), изотропной пластинки, при  $\nu = 0.3$  получается  $h'/a \leq 0.135$ .

В случае оболочек требование 5% точности классической теории приводит к условию

$$\frac{\omega_{mn}^0}{\omega_{mn}} = \sqrt{\frac{A_{mn} + B_{mn}}{A_{mn}}} \leq 1,05 \Rightarrow B_{mn} \geq 9,76 \frac{k_{mn} - 0,1025}{k_{mn} + 1} A_{mn} \quad (2.4)$$

где

$$A_{mn} = D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2, \quad B_{mn} = Eh \frac{(k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2)^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \quad (2.5)$$

Для сферической оболочки ( $k_1 = k_2 = 1/R$ ) найдем форму собственных колебаний, при которой достигается первая частота собственных колебаний. Для частот собственных колебаний сферической оболочки

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ \frac{D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{1 + k_{mn}} + \frac{Eh}{R^2} \right] \quad (2.6)$$

Нетрудно показать, что  $\omega_{mn}$  — монотонно возрастающая функция от  $\lambda_m$  и  $\mu_n$ , и следовательно,  $\min \omega_{mn} = \omega_{11}$ . В этом случае из второй формулы (2.4) для параметра кривизны оболочки получается

$$\frac{a^2}{Rh} \geq 18,7 \sqrt{\frac{k_{11} - 0.1025}{k_{11} + 1}} \quad (2.7)$$

В табл. 2 в зависимости от  $k_{11}$  приведены значения параметра кривизны сферической оболочки  $a^2/Rh$ , при котором поправка от учета влияния поперечных сдвигов не превышает 5%

Таблица 2.

$k_{11}$	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$a^2/Rh$	14.0	14.9	15.5	15.9	16.2	16.5	16.7	16.9
$\omega_{11}/\omega_{11}^0$ $R = 11$	0.632	0.577	0.534	0.500	0.471	0.447	0.426	0.408

Как видно из табл.2, учет влияния поперечных сдвигов на первую частоту оказывает более слабое влияние, чем на наибольший прогиб. При изменении  $k_{11}$  в достаточно широком диапазоне при значениях параметра кривизны, соответствующих теории весьма пологих оболочек, первая частота собственных колебаний оболочки практически (с точностью до 5%) не меняется при учете влияния поперечных сдвигов. Между тем, для

$k_{11} \in [1,5; 5]$  первая частота собственных колебаний пластинки уменьшается от 1.58 до 2.45 раз.

Отметим, что для квадратной в плане сферической оболочки при

$$\frac{a^2}{Rh} \approx \frac{17.7}{\sqrt{(1+k_{11})(1-\nu^2)}} \quad (2.8)$$

влиянием моментного состояния на первую частоту можно пренебречь и для первой частоты принять

$$\omega_{11} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.9)$$

3. Рассмотрим теперь вопрос учета влияния поперечных сдвигов на критическую нагрузку на примере весьма пологой прямоугольной в плане  $axb$  сферической оболочки. Пусть оболочка загружена постоянным давлением  $q$ , тогда для собственных значений задачи устойчивости получается формула

$$q_{mn}^* = \frac{2D}{R} \left[ \frac{\lambda_m^2 + \mu_n^2}{1 + k(\lambda_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{\alpha}{\lambda_m^2 + \mu_n^2} \right] \quad (3.1)$$

где

$$\alpha = Eh/R^2 D = 12(1-\nu^2)/h^2 R^2, \quad k = Eh^2/10(1-\nu^2)G' \quad (3.2)$$

Нетрудно показать, что наименьшее значение  $q_{mn}^*$  достигается при

$$\lambda_m^2 + \mu_n^2 = \sqrt{\alpha}/(1 - k\sqrt{\alpha}) \quad (3.3)$$

и критическое значение давления —

$$q_{кр} = \frac{4D}{R} \sqrt{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2} k\sqrt{\alpha} \right)$$

или с учетом обозначений (3.2)

$$q_{кр} = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}E}{10\sqrt{1-\nu^2}G'} \frac{h}{R} \right) \quad (3.4)$$

В случае оболочки из изотропного материала при  $\nu = 0.3$

$$q_{кр} = 1.21E \frac{h^2}{R^2} \left( 1 - 0.472 \frac{h}{R} \right) \quad (3.5)$$

Из формулы (3.4) видно, что в отличие от задач жесткости, собственных колебаний, в задаче устойчивости сферической оболочки при внешнем давлении, поправка от учета влияния поперечных сдвигов имеет порядок  $h/R$ , а не  $h^2/a^2$ .

В случае весьма пологой сферической оболочки из изотропного материала поправка от учета поперечных сдвигов менее 2.5%, т.к. для пологой оболочки  $h/R \leq 1/20$ .

В случае оболочки из трансверсально-изотропного материала только при  $E/G' > 110$  учет влияния поперечных сдвигов может повлиять на значение критической нагрузки.

4. На примере одномерной задачи изгиба длинной пластинки

( $h \gg a$ ) оценивается влияние учета поперечных сдвигов на напряженное состояние.

Пусть пластинка по длинным сторонам ( $x = 0, y = a$ ) шарнирно оперта и загружена давлением  $q = q_1 \sin \lambda_1 x$ , тогда для определения ненулевых напряжений из [1] можно получить формулы

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{12a^2 z}{\pi^2 h^3} \left[ 1 + k_1 - 5k_1 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2} \right) \right] q_1 \sin \lambda_1 x, \quad \left( k_1 = \frac{\pi^2 E h^2}{10(1-\nu^2) a^2 G'} \right) \\ \sigma_{13} &= \frac{6a}{\pi h} \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) q_1 \cos \lambda_1 x \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{12z}{h} \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2} \right) \right] q_1 \sin \lambda_1 x\end{aligned}\quad (4.1)$$

Следует отметить, что значения  $\sigma_{13}, \sigma_{33}$  не отличаются от соответствующих значений классической теории, а значение  $\sigma_{11}$  не удовлетворяет уравнению равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

причем наибольшая ошибка ( $x = 0, y = a, z = \pm h/2$ ) по абсолютному значению равна

$$\frac{ak_1}{\pi h} = \frac{\pi E h}{10(1-\nu^2) a G'} \quad (4.3)$$

что на порядок больше поправки от учета влияния поперечных сдвигов.

Отметим также, что поправка от учета влияния поперечных сдвигов на наибольшее значение нормального напряжения  $\sigma_{11}(0, 5a : 0,5h)$

$$\max_{x,z} \sigma_{11} = \frac{6a^2}{\pi^2 h^2} \left( 1 + \frac{k_1}{6} \right) \quad (4.4)$$

в шесть раз меньше, чем на наибольший прогиб и для изотропной пластинки влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь уже при  $h/a \geq 0,326$ .

С целью обеспечения удовлетворения уравнения (4.2) следует  $\sigma_{13}$  определить не по формуле (4.1)

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi(x)$$

что принято на стадии гипотез, а из (4.2) при значении  $\sigma_{11}$  по первой формуле (4.1), откуда

$$\sigma_{13} = \frac{6a}{\pi h} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) - \frac{1}{96} k_1 \left( 1 - 24 \frac{z^2}{h^2} + 80 \frac{z^4}{h^4} \right) \right] q_1 \cos \lambda_1 x \quad (4.5)$$

Наибольшие значения  $\sigma_{13}(0,0) = \sigma_{13}(a,0)$ , найденные по формулам (4.1), (4.5), суть

$$\sigma_{13} = \frac{3a}{2\pi h}, \quad \sigma_{13} = \frac{3a}{2\pi h} \left( 1 - \frac{k_1}{24} \right), \quad \text{если } k_1 \leq 4 \quad (4.6)$$

При  $k_1 = \pi^2 E h^2 / 10(1 - \nu^2) G' a^2 > 4$  наибольшее значение  $\sigma_{13}$  достигается при

$$\frac{z}{h} = \pm \sqrt{0,15k_1 - 0,6} \quad (4.7)$$

Условие (4.7) для изотропной пластинки при  $\nu = 0,3$  дает  $h/a > 1,19$ , что бессмысленно. Однако, для пластинки из трансверсально-изотропного материала при  $\nu = 0,3, k_1 > 4$ ,  $h\sqrt{E}/a\sqrt{G'} > 1,92$  и относительных толщинах  $h/a = 1/3, 1/4, 1/5$ , для  $E/G'$  соответственно получается  $E/G' > 33,2 : 59,0 : 92,2$ .

В случае  $k_1 > 4$  уменьшение наибольшего значения  $\sigma_{13}$ , найденного по формуле (4.5), становится существенным по сравнению со значением по второй формуле (4.1).

В заключение следует отметить, что вышеизложенное не относится к задачам распространения упругих волн, где учет влияния поперечных сдвигов необходим.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 440 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластинок. М.: Физматгиз. 1967. 360 с.

Институт механики  
НАН РА

Поступила в редакцию  
19.08.2003