

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН
В АНИЗОТРОПНЫХ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Даноян З.Н.

Զ.Ն. Դանոյան

Հարթ մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրերում

Մեխանիկի Մոսկովի կոմպլեքս լուծումների մեթոդի հիման վրա կառուցված են մագնիսա-առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումները, չորս առաձգական հաստատուններ ունեցող անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրերի համար: Այդ լուծումներից առանձնացված են լուծում-ների որոնք ներկայացնում են հարթ մագնիսաառաձգական ալիքներ: Բերվում է ալիքների դասակարգումը արագ և դանդաղ կամ քվադրկայանական ու քվադրկայանական ալիքների՝ կախված միջավայրի ֆիզիկա-մեխանիկական հատկություններից և արտաքին մագնիսական դաշտի մեծությունից ու կոդմնորդումից: Ուսումնասիրվում են փուլային արագությունների փոփոխությունները կախված մասնանշված պարա-մետրերից: Անասնավորապես որոշված են փուլային արագությունների լքստրեմալային արժեքները և առարձման ուղղությունները:

Այս հարցը անիզոտրոպ միջավայրերի համար դիտարկված է [4-6]-ում, մագնիսաառաձգական ալիքների համար [1-3]-ում:

Z.N. Danoyan

The Propagation of Magnetoelastic Plane Waves in Anisotropic Perfectly Conducting Media

На основе метода комплексных решений Смирнова-Соболева [7] построены функционально-инвариантные решения плоской задачи теории магнитоупругости для идеально-проводящих анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными. Из этих решений отделены решения, представляющие собой плоские магнитоупругие волны.

Приводятся классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучаются изменения фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. В частности, определены интервалы монотонности, экстремальные значения и направления распространения фазовых скоростей.

Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4,5,6], для магнитоупругих волн — в [1-3].

Введение. Магнитоупругие волновые процессы в анизотропных упругих средах сложны и многообразны, зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных, величины и направления внешнего магнитного поля, направлений распространения волн и т.д. В отличие от изотропных сред, где распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны, в анизотропных средах, а также изотропных и анизотропных средах в магнитном поле распространяются квазипродольные и квазипоперечные, или быстрые и медленные волны. В изотропных средах волновой процесс был описан функционально-инвариантными или комплексными решениями волновых уравнений [1]. В работах [2-4] методом комплексных решений исследованы волновые процессы в анизотропных средах, причем в [4] предлагается уточняющий подход к построению комплексных решений. В работах [5,6] методом комплексных решений изучены волновые процессы в изотропных средах в магнитном поле. В работах [7,8] этим методом изучено поведение магнитоупругих волн в идеально-проводящих анизотропных средах. В этой работе продолжается изучение данного вопроса. Детально изучаются

решения, соответствующие плоским магнитоупругим волнам. Приводится классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучаются изменения фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. В частности, определены интервалы монотонности, экстремальные значения и направления распространения фазовых скоростей.

Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4,5,6], для магнитоупругих сред — в [1-3].

1. Постановка задачи. Основные уравнения и их решения. Магнитоупругие волны в анизотропных идеально-проводящих упругих средах в плоском случае при наличии внешнего однородного постоянного магнитного поля с вектором напряженности $\vec{H}_0$ описываются следующими уравнениями движения в перемещениях [1,3]:

$$a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} = u_{tt}, \quad e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} = v_{tt} \quad (1.1)$$

где $u = f(x, y, t)$, $v = g(x, y, t)$ — компоненты упругого перемещения $\vec{u} = \{u, v, 0\}$ в декартовой системе координат x, y, z , оси которой совпадают с главными направлениями упругости среды, a_m, b_m, c_m, d_m, e_m — постоянные коэффициенты, определяемые выражениями (индексы u и v обозначают производные по x, y и t):

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, \quad b_1 = b_0 + \chi, \quad d_1 = d_0, \quad e_1 = d_0 + \chi, \quad c_1 = c_0 \\ a_2 &= a_0 + \chi, \quad b_2 = b_0, \quad d_2 = d_0 + \chi, \quad e_2 = d_0, \quad c_2 = c_0 \\ a_3 &= a_0 + \chi, \quad b_3 = b_0 + \chi, \quad d_3 = d_0, \quad e_3 = d_0, \quad c_3 = c_0 + \chi \\ a_0 &= c_{11}/\rho_0, \quad b_0 = c_{22}/\rho_0, \quad d_0 = c_{66}/\rho_0, \quad c_0 = (c_{12} + c_{66})/\rho_0, \quad \chi = H_0^2/4\pi\rho_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

c_{ik} — упругие постоянные, ρ_0 — плотность среды, χ — скорость Альфвена.

В (1.1) $m = 0, 1, 2, 3$ соответствует случаям отсутствия и следующим направлениям магнитного поля: $\vec{H}_0 = (1), \vec{H}_0 = H_0 \vec{i}, \vec{H}_0 = H_0 \vec{j}, \vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатной системы $Oxyz$.

Ограничения, которые должны налагаться на коэффициенты системы (1.1), определяются из условия вполне гиперболичности системы (1.1) и из условия положительной определенности формы упругой энергии [1]. Ввиду того, что упругие постоянные a_0, b_0, c_0, d_0 реальных известных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям [4-6]:

$$d_0 > 0, \quad A_0 = a_0 - d_0 > 0, \quad B_0 = b_0 - d_0 > 0, \quad 0 < c_0 < c_r^{(0)} = \sqrt{a_0 b_0 + d_0} \quad (1.3)$$

поведение упругих волн исследуется при (1.3) и при $\chi > 0$.

Согласно методу комплексных решений Смирнова-Соболева [7], выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями:

$$u = f(\Omega), \quad v = g(\Omega) \quad (1.4)$$

где Ω представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно x, y, t :

$$\Omega = l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y - k(\Omega) = 0 \quad (1.5)$$

Здесь под f и g понимаются непрерывные дважды дифференцируемые функции, если величины $l(\Omega), \dots, k(\Omega)$ — вещественны. А если некоторые из этих величин комплексны, то f и g — аналитические функции от Ω .

Определяя производные функций (1.4) по известным формулам дифференцирования сложных и неявных функций [5,6] из (1.5) и подставляя их значения в систему (1.1), получим условия:

$$\begin{aligned}(a_m m^2 + d_m n^2 - l^2) f'(\Omega) + c_m m n g'(\Omega) &= 0 \\ c_m m n f'(\Omega) + (e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) g'(\Omega) &= 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями (1.4).

Система (1.6) имеет ненулевое решение, если имеет место условие:

$$\Delta = (a_m m^2 + d_m n^2 - l^2)(e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) - c_m^2 m^2 n^2 = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega), m(\Omega), n(\Omega)$, а также, согласно (1.6), между производными $f'(\Omega), g'(\Omega)$.

Таким образом, класс функций (1.4) выражает решение системы (1.1), если их аргумент Ω определен уравнением (1.5) с коэффициентами, подчиненными уравнению (1.7), а сами функции — условием (1.6).

2. Однородные и неоднородные плоские волны. Из класса функционально-инвариантных решений можно выделить решения, представляющие собой плоские волны. Для этого в уравнении (1.5) примем $l(\Omega) \equiv 1, m(\Omega) \equiv -\theta = \text{const}, k(\Omega) \equiv \Omega, n(\Omega) \equiv \lambda = \text{const}$. Тогда получим:

$$u_k = f_k(\Omega_k), v_k = g_k(\Omega_k) \quad (2.1)$$

$$\Omega_k = t - \theta x \pm \lambda_k y \quad (k = 1, 2) \quad (2.2)$$

где λ_k — корни уравнения (1.7), которые в данном случае принимают вид:

$$b_m d_m \lambda^4 - p_m(\theta) \lambda^2 + r_m(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

Решения уравнения (2.3) представим в виде:

$$\lambda = \pm \lambda_k(\theta) = \pm \sqrt{(p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}) / 2b_m d_m}, \quad (k = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$p_m = b_m + d_m - l_m^2 \theta^2, \quad r_m = (a_m \theta^2 - 1)(e_m \theta^2 - 1), \quad l_m = a_m b_m + d_m e_m - c_m^2 \quad (2.5)$$

$$q_m = p_m^2 - 4b_m d_m r_m = D_m \theta^4 - 2M_m \theta^2 + B_m^2, \quad D_m = l_m^2 - 4a_m b_m d_m e_m \quad (2.6)$$

$$M_m = (b_m + d_m)N_m - (a_m d_m - b_m e_m)B_m \quad (2.7)$$

$$A_m = a_m - e_m, \quad B_m = b_m - d_m, \quad N_m = A_m B_m - c_m^2 \quad (2.8)$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что при вещественных значениях θ , функции (2.1) выражают однородные и неоднородные плоские волны.

Для построения решений можно использовать как первое, так и второе уравнение (1.6). Однако при некоторых значениях θ коэффициенты одного из уравнений могут одновременно обращаться в ноль и решение, составленное на основе этого уравнения, при таких значениях теряет смысл. Чтобы устранить этот недостаток, в работе [5] предлагается сначала из условий (1.6) составить обобщенное условие, суммируя последние. Решение, составленное на основе обобщенного условия:

$(a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) f'_k(\Omega_k) + (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) g'_k(\Omega_k) = 0$, (2.9)
согласно (2.1), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_k &= (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) W_k(\Omega_k) \\ v_k &= -(a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) W_k(\Omega_k) \end{aligned} \quad (k = \overline{1,2}) \quad (2.10)$$

Здесь W_k — ветви произвольной непрерывной дважды дифференцируемой функции W , если коэффициенты при переменных x, y, t в (2.2) вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области переменных x, y, t комплексные величины, то W — аналитическая функция комплексной переменной Ω .

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные волны.

Выбор знака $+$ или $-$ перед λ_k в (2.2) показывает, что плоские волны (2.10) распространяются в противоположных направлениях. Ввиду этого в дальнейшем будем рассматривать волны со знаком $+$ перед λ_k .

3. Классификация плоских волн и характер изменения их скоростей. Уравнения фронтов плоских волн имеют вид:

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y = C = \text{const} \quad (3.1)$$

Фазовые скорости и направления распространения этих волн определяются по нижеприведенным формулам:

$$\begin{aligned} \vec{V}_k &= - \frac{\partial \varphi / \partial t}{|\text{grad} \varphi_k|} \vec{n}_k, \quad \vec{n}_k = \frac{\text{grad} \varphi_k}{|\text{grad} \varphi_k|}, \quad \varphi_k = C - t + \theta x - \lambda_k y \\ \vec{V}_k &= \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda_k^2} \vec{i} - \frac{\lambda_k}{\theta^2 + \lambda_k^2} \vec{j}, \quad \vec{n}_k = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \vec{i} - \frac{\lambda_k}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \vec{j} \\ V_k &= \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}}, \quad \text{tg} \alpha_k = \frac{\theta}{\lambda_k(\theta)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\vec{n}_k$ — единичные векторы нормалей к фронтам волн, V_k — фазовые скорости распространения, $\alpha_k = \angle(-\vec{j}, \vec{n}_k)$, C — произвольная константа [3,4].

Из (3.2) следует, что каждому значению параметра θ из промежутка $(-\infty; \infty)$, для которых величины $\lambda_k(0)$ вещественны, соответствуют плоские однородные волны, фазовые скорости и направления распространения которых определяются формулами (3.2)₂ и (3.2)₁. Ввиду симметрии будем рассматривать интервал $0 \leq \theta < \infty$.

Как известно [2,4], важное значение имеет вопрос о разделении волн на квазипродольные и квазипоперечные или на быстрые и медленные в зависимости от параметра θ при любых вышеуказанных допустимых значениях параметров a_0, b_0, c_0, d_0 и χ (при выполнении (1.3) и при $\chi > 0$) [1].

Исследование этого вопроса связано с изучением свойств корней $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения (2.3). Этот вопрос детально изучен в работе [3], где получен следующий окончательный результат:

1) Параметры a_0, b_0, c_0, d_0 и χ удовлетворяют условиям:

а) $S_m = A_m d_m + c_m^2 > 0$, $K_m = A_m b_m - c_m^2 > 0$, или б) $K_m < 0$, $S_m < 0$.

В этом случае один из корней уравнения $r_m(\theta) = 0$ является нулем функции $\lambda_1(\theta)$, а другой корень — нулем функции $\lambda_2(\theta)$: в случае а) — $\theta_{q_1}^{(m)} = 1/\sqrt{a_m}$ — корень функции $\lambda_1(\theta)$, $\theta_{r_1}^{(m)} = 1/\sqrt{e_m}$ — корень $\lambda_2(\theta)$; в случае б) корни меняются местами; $\lambda_1(\theta)$ вещественны в отрезках $[0, \theta_{q_1}^{(m)}]$. В этом случае корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к первому типу [3].

2) Указанные параметры удовлетворяют условиям $K_m < 0$, $S_m > 0$. Обе величины $\theta_{q_1}^{(m)}$ являются нулями $\lambda_1(\theta)$, а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественные значения в двух отрезках:

$$[0; \theta_{q_1}^{(m)}] \text{ и } [\theta_{q_2}^{(m)}; \theta_{q_1}^{(m)}], \text{ при } A_m > 0; [0; \theta_{q_2}^{(m)}] \text{ и } [\theta_{q_1}^{(m)}; \theta_{q_1}^{(m)}], \text{ при } A_m < 0 \quad (3.3)$$

а функция $\lambda_2(\theta)$ в одном интервале $[0, \theta_{q_1}^{(m)}]$, причем $\lambda_1(\theta_{q_1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q_1}^{(m)}) = \lambda^*$, где $\theta_{q_1}^{(m)}$ — корень уравнения $q_m(\theta)$ и определяется следующим образом:

$$\theta_{q_1}^{(m)} = \sqrt{(M_m + (-1)^k \sqrt{\Delta_m}) / D_m}, \quad \Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4b_m d_m c_m^2 N_m \quad (3.4)$$

Такие корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к второму типу.

3) В случае, когда одна из величин K_m или S_m обращается в ноль, то мы имеем дело с переходным случаем между случаями 1) и 2).

4) Случай $A_m = 0$ является особым. Здесь $\lambda_k(\theta)$ вещественны в $[0; \theta_{q_1}^{(m)}]$, причем в двойной точке $\theta_{q_1}^{(1)} = \theta_{q_2}^{(1)}$ этого отрезка $\lambda_1(\theta)$ обращается в ноль; а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. Это случай конической рефракции.

Здесь в направлении магнитного поля $\vec{H}_0$ скорости волн совпадают и имеется одна волна с любыми смещениями вида (2.1) [2].

Далее в силу симметрии рассматриваются случаи $m = 1$ и $m = 3$.

Теперь рассмотрим поведение функций $\alpha_k(\theta)$ и $V_k(\theta)$. Найдем производные этих функций в интервалах вещественности корней $\lambda_k(\theta)$.

Согласно (3.2)₀, (3.2)₁ и (2.3) будем иметь:

$$\begin{aligned} (\lg \alpha_k)' &= \frac{\varphi_k(\theta)}{2b_m d_m \lambda_k^3(\theta)}, \quad V_k' = -\frac{\theta V_k^3(\theta)}{2b_m d_m} \Psi_k(\theta) \\ \varphi_k &= b_m + d_m + (-1)^k \frac{B_m^2 - M_m \theta^2}{\sqrt{q_m(\theta)}} \\ \varphi_k' &= -(-1)^k 8b_m d_m c_m^2 \theta^3 N_m / \sqrt{q_m(\theta)} \\ \Psi_k &= 2b_m d_m - l_m + (-1)^k (D_m \theta^2 - M_m) / \sqrt{q_m(\theta)} \\ \Psi_k' &= (-1)^k 8b_m d_m c_m^2 \theta N_m / \sqrt{q_m^3(\theta)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Пусть $K_m > 0$. Тогда, $A_m > 0, S_m > 0$, а N_m может принимать значение любого знака. Согласно [3, табл.2], функции $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ вещественны соответственно в следующих интервалах и обращаются в нуль на концах этих отрезков:

$$0 \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(m)}, 0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(m)} \quad (\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)}) \quad (3.6)$$

Пусть $N_m > 0$. Из (3.5)₄ следует, что $\varphi_1' > 0$, $\varphi_2' < 0$, т.е. функция φ_1 возрастает, а φ_2 убывает. Далее, согласно (2.8) и (1.2) имеем:

$$B_1 = B_0 + \chi > 0, B_2 = B_0 + \chi > 0 \quad (3.7)$$

Учитывая $A_m > 0, S_m > 0$ и (3.7), из (3.5)₃ получаем:

$$\varphi_1(0) = 2d_m > 0, \varphi_2(\theta_{r2}^{(m)}) = 2b_m d_m A_m K_m^{-1} > 0$$

Отсюда следует, что в (3.6) правые части (3.5) принимают положительные значения и поэтому $\text{tg} \alpha_k(\theta)$ возрастает от нуля до бесконечности. Поэтому углы $\alpha_k(\theta)$ в (3.6) возрастают от 0 до $\pi/2$:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \quad (3.8)$$

Пусть $N_m = 0$. Согласно (3.5)₁, (3.5)₃ и (3.5)₄ имеем $\varphi_1'(\theta) = 0$, $\varphi_k(\theta) = b_m + d_m = \text{const} > 0$, $(\text{tg} \alpha_k)'_0 > 0$. Поэтому в отрезках (3.6) углы $\alpha_k(\theta)$, монотонно возрастая, пробегают отрезки (3.8).

Пусть выполняется условие $N_m < 0$. Согласно (3.5)₃ и (3.5)₄, φ_2 возрастает, а φ_1 убывает. Кроме того, в силу $A_m > 0, S_m > 0$ и (3.6) имеем: $\varphi_1(\theta_{r1}^{(m)}) = 2b_m d_m A_m S_m^{-1} > 0, \varphi_2(0) = 2b_m > 0$. Отсюда и из (3.5)₁ следует, что углы $\alpha_k(\theta)$ в соответствующих отрезках (3.6) возрастают от 0 до $\pi/2$.

Таким образом, при условии $K_m > 0$ значениям θ из промежутков [3.6] соответствуют волны (2.10) с направлениями распространения [3.8].

Из (3.2), (2.3) следует соотношение между фазовыми скоростями

$$V_1(\alpha) > V_2(\alpha), \alpha \in [0; \pi/2] \quad (3.9)$$

Итак, в случае $K_m < 0$ волны (2.10) при $k = 1$ являются быстрыми, а при $k = 2$ — медленными, причем:

$$V_f = V_1(\theta), \theta \in [0; \theta_{r1}^{(m)}]; V_s = V_2(\theta), \theta \in [0; \theta_{r2}^{(m)}] \quad (3.10)$$

Случай 2. Пусть $K_m < 0$. Пусть при этом выполняется также условие $A_m > 0$. Тогда и $S_m > 0$. При этих условиях, т.е. при

$$A_m > 0, S_m > 0, K_m < 0 \quad (3.11)$$

как следует из [3, табл.2], корни $\lambda_k(\theta)$ принадлежат второму типу, причем $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественные значения в двух отрезках:

$$0 \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(m)}, \theta_{r2}^{(m)} \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(m)} \quad (\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)}) \quad (3.12)$$

обращаясь в ноль в конце первого и в начале второго отрезков; функция же $\lambda_2(\theta)$ вещественна только в $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$, где она не равна нулю. Кроме того, т.к. $q_m(\theta_{q1}^{(m)}) = 0$, то верно условие $\lambda_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q1}^{(m)})$. Представляя N_m из (2.8) в виде $N_m = K_m - d_m A_m$, замечаем, что при (3.11) выполняется условие $N_m < 0$. Так как имеют место условия $A_m > 0, S_m > 0, N_m < 0$, то на основании результатов случая 1, заключаем, что когда θ изменяется в первом отрезке (3.12), то угол $\alpha_1(\theta)$ возрастает от 0 до $\pi/2$, а когда θ пробегает интервал $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$, то угол $\alpha_2(\theta)$, возрастая, меняется от 0 до значения $\alpha_2(\theta_{q1}^{(m)}) < \pi/2$. При $N_m < 0$ функция $\varphi_1(\theta)$ убывает, и т.к. при $K_m < 0$ выполняется условие $\varphi_1(\theta_{r2}^{(m)}) = -2b_m d_m |K_m|^{-1} < 0$, то правая часть (3.9) при $k=1$ отрицательна во втором отрезке (3.12) и поэтому угол $\alpha_1(\theta)$ в этом интервале убывает от $\pi/2$ до значения $\alpha_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)})$.

Итак, при $A_m > 0, K_m < 0$, значению θ из промежутка $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $0 \leq \alpha_1(\theta) \leq \pi/2$. Значениям θ из промежутка $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $0 \leq \alpha_2(\theta) \leq \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)}) = \alpha_1(\theta_{q1}^{(m)})$. Наконец, значениям θ из промежутка $\theta_{r2}^{(m)} \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $\pi/2 \geq \alpha_1(\theta) \geq \alpha_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)})$. Теперь можно проверить, что

$$V_f(\alpha) > V_s(\alpha), \alpha \in [0; \pi/2] \quad (3.13)$$

$$V_f(\alpha) = V_1(\alpha_1(\theta)), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}], V_f(\alpha) = \begin{cases} V_2(\alpha_2(\theta)), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}] \\ V_1(\alpha_1(\theta)), \theta \in [\theta_{r2}^{(m)}; \theta_{q1}^{(m)}] \end{cases} \quad (3.14)$$

Следовательно, в случае $A_m > 0, K_m < 0$, волны (2.10) при $k=1$ в $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ являются быстрыми, а при $k=2$ в $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ и при $k=1$ в $\theta_{r2}^{(m)} \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(m)}$ являются медленными. Скорости быстрых и медленных волн определяются по (3.2) и (3.14), а их направления — по (3.2), причем:

$$\alpha = \alpha_1(\theta), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}] \quad \text{[для быстрых волн]}, \quad (3.15)$$

$$\alpha = \alpha_2(\theta), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}]; \alpha = \alpha_1(\theta), \theta \in [\theta_{r2}^{(m)}; \theta_{q1}^{(m)}] \quad \text{[для медленных волн]}. \quad (3.16)$$

Пусть теперь, при $K_m < 0$ выполняется условие $A_m = 0$, что возможно только при $m=1$. Согласно [3, табл.2], функции λ_k в этом случае вещественны в отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(1)}$, причем функция $\lambda_1(\theta)$ обращается в ноль в двойной точке $\theta = \theta_{r2}^{(1)} = \theta_{q1}^{(1)} = 1/\sqrt{a_0}$, а функция $\lambda_2(\theta)$ нигде не

обращается в ноль. Это — случай конической рефракции [3]. Разделение волн на быстрые и медленные осуществляется так, как в случае (3.11). Но, в отличие от указанного случая, здесь $\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}$, вследствие чего по направлению магнитного поля $\vec{H}_0$, магнитоупругие волны распространяются с одной и той же фазовой скоростью:

$$V_f(\pi/2) = V_s(\pi/2) = \sqrt{a_1} = \sqrt{a_0}.$$

Наконец рассмотрим случай $K_1 < 0$, $A_1 < 0$. Предположим сначала, что выполняется также условие $S_1 > 0$. Тогда, согласно [3, табл.2], функция $\lambda_2(\theta)$ вещественна в отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(1)}$, а функция $\lambda_1(\theta)$ — в отрезках $0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(1)}$ и $\theta_{r1}^{(1)} \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(1)}$, где $\lambda_1(\theta_{q1}^{(1)}) = 0$, $\lambda_1(\theta_{q1}^{(1)}) - \lambda_2(\theta_{q1}^{(1)}) > 0$.

Отсюда следует, что этот случай аналогичен случаю $K_1 < 0$, $A_1 < 0$. Аналогия следует понимать в том смысле, что разделение волн на быстрые и медленные происходит одинаковым образом. Соответствующие результаты можно получить из (3.13)–(3.16) при помощи взаимозамены $\theta_{r1}^{(1)}$ и $\theta_{q1}^{(1)}$.

Далее, на основании [3, табл.2] легко заметить, что случай $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 < 0$ аналогичен случаю $K_1 > 0$, $A_1 > 0$, $S_1 > 0$. Только следует в (3.9) и (3.10) произвести вышеуказанную замену.

$K_m = 0$ или $S_m = 0$ являются переходными между вышеприведенными случаями.

Таким образом, разделение магнитоупругих волн (2.10) на быстрые и медленные зависит от типа корней $\lambda_\pm(\theta)$, причем, когда корни $\lambda_\pm(\theta)$ относятся к первому типу, то разделение волн совершается формулами (3.9) и (3.10), если же корни $\lambda_\pm(\theta)$ второго типа, то разделение волн совершается формулами (3.13) и (3.14).

Отметим следствие, связанное с изменением знака величины A_1 в зависимости от величины магнитного поля $\vec{H}_0$. При $0 < \chi < \chi_A^{(1)}$ ($A_1 \geq 0$) в направлении оси Ox (параллельно $\vec{H}_0$) медленные волны распространяются со скоростью $V_s = \sqrt{e_1(\chi)}$. В дальнейшем, с возрастанием напряженности магнитного поля $\chi \geq \chi_A^{(1)}$ ($A_1 \leq 0$) медленные волны распространяются с постоянной скоростью $V_s(\chi) = \sqrt{a_0} = \text{const}$. Для быстрых волн картина их распространения противоположна: при $\chi \leq \chi_A^{(1)}$ быстрые волны распространяются с постоянной скоростью $V_f(\chi) = \sqrt{a_0} = \text{const}$, а при $\chi \geq \chi_A^{(1)}$ — со скоростью $V_f(\chi) = \sqrt{e_1} \geq \sqrt{a_0}$, которая возрастает от значения $\sqrt{a_0}$ до ∞ . Отсюда следует, что быстрые волны при $\chi < \chi_A^{(1)}$ представляют собой продольные волны, а медленные — поперечные. Если

же $\chi > \chi_A^{(1)}$, то имеем обратную картину. Отсюда следует также, что при $\chi < \chi_A^{(1)}$ продольные волны распространяются быстрее, чем поперечные. В случае же $\chi > \chi_A^{(1)}$ поперечные волны распространяются быстрее продольных, что обычно невозможно при распространении чисто упругих волн. В случае $\chi = \chi_A^{(1)}$ продольные и поперечные волны распространяются с одинаковой скоростью, причем это разделение здесь формально — имеется одна волна, в которой вектор перемещения $\vec{y}$ может иметь любое направление относительно $\vec{H}_0$ и любую величину (случай колической рефракции).

Перейдем к исследованию на экстремумы фазовых скоростей внутри отрезков вещественности корней $\lambda_k(\theta)$.

Критические точки по экстремуму скоростей $V_k(\theta)$, согласно (3.10), определяются из уравнения:

$$v_\pi(\theta) \equiv N_z D_\pi \theta^4 - 2N_0 M_\pi \theta^2 + N_0 B_\pi^2 - N_\pi c_\pi^2 = 0 \quad (3.17)$$

Выясним, при каких условиях решения уравнения (3.17) будут экстремальными точками для функций $\lambda_k(\theta)$.

Сначала рассмотрим случай продольного магнитного поля ($m = 1$). Согласно (3.5)₂ и работе [2, (3.9), (3.12), (3.22)] имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= 2d_0 B_1^{-1} (B_0 B_1 - c_1^2), \Psi_2(0) = -2b_1 B_1^{-1} (A_0 B_1 - c_1^2) \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) &= -2b_1 d_1 S_1^{-1} (A_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } A_1 > 0 \\ \Psi_2(\theta_{r2}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 K_1^{-1} (B_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } K_1 > 0 \\ \Psi_1(\theta_{r2}^{(1)}) &= -2b_1 d_1 |K_1|^{-1} (B_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } K_1 < 0, A_1 > 0 \\ \Psi_1(\theta_{q1}^{(1)}) &= +\infty, \Psi_2(\theta_{q1}^{(1)}) = -\infty \text{ при } K_1 < 0 \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 c_1^{-1} > 0 \text{ при } A_1 = 0 (\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}) \\ \Psi_1(\theta_{r2}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 |K_1|^{-1} (B_0 |A_1| + c_1^2) > 0 \text{ при } A_1 < 0 \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) &= 2b_1 d_1 S_1^{-1} (A_0 |A_1| + c_1^2) > 0 \text{ при } A_1 < 0, S_1 > 0 \\ \Psi_2(\theta_{r1}^{(1)}) &= -2b_1 d_1 |S_1|^{-1} (A_0 |A_1| + c_1^2) < 0 \text{ при } S_1 < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Пользуясь обычными методами математического анализа, на основании формул (3.2), (3.5)₁, (3.5)₂ исследуем скорости $V_k(\theta)$ на максимум и минимум. Здесь приведем только окончательные результаты:

1) а) Если $N_1 > 0$, $A_0 A_1 - c_1^2 \leq 0$, или б) $N_1 > 0$, $B_0 B_1 - c_1^2 \leq 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ в случае а) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае б) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$.

2) Если $N_1 > 0$ и $B_0 A_1 - c_1^2 \leq 0$, то в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ скорость $V_2(\theta)$ возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же выполняется

условие $N_1 > 0$, $B_0 A_1 - c_1^2 > 0$, то в указанном интервале $V_2(\theta)$ имеет максимум, причем точка максимума является нулем уравнения (3.17).

3) Если $N_1 = 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ монотонно возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$.

4) Если $N_1 = 0$ и а) $b_1 - a_1 > 0$, или б) $b_1 - a_1 < 0$, то в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ меняется монотонно, причем в случае а) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае б) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$; если же $b_1 - a_1 = 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в рассматриваемом интервале сохраняет постоянное значение, равное $V_1(\theta) = \sqrt{a_0}$.

5) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и а) $A_0 A_1 - c_1^2 \geq 0$, или б) $B_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ в случае б) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае а) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$.

6) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и $A_0 A_1 - c_1^2 < 0$, $B_0 B_1 - c_1^2 < 0$ то в $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ имеет точку максимума, в которой $v_1(\theta) = 0$.

7) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и а) $A_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(1)}$ монотонно возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же б) $A_0 B_1 - c_1^2 < 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в указанном интервале имеет точку минимума, в которой $v_1(\theta) = 0$.

8) Если $K_1 < 0$, $A_1 \geq 0$ (тогда и $N_1 < 0$), то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ ведет себя как в случае $N_1 < 0$, $K_1 > 0$, а в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ убывает, причем $V_1(0_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$.

$$V_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \sqrt{(2b_1 d_1)^{-1} [b_1 + d_1 + \theta_{q1}^{(1)2} (2b_1 d_1 - l_1)]}.$$

9) Если $K_1 < 0$, $A_1 \geq 0$ и а) $A_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{q1}^{(1)})$ возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{q1}^{(1)}) = V_1(\theta_{q1}^{(1)})$; если же б) $A_0 B_1 - c_1^2 < 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в этом интервале имеет точку минимума, которая является решением уравнения (3.17).

10) Если $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 > 0$ а) $B_0 B_1 - c_1^2 \geq 0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же б) $B_0 B_1 - c_1^2 < 0$, то она в этом интервале имеет максимум, причем точка максимума определяется из уравнения (3.29).

11) Если $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 > 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в $(\theta_{r1}^{(1)}, \theta_{q1}^{(1)})$ убывает, причем $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, $V_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \sqrt{(2b_1d_1)^{-1}[b_1 + d_1 + \theta_{q1}^{(1)2}(2b_1d_1 - l_1)]}$; а скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ меняется, как в случае $K_1 < 0$, $A_1 > 0$.

12) Если $S_1 < 0$ (тогда и $N_1 < 0$, $A_1 < 0$, $K_1 < 0$), то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ меняется, как в случае 10), а скорость $V_2(\theta)$ меняется в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ так же, как в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ случая $K_1 > 0$, $N_1 < 0$.

Перейдем к рассмотрению случая поперечного магнитного поля ($m = 3$). В этом случае критические точки определяются выражениями

$\theta_1^{(3)} = \sqrt{(B_3 - c_3)/[a_3b_3 - (c_3 + d_3)^2]}$, $\theta_2^{(3)} = \sqrt{(B_3 + c_3)/[a_3b_3 - (c_3 - d_3)^2]}$ причем точка $\theta_1^{(3)}$ является критической для функции $V_1(\theta)$, а точка $\theta_2^{(3)}$ — для функции $V_2(\theta)$, а вместо формулы (3.30) имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= 2d_3B_3^{-1}(B_3 + c_3)(B_0 - c_0), \Psi_2(0) = -2b_3B_3^{-1}N_3 \\ \Psi_1(\theta_{r2}^{(3)}) &= -2b_3d_3|K_3|^{-1}N_3 \text{ при } K_3 < 0, \Psi_1(\theta_{q1}^{(3)}) = +\infty, \Psi_2(\theta_{q1}^{(3)}) = -\infty \\ \Psi_1(\theta_{r1}^{(3)}) &= -2b_3d_3S_3^{-1}(A_3 + c_3)(A_0 - c_0), \Psi_2(\theta_{r2}^{(3)}) = 2b_3d_3K_3^{-1}N_3 \text{ при } K_3 > 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Согласно (3.20), (3.5) и (3.19) приходим к заключению:

1) Если $N_3 > 0$ и а) $A_0 - c_0 \leq 0$ или б) $B_0 - c_0 \leq 0$, то $V_1(\theta)$ в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$ при а) убывает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$, а при б) возрастает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$; а если $A_0 - c_0 > 0$, $B_0 - c_0 > 0$, то $V_1(\theta)$ в точке $\theta_1^{(3)} \in (0, \theta_{r1}^{(3)})$ имеет минимум:

$$V_1(\theta_1^{(3)}) = \sqrt{\frac{a_3b_3 - (c_3 + d_3)^2}{A_3 + B_0 - 2c_0}}, \alpha_1(\theta_1^{(3)}) = \arctg \left(\frac{B_0 - c_0}{A_0 - c_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

2) Если $N_3 > 0$, то в точке $\theta_2^{(3)} \in (0, \theta_{r2}^{(3)})$ $V_2(\theta)$ имеет максимум:

$$V_2(\theta_2^{(3)}) = \sqrt{\frac{a_3b_3 - (c_3 - d_3)^2}{A_0 + B_0 - 2c_0}}, \alpha_2(\theta_2^{(3)}) = \arctg \left(\frac{B_3 + c_3}{A_3 + c_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

3) Если $N_3 = 0$ и а) $b_0 < a_0$ или б) $b_0 > a_0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$, $V_1(\theta)$ в случае а) убывает, а в случае б) возрастает, причем $V_1(0) = \sqrt{b_3}$, $V_1(\theta_{r1}^{(3)}) = \sqrt{a_3}$; если же $b_0 = a_0$, то $V_1(\theta)$ не меняется и равна $V_1(\theta) = \sqrt{a_3}$.

4) Если $N_3 = 0$, то $V_2(\theta)$ в $(0, \theta_{r2}^{(3)})$ постоянна и равна $\sqrt{d_0}$.

5) Если $N_3 < 0$, $K_3 \geq 0$ и а) $B_0 - c_0 \geq 0$ или б) $A_0 - c_0 \geq 0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$, $V_1(\theta)$ при а) убывает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$, а при б) возрастает от $\sqrt{b_3}$ до

$\sqrt{a_3}$; а если $A_0 - c_0 < 0$, $B_{11} - c_0 < 0$, то в точке $\theta_1^{(3)} \in 0 \leq \theta \leq \theta_{r1}^{(3)}$, $V_1(0)$ имеет максимум, причем $V_1(\theta_1^{(3)})$, $\alpha_1(\theta_1^{(3)})$ определяются формулами (3.20).

6) Если $N_3 < 0$, $K_3 \geq 0$, то $V_2(\theta)$ в точке $\theta_2^{(3)} \in 0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(3)}$ всегда имеет минимум, причем имеют место формулы (3.21).

7) Если $K_3 < 0$, (тогда и $N_3 < 0$), то функции $V_i(\theta)$ в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$ описывается как при $N_3 < 0$, $K_3 > 0$, а в $(\theta_{r2}^{(3)}, \theta_{q1}^{(3)})$ она убывает от $\sqrt{d_0}$ до $V_1(\theta_1^{(3)})$, а $V_2(\theta)$ в точке $\theta_2^{(3)} \in 0 \leq \theta \leq \theta_{q1}^{(3)}$ имеем минимум, причем $V_2(0) = \sqrt{d_0}$, $V_2(\theta_{q1}^{(3)}) = V_1(\theta_{q1}^{(3)})$.

Отсюда можно получить результаты для изотропной среды [2].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля. // Механика, междуз. сб. науч. трудов, вып.3, Ереван, 1984, С. 32-42.
2. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах. // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1974, Т. 27, №5, С. 37-46.
3. Даноян З.Н. К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред. // Механика, уч. записки ЕГУ, 1984, №1, С. 52-61.
4. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963, №3, С. 391-396.
5. Осипов И.О. К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред. // Изв. РАН. МТТ, 1999, №4, С.102-112.
6. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. // ПММ, 1961, Т.25, Вып. 5, С.885-896.
7. Соболев С.А. Некоторые вопросы распространения колебаний. — В кн. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.-Л.: ОНТИ, 1937, С. 468-617.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.06.2003