ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 539. 3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В ЗАДАЧЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩЕЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Элоян А. В.

Ա.Վ. Էլոյան

Սեղմված ձողի սեփական տատանումների խնդրում հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրությունը

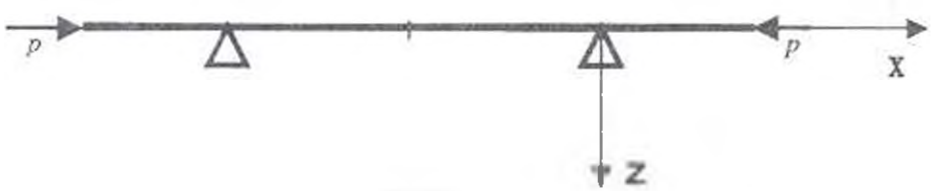
Դիտարկվում է առաձգական ձողի հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որը ապահովում է երկու ծայրերում հոդակապորեն ամրացված և մեկ ծայրում կոշտ ամրացված սեղմված ձողի սեփական տատանումների առաջին անչափ (բերված) հաճախականության ամենամեծ արժեքը տարբեր k -երի համար:

A.V. Eloyan

The optimal choice of bearing disposition on solving natural oscillations of spring beams

Рассматривается вопрос оптимального выбора расположения опор в задаче колебаний упругой балки, загруженной сжимающей продольной силой.

Пусть упругая балка длиной l в центре постоянного поперечного сечения загружена сжимающей поперечной силой P. Балка опирается на две опоры, расположенные симметрично на расстоянии c от середины.



Фиг.1

Уравнение колебаний балки при действии сжимающей продольной силы P имеет вид [1]:

$$\frac{\partial w^4}{\partial x^4}+\frac{P}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\rho S}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

где E – модуль упругости, ρ – плотность материала, I – жесткость на изгиб, S – площадь поперечного сечения балки.

Представим прогиб балки $w(x,t)$ в виде:

$$w(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \qquad (2)$$

где ω – искомая частота сжатой балки.

Подставляя уравнение (2) в уравнение (1), получим:

$$f^{IV} + k^2 f^{II} - \lambda^4 f = 0 \qquad (3)$$

где введены обозначеня $k = \sqrt{\dfrac{Pl^2}{EI}}$, $\lambda = \sqrt[4]{\dfrac{\rho S\omega^2 l^4}{EI}}$.

При симметиричных колебаниях балки ищем $f(x)$ в виде:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при} \quad -c \le x \le 0 \\ f_2(x) & \text{при} \quad 0 \le x \le 0.5l - c \end{cases} \qquad (4)$$

тогда решение уравнения (3) представится в виде:

$$f_i(\bar{x}) = a_i \operatorname{ch}\gamma_1 \bar{x} + b_i \operatorname{sh}\gamma_1 \bar{x} + c_i \cos\gamma_2 \bar{x} + d_i \sin\gamma_2 \bar{x} \quad (i = 1,2) \qquad (5)$$

где $\bar{x} = x/l$, $i = 1$ при $\bar{x} \in [-\alpha;0]$; $i = 2$ при $\bar{x} \in [0;0.5(1-\alpha)]$, $\alpha = c/l$

$$\gamma_1 = \sqrt{-\frac{\kappa^2}{2} + \sqrt{\lambda^4 + \frac{\kappa^4}{4}}}, \ \gamma_2 = \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} + \sqrt{\lambda^4 + \frac{\kappa^4}{4}}} \qquad (6)$$

Решение (5) должно удовлетворять условиям симметрии в точке $\bar{x} = -\alpha$, условиям сопряжения в точке $\bar{x} = 0$ и условиям свободного края в точке $x = 0.5(1-\alpha)$

$$f_1^{I} = 0, \ f_1^{III} = 0 \quad (\bar{x} = -\alpha) \qquad (7)$$

$$f_1 = f_2 = 0, \ f_1^{I} = f_2^{I}, \ f_1^{II} = f_2^{II} \quad (\bar{x} = 0) \qquad (8)$$

$$f_2^{II} = 0, \quad f_2^{III} + k^2 f^{I} = 0 \qquad \bar{x} = 0.5(1-\alpha) \qquad (9)$$

В случае антисимметричных колебаний балки взамен условий (7) имеются условия $f_1 = 0$, $f_1^{II} = 0$ $(\bar{x} = -\alpha)$.

Для определения восьми постоянных a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1,2)$ получается система восьми однородных алгебраических уравнений.

$$\begin{gathered}
c_1 = -a_1, \ c_2 = -a_1, \ a_2 = a_1, \ b_1 = \operatorname{th}\gamma_1\alpha, \ d_1 = \operatorname{tg}\gamma_2\alpha \\
b_2 = a_1\left[1 + (\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1 \cos\gamma_2\alpha_1)/\gamma - \gamma^2(\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1 \sin\gamma_2\alpha_1)\right]/ \\
/\left[\gamma^2 \operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1 \sin\gamma_2\alpha_1 - \gamma \operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1 \cos\gamma_2\alpha_1)\right] \\
d_2 = a_1\left[1 + (\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1 \sin\gamma_2\alpha_1)/\gamma + \gamma^2(\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1 \cos\gamma_2\alpha_1)\right]/ \\
/\left[\gamma^2 \operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1 \sin\gamma_2\alpha_1 - \gamma \operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1 \cos\gamma_2\alpha_1)\right] \\
a_1\left[\operatorname{th}\gamma_1\alpha_1 + \gamma \operatorname{tg}\gamma_2\alpha_1 - (1 + \gamma + (\gamma^{-1} + \gamma^3)\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1 \cos\gamma_2\alpha_1) + (1-\gamma^2)\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1 \sin\gamma_2\alpha_1\right]/ \\
/\left[\gamma^2 \operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1 \sin\gamma_2\alpha_1 - \gamma \operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1 \cos\gamma_2\alpha_1)\right] = 0 \\
\alpha_1 = (0.5 - \alpha), \ \gamma = \gamma_2/\gamma_1
\end{gathered} \qquad (10)$$

откуда из условия $a_1 \neq 0$ получается следующее характеристическое уравнение для определения частот собственных симметричных колебаний балки при действии сжимающей продольной силы.

$$[\operatorname{th}\gamma_1\alpha+\gamma\operatorname{tg}\gamma_2\alpha] - [(1+\gamma)\gamma + (1+\gamma^4)\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1\cos\gamma_2\alpha_1+(1-\gamma^2)\gamma\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1\sin\gamma_2\alpha_1]/$$
$$/[\gamma^3\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1\sin\gamma_2\alpha_1 - \gamma\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1\cos\gamma_2\alpha_1)] = 0 \qquad (11)$$

Аналогично из условия (7)—(10) получаем следующее характеристическое уравнение для определения собственных симметричных колебаний при действии сжимающей продольной силы.

$$[\operatorname{cth}\gamma_1\alpha-\gamma\operatorname{ctg}\gamma_2\alpha] - [(1+\gamma)\gamma + (1+\gamma^4)\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1\cos\gamma_2\alpha_1+(1-\gamma^2)\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1\sin\gamma_2\alpha_1]/$$
$$/[\gamma^3\operatorname{ch}\gamma_1\alpha_1\sin\gamma_2\alpha_1 - \gamma\operatorname{sh}\gamma_1\alpha_1\cos\gamma_2\alpha_1)] = 0 \qquad (12)$$

здесь $$\alpha_1 = 0.5 - \alpha, \quad \gamma = \gamma_2 / \gamma_1 \qquad (13)$$

Имея решение характеристического уравнения, для каждого $k = \sqrt{\dfrac{Pl^2}{EI}}$ можно определить $\lambda_i = \sqrt[4]{\dfrac{\rho S\omega_i^{\,2}l^4}{EI}}$ $(i = 1,3,5....)$

Для практических целей представляет интерес нахождение первой (наименьшей) частоты собственных колебаний для различных значений сжимающей силы.

$$\omega_1(\alpha,k) = \min_i \omega_i(\alpha,k)$$

Имея значения $\omega_1(\alpha,k)$, можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: найти

$\alpha = c/l$ так, чтобы $\omega_1(\alpha,k) \to \max$ при заданном k.

В табл. 1 для различных k и α приведены безразмерные значения

$$\bar{\omega}(\alpha,k) = \omega_1(\alpha,k)\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}l^2$$

Таблица 1

α	$k=0$	$k=0.2\pi$	$k=0.4\pi$	$k=0.6\pi$	$k=0.8\pi$	$k=0.9\pi$	$k=\pi$
0	14.063	13.506	12.781	10.726	8.964	8.369	0
0.1	15.461	14.846	14.078	12.902	9.986	9.358	0
0.2	19.589	19.255	18.378	15.928	13.097	12.376	0
0.259	22.887	22.137	19.510	19.018	15.904	14.992	0
0.3	21.930	21.576	18.496	18.079	14.831	13.875	0
0.4	15.226	15.031	13.966	12.334	11.391	7.818	0
0.5	9.869	9.666	9.048	7.896	5.919	4.301	0

Расчеты безразмерного значения первой частоты собственных колебаний показывают, что для всех $k \in [0,\pi]$ наибольшее значение первой частоты получается при $\alpha = 0.259$ ($(c = 0.259l)$, причем для всех k значение первой частоты существенно увеличивается оптимальным выбором α по сравнению с шарнирно-опертой по концам балки (последняя строка табл. 1, $\alpha = 0.5$) и консольной балки длиной $0.5l$ (первая строка таблицы 1, $\alpha = 0$):

При $k = \pi$ частоты колебаний для всех α принимают нулевое значение, т.к. при $k = \pi$, $P = P_{\text{кр}} = \pi^2 EI / l^2$, как показно в [2], не зависит от α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский–Крегер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
2. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки./В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ер. Изд. ЕГУ. 1997. С. 114-117.

Гюмрийский образовательный комплекс Государственного инженерного университета Армении

Поступила в редакцию 13.05.2003