ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №3, 2003 Механика

УДК 393.3

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Минасян М.М.

Մ.Մ. Մինասյան

Գազի գերձայնային հոսանքում էլեկտրահաղորդիչ սալի տատանումների հավասարումները լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ

Աշխատանքում արտածվում են իդեալական գազի գերձայնային հոսանքում էլեկտրահաղորդիչ սալի ծռման տատանումները տարբեր մոտավորությամբ նկարագրող դիֆերենցիալ և ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումները լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Ըստ սալի հաստության էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչների բաշխման օրենքի համար ընդունված է Գ.Ե. Բաղդասարյանի կողմից առաջարկված մոդելը: Սալի վրա ազդող աերոդինամիկական ճնշման համար կիրառվել է սալի ճկվածքից ճնշման տարածական և ժամանակային ոչ լոկալ կախվածության (ոչ "մխոցային") օրենքը: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր:

M.M. Minassian

The Equations of Vibrations of Electrically Conducting Plates in the Supersonic Gas Flow a Transverse Magnetic Field being Present

В работе выведены дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, описывающие в различных приближениях изгибные колебания электропроводящей пластинки в сверхзвуковом потоке газа в присутствии поперечного магнитного поля. Для распределения составляющих электромагнитного поля по толщине пластинки принята модель, предложенная Г.Е. Багдасаряном. Для выражения аэродинамического давления использован пространственно-временной нелокальный (не "поршневой") закон зависимости давления от прогиба пластинки. Рассмотрены частные случаи.

I. В общей постановке для изгибных колебаний пластинки, находящейся в поперечном магнитном поле и обтекающейся потоком идеального газа, можно исходить из уравнения

$$L\left[w(x,t)\right] = M\left[w(x-\xi,t)\right], \quad \left(x=(x_1,x_2), \quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\right) \tag{1}$$

$$L\left[w(x,t)\right] = L_0\left[w(x,t)\right] + P\left[w(x-\xi,t-t')\right]$$

где $w(x_1,x_2,t)$ – прогиб пластинки, L_0 – дифференциальный оператор движения пластинки в отсутствии потока и магнитного поля, M и P – функционалы (интегрального типа), зависящие от прогиба и определяемые решением во внешней к пластинке области задач электродинамики и аэродинамики с учетом граничных условий на поверхности пластинки. Основная трудность возникающих задач обусловлена сложностью этих функционалов, которую можно преодолеть путем введения различных упрощений. Эффективными будем считать те упрощения, в результате которых для прогиба получается дифференциальное уравнение с сохранением главных особенностей интегро-дифференциального уравнения (1).

1. Вначале обсудим вопрос о магнитном поле (P). Будем исходить из системы уравнений Г.Е. Багдасаряна [1], выведенной им на основе

линейной зависимости части компонент индуцированного электромагнитного поля от x_3 по толщине пластинки:

$$L[w] = D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2\sigma h^3 H_0}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}(H_0 \Delta w - F) \quad (2)$$

$$F = \frac{3}{hH_0}\iint L[w(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, t)]K(r)d\xi_1 d\xi_2 \quad (r = |\xi|) \quad (3)$$

$$K(r) = \int_0^\infty \frac{\rho J_0(r\rho)d\rho}{h^2\rho^2 + 3h\rho + 3} \quad (4)$$

где $F(x_1, x_2, t)$ – слагаемое поперечной компоненты возмущенного индуцированного магнитного поля, пропорциональное x_3 (об остальных обозначениях см.[2]).

В работе [1] с использованием предположения о малости kh (k – волновое число гармонических волн в бесконечной пластинке) по отношению к единице получено следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)L[w] = \frac{\alpha h H_0^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w, \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2} \quad (5)$$

Исследование ряда задач [2] показало, что уравнение (5) действительно отражает главные особенности изгибных колебаний тонких пластин.

Интересно (хотя бы методологически) вывести уравнение (5) из системы (2–4). Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(r) = r\int_0^\infty \frac{\eta r J_0(\eta r)d\eta}{\eta^2 + 3\eta + 3} \quad (6)$$

обладающую свойствами

$$\varphi(r) \in D[0, \infty), \quad \varphi(r) \geq 0, \quad \int_0^\infty \varphi(r)dr = 1/3 \quad (7)$$

где D – пространство основных функций на R^2. Первые два свойства очевидны. Интеграл вычисляется хотя и просто, однако требует больших выкладок с использованием свойств бесселевых функций и интегралов типа Ханкеля-Николсона [3]. В качестве примера приведем частный случай:

$$\int_0^\infty \varphi(r)dr = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{r\eta J_0(r\eta)drd\eta}{\eta^2 + b} = \int_0^\infty rdr\int_0^\infty \frac{\eta J_0(r\eta)d\eta}{\eta^2 + b} = \int_0^\infty rK_0(br)dr = 1/b \quad (8)$$

Из условий (7) вытекает следующее [4]:

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \to \frac{1}{b}\delta(r) \text{ при } \varepsilon \to +0 \quad (9)$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция. Тогда для (4) получается

$$K(r) \to \delta(r)/r \text{ при } h/l \to 0 \quad (10)$$

где l – некоторая характерная длина задачи (длина полуволн изгибных колебаний, линейный размер пластинки и т.д.). Переходя к полярным координатам в интеграле (3) с учетом (10), получается уравнение

$$F = \frac{2\pi}{hH_{\text{п}}}\Delta w \qquad (11)$$

выведенное в [1] из упрощенных дифференциальных уравнений. Исключение F из системы (2)-(3) и приводит к уравнению (5).

Обращая оператор $1+\alpha\partial/\partial t$ в (5) и преобразуя правую часть, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$L[w] = hT_H\Delta w - hT_H\alpha^{-1}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\Delta w d\tau + hT_H\left(F_0 - H_0\Delta w_0\right)\exp(-t/\alpha) \qquad (12)$$

где F_0 и w_0 — начальные значения соответствующих функций. Во многих задачах их можно считать равными нулю. В задачах же о распространении волн и свободных колебаний можно рассмотреть уравнение:

$$L[w] = hT_H\Delta w - hT_H\beta^{-1}\int_{-\infty}^{t'} \exp\left(-\frac{t'-\tau'}{\alpha}\right)\Delta w d\tau' \quad T_H = H_0^2/2\pi \qquad (13)$$

где введено безразмерное время $t' = \omega_0 t$ и безразмерный параметр $\beta = \alpha\omega_0$ (ω_0 — частота свободных колебаний пластинки вне поля). Как видно из (13), влияние поперечного магнитного поля на изгибные колебания пластин сводится к возникновению мембранных растягивающих усилий и механизму релаксации с характерным временем α. Оценим эти влияния в двух предельных случаях:

1. $\beta = \alpha\omega_0 >> 1$, т.е. время релаксации намного больше периода колебаний пластинки вне поля. Из (13) следует известное уравнение [5]

$$L[w] = hT_H\Delta w \qquad (14)$$

В [2] это приближение названо приближением для идеальных проводников, хотя условие $\beta >> 1$ несколько шире и включает случай конечных проводников на низкочастотном спектре колебаний. В любом случае магнитное поле только повышает жесткость пластинки.

2. $\beta = \alpha\omega_0 << 1$. Это случай слабых проводников или высокочастотного спектра колебаний. Чтобы выделить главные члены в (13), преобразуем интеграл. Имеем

$$L[w] = hT_H\Delta w - hT_H\Delta\int_0^\infty \exp(-\xi)w(t' - \beta\xi)d\xi \qquad (15)$$

Разлагая подынтегральную функцию по степеням малого параметра β и удерживая три первых члена, получим

$$L[w] = \alpha hT_H\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \alpha^2 hT_H\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w \qquad (16)$$

Как видно из этого уравнения, в данном случае магнитное поле порождает демпфирование и дисперсию, при этом исключается растягивающее усилие. Отметим также, что последний член подобен инерции вращения, однако с противоположным знаком, так что одновременное удержание обоих членов приводит к слагаемому в правой части (16)

$$\left(\frac{2\rho h^3}{3} - \alpha^2 h T_H\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w \qquad (17)$$

Разные представления уравнений (5), (13), (14) и (16) напрашиваются на проведения следующей параллели между свойствами магнитных силовых линий и линейного вязкоупругого тела (механистические взгляды Фарадея на магнитное поле). Если $h\Delta w$ отождествлять с осевой деформацией, $H_0^2/2\pi$ – с модулем Юнга, $L[w]$ – с осевым напряжением, считая α временем релаксации, то уравнения (5) и (13) предстанут аналогами модели Максвелла, уравнение (14) – модели Гука и уравнение (16) без последнего члена-модели ньютоновской вязкой жидкости. Для полного набора не хватает параллели с моделью Больцмана и Кельвина. Например, аналогом последнего будет уравнение

$$L[w] = k_1 h T_H \Delta w + k_2 h T_H \frac{\partial}{\partial t}\Delta w \qquad (18)$$

где k_1 и k_2 – некоторым разумным образом подобранные коэффициенты, зависящие от параметра β так, что при $\beta \to \infty$ $k_1 \to 1$, $k_2 \to 0$ и, наоборот, при $\beta \to 0$ $k_1 \to 0$, $k_2 \to 1$.

В завершение данного пункта, содержащего обзор известных фактов в несколько другой трактовке, отметим следующее: система (2)-(3) содержит три параметра – h/λ, $H_0^2/2\pi E$, α/ω_0. Асимптотические разложения по этим параметрам приводят к большому разнообразию приближенных уравнений в зависимости от числа использованных параметров и удержанных членов разложений. Однако не все эти разложения последовательны. В системе (2) и (3) оператор L_0 можно экстраполировать на короткие волны (уточненные теории пластин), однако в уравнении (5) или (12) этого нельзя сделать безоговорочно. Здесь уже все зависит от порядков отношений всех трех параметров. Предположение о постоянстве нормальной составляющей индуцированного магнитного поля и касательной составляющей электрического поля (гипотезы магнитоупругости тонких тел [5]) делает сомнительным (как верно считает Г.Е. Багдасарян) экстраполирование оператора L_0 на короткие волны.

2. Теперь обсудим влияние аэродинамической нагрузки (P).

Как и в случае магнитного поля, здесь также функционал P определяется решением внешней задачи. В наиболее простой постановке будем исходить из линейных уравнений нестационарного сверхзвукового потока идеального газа. Тогда имеем [6]

$$P[w] = F_k^{-1} F_\omega^{-1}\left\{\frac{i\rho_0 a_0 (\omega - Uk_1)^2 w(\omega, k_1, k_2)}{\sqrt{(\omega - Uk)^2 - a_0^2 k^2}}\right\}$$

где правая часть представляет обратные преобразования Фурье по координатам x_1, x_2 и времени t, ρ_0, a_0, U – невозмущенные параметры потока. Как видно, и здесь для прогиба получается интегро-дифференциальное уравнение, однако вместо двух безразмерных параметров, характеризующих влияние магнитного поля (α, β), здесь имеется один безразмерный параметр — число Маха потока $M = U / a_0 > 1$. Вследствие этого всякое упрощение функционала P будет связано с числом Маха потока. Однако здесь сложность совершенно другого характера.

Приняв $M >> 1$, для давления получается известное поршневое приближение

$$p = \rho_0 a_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что при этом интегро-дифференциальное уравнение вырождается в дифференциальное уравнение того же порядка, что и уравнение без потока. Уравнения (16) или (18) также вырождены. Однако эти вырождения не вносят качественных изменений в динамику пластинки, поскольку не меняют число волн и колебательных мод системы. В случае обтекания число волн и мод в системе пластинка-поток очевидно больше, чем при отсутствии потока. В [7] предложена, в [8] уточнена, а в [9] обобщена нелокальная связь между давлением и прогибом, которая сохраняет количество волн в системе. В обобщенном виде она имеет вид [9]

$$\frac{D_1 p}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D_1}{Dt} \frac{Dw}{Dt} + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w, \quad \frac{D_1}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \tag{20}$$

В работе [10] показано, что в этом приближении для бесконечной пластинки в двумерном сверхзвуковом потоке области устойчивости и флаттерных колебаний с большой точностью совпадают с аналогичными областями, определяемыми точной постановкой (18) для всего диапазона изменения числа Маха, чего нельзя сказать о поршневом приближении (19), верным лишь только при больших числах Маха. В работе [11] показано, что для конечной пластинки приближение (20) выявляет одномодный флаттер при малых числах и двухмодный флаттер — при больших числах Маха, в то время, как "поршневое приближение" выявляет только двухмодный флаттер при больших числах Маха. Это объясняется тем, что приближение (20) сохраняет свойства главной операторной части точного уравнения.

Исключая давление, из системы (5),(20) получим дифференциальное уравнение колебания проводящей пластинки в поперечном магнитном поле

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \frac{D_1}{Dt} \left[L_0[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} \right] + \chi \rho_0 a_0^3 \Delta w \right\} = hT_H \frac{D_1}{Dt} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w \tag{21}$$

которое можно представить и в виде

$$\frac{D_1}{Dt} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \right) \left[L[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} \right] - hT_H \frac{\partial}{\partial t} \Delta w \right\} + \chi \rho_0 a_0^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \right) \Delta w \tag{22}$$

Обращая в уравнении (21) первый операторный множитель, получим

$$\begin{gathered} \frac{D_1}{Dt} \left\{ L_0 [w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} - hT_H \Delta w \right\} + \left(\chi \rho_0 a_0^3 + hT_H \alpha^{-2} \right) \Delta w = \\ = hT_H \alpha^{-2} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\alpha} \right) \left[1 - \alpha (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Delta w d\tau \end{gathered} \tag{23}$$

которое является обобщением уравнения (13) при наличии потока.

При $\alpha\omega_n >> 1$ из (23) получим уравнение

$$\frac{D_1}{Dw}\left[L_0[w]+\rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt}-hT_{II}\Delta w\right]+\chi\rho_0 a_0^3\Delta w=0 \tag{24}$$

обобщающее уравнение (14), а при $\alpha\omega_0 << 1$ – уравнение

$$\frac{D_1}{Dt}\left[L_0[w]+\rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt}-\alpha hT_{II}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w\right]+\chi\rho_0 a_0^3\Delta w=0 \tag{25}$$

обобщающее уравнение (14). Уравнение, обобщающее (18), будет

$$\frac{D_1}{Dt}\left[L_0[w]+\rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt}-hT_{II}\left(k_1+k_2\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta w\right]+\chi\rho_0 a_0^3\Delta w=0 \tag{26}$$

В трех последних уравнениях, обращая оператор D_1/Dt, получим

$$L_0[w]+(***)+\chi\rho_0 a_0^3\int_{-\infty}^{t}\Delta w(\lambda,y,\tau)_{\lambda=x-(U-a_0)(t-\tau)}d\tau \tag{27}$$

или

$$L_0[w]+(***)+\frac{\chi\rho_0 a_0^3}{U-a_0}\int_{-\infty}^{x}\Delta w(\xi,y,\lambda)\Big|_{\lambda=t-(x-\xi)/(U-a_0)}d\xi \tag{28}$$

где звездочками обозначены слагаемые с $L_0[w]$.

В задаче Коши для дифференциальных уравнений следует учитывать начальные условия для прогиба w и его временных производных, продиктованных оператором L_0, а также начальное значение функции F для уравнения (2) и начальное значение давления на пластинку для уравнения (20). В случае конечной пластинки к механическим граничным условиям закрепления кромок пластинки следует добавить только одно граничное условие для давления в передней сверхзвуковой кромке пластинки. Для интегро-дифференциальных уравнений следует сместить нижний предел интегральных членов к началам отсчета времени и пространства и при этом добавить слагаемые, определяемые дополнительными граничными и начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Об учете влияния индуцированного электромагнитного поля на колебания проводящих пластин в поперечном магнитном поле / Межвуз. Сб. науч. тр. Изд. ЕГУ Механика, 1987. Вып. 6. С. 49-57.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Физматгиз. 1996. 286с.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 825с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.. Наука. 1971. 512с.

5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272с.
6. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961. 339с.
7. Белубекян М.В., Минасян М.М. К проблемам флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 1997. Т.52. №4. С.38-45.
8. Минасян М.М., Минасян Д.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т.1. Вып.1. №1. С.49-54.
9. Минасян М.М. О флаттере пластин и оболочек при малых числах Маха сверхзвукового потока газа. / В кн. "Проблемы механики тонких деформируемых тел", (Посвящ. 80-летию академика С.А.Амбарцумяна) Изд. НАН РА. 2002. С.195-200.
10. Минасян Д.М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа. Сравнительный анализ. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №3. С.65-72.
11. Минасян Д.М. Вычисление частот одномерных флаттерных колебаний конечной пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №4. С.26-33.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
24.06.2003