ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 62-501.7

О ПОСТРОЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ С ЖЕЛАЕМЫМ СПЕКТРОМ В САР

Григорян Ф. П.

Ֆ. Պ. Գրիգորյան
Ցանկալի սպեկտրով կառավարման կառուցման մասին ավտոմատ կառավարման համակարգերում

Ավտոմատ կարգավորման համակարգերում դիտարկված է խնդիր ցանկալի սպեկտրով կարգավորիչի մուտքի ազդակի գործակիցների ընտրության մասին ընդհանուր դեպքում, երբ որ կարգավորիչի մուտքային և ելքային ազդակները հանդիսանում են սկալյարներ:

Ստացված է բանաձև, որը կապ է հաստատում կարգավորիչի մուտքային ազդակի գործակիցների (տեքստում $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ տողը) և նախապես տրված ցանկալի թվերի միջև:

F. P. Grigoryan
On the Management in the System of Automatic Regulation with Desired Spectrum

В системе автоматического регулирования рассмотрена задача о выборе коэффициентов входного сигнала регулятора с желаемым спектром в общем случае, когда входные и выходные сигналы регулятора являются скалярами. Получена формула, выражающая зависимость между коэффициентами входного сигнала регулятора (в тексте строка $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ и между наперед заданными желаемыми числами).

Постановка задачи. Пусть задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + hu$$

$$u = \int_{-\infty}^{t} g(t-t')\nu(t')dt'$$

$$\nu = b\cdot x$$

или

$$\frac{dx}{dt} = Ax + h\int_{-\infty}^{t} g(t-t')bx(t')dt' \qquad (1)$$

где $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ — столбцовая матрица размером $n\times 1$ — вектор состояния процесса (штрих на матрице означает транспонирование), ν-скаляр, входной сигнал регулятора, g-скаляр, импульсная переходная функция регулятора, u — скалярное управляющее воздействие рассматривается как выходной сигнал регулятора, $A=(a_{ij})$, $i, j = 1,2,\dots,n$,

$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)'$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Предполагается, что система (1) обладает свойством управляемости. Желательные числа являются

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1};\ \underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{n_2};\ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_3};\ n_1 + n_2 + n_3 = n \tag{2}$$

при $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n_1$; $\mu \neq \lambda_i$, $\mu \neq 0$ (3)

Требуется построить $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, так чтобы система (1) при новых неизвестных $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ приводилась к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_1) \\ \dfrac{dy_j}{dt} = \mu y_j \quad (j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \\ \dfrac{dy_k}{dt} = 0 y_k \quad (k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = e^{\lambda_i t} c_i \\ y_j = e^{\mu t} c_j \\ y_k = c_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{(1)} = e^{J_1 t} c^{(n_1)} \\ J_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}) \\ y^{(2)} = e^{\mu t} c^{(n_2)} \\ y^{(3)} = c^{(n_3)} \end{cases} \tag{4}$$

где $C^{(n_1)} = (C_1, \dots, C_{n_1})'$, $C^{(n_2)} = (C_{n_1+1}, \dots, C_{n_1+n_2})'$, $C^{(n_3)} = (C_{n_1+n_2+1}, \dots, C_n)'$ — столбцы из произвольных постоянных:

$$y^{(1)} = (y_1, \dots, y_{n_1})',\ y^{(2)} = (y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2})',\ y^{(3)} = (y_{n_1+n_2+1}, \dots, y_n)'$$

$$y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})' \tag{5}$$

Предполагаются также следующие условия, при которых для передаточной функции регулятора $R(\lambda)$ удовлетворяются

$$R_i(\mu) = \frac{d^i R(p)}{dp^i}\Big|_{p=\mu} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n_2 - 1)$$

$$R_i(0) = \frac{d^i R(p)}{dp^i}\Big|_{p=0} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n_3 - 1) \tag{6}$$

Решение. Выполнив в системе (1) преобразование

$$x = Sz \quad S = (h, Ah, \dots, A^{n-1}h) \tag{7}$$

получим

$$\frac{dz}{dt} = A_0 z + h_0 \int_{-\infty}^{t} g(t - t') q z(t') dt' \tag{8}$$

где [2]

$$
A_0 = S^{-1}AS = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -\rho_n \\ 1 & 0 & \dots & -\rho_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & -\rho_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} h_c &= S^{-1}h = (1,0,\dots 0)' \\ q &= bS = (q_1, q_2, \dots, q_n) \\ A^n h &= -\rho_n h - \rho_{n-1} Ah - \dots - \rho_1 A^{n-1} h \end{aligned} \tag{9}
$$

Теперь сделаем в системе (8) замену переменных по формуле

$$
z = \bar{K} y \tag{10}
$$

где

$$
\bar{K} = K\chi(t) \tag{11}
$$

y_i $(i = 1,2,\dots,n)$ решение системы (4). $\chi(t)$ приводит матрицу J системы [1]

$$
d\eta / dt = J\eta
$$

к квазидиагональному виду:

$$
J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3) \tag{12}
$$

$$
J_1 = \underset{n_1 \times n_1}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n_1} \end{vmatrix}} \quad J_2 = \underset{n_2 \times n_2}{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{vmatrix}} \quad J_3 = \underset{n_3 \times n_3}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}
$$

и

$$
\chi(t) = \mathrm{diag}(E_1, \chi_2(t), \chi_3(t)) \tag{13}
$$

$$
E_1 = \underset{n_1 \times n_1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}, \quad \chi_2(t) = \underset{n_2 \times n_2}{\begin{vmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_2-2}}{(n_2-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}, \quad \chi_3(t) = \underset{n_3 \times n_3}{\begin{vmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_3-1}}{(n_3-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_3-2}}{(n_3-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}
$$

к диагональному виду [1]

$$
\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}, \underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{n_2}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_3}) \tag{14}
$$

Матрицы $\bar{K}$ и K представим в блочном виде

$$\tilde{K} = \left(\tilde{K}_{(n_1)}, \tilde{K}_{(n_1+n_2)}, \tilde{K}_{(n)}\right), \quad K = \left(K_{(n_1)}, K_{(n_1+n_2)}, K_{(n)}\right)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{(n_1)} &= \left(\tilde{K}_1, ..., \tilde{K}_{n_1}\right), \quad \tilde{K}_{(n_1+n_2)} = \left(\tilde{K}_{n_1+1}, ..., \tilde{K}_{n_1+n_2}\right), \quad \tilde{K}_{(n)} = \left(\tilde{K}_{n_1+n_2+1}, ..., \tilde{K}_n\right) \\ K_{(n_1)} &= \left(K_1, ..., K_{n_1}\right), \quad K_{(n_1+n_2)} = \left(K_{n_1+1}, ..., K_{n_1+n_2}\right), \quad K_{(n)} = \left(K_{n_1+n_2+1}, ..., K_n\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Из (5), (10), (13) и (15) следует

$$z = \tilde{K}y = \left(\tilde{K}_{(n_1)}, \tilde{K}_{(n_1+n_2)}, \tilde{K}_{(n)}\right)\begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \left(K_{(n_1)}, K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t), \tilde{K}_{(n)}\chi_3(t)\right)\begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

или

$$z = K_{(n_1)}y^{(1)} + K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t)y^{(2)} + K_{(n)}\chi_3(t)y^{(3)} \quad (17)$$

Из (16) можно заметить

$$\tilde{K}_{(n_1)} = \tilde{K}_{(n_1)}, \quad \tilde{K}_{(n_1+n_2)} = K_{(n_1+n_2)}\chi_2(t), \quad \tilde{K}_{(n)} = K_{(n)}\chi_3(t) \quad (18)$$

Из (17) следует

$$\frac{dz}{dt} = K_{(n_1)}\frac{dy^{(1)}}{dt} + K_{(n_1+n_2)}\left[\chi_{(2)}(t)\frac{dy^{(2)}}{dt} + \frac{d\chi_2(t)}{dt}y^{(2)}\right] + K_{(n)}\left[\chi_3(t)\frac{dy^{(3)}}{dt} + \frac{d\chi_3(t)}{dt}y^{(3)}\right] \quad (19)$$

Подставляя (17) и (19) в систему (8), получим

$$\begin{aligned} &K_{(n_1)}\frac{dy^{(1)}}{dt} + K_{(\alpha)}[\chi_2(t)\frac{dy^{(2)}}{dt} + \frac{d\chi_2(t)}{dt}y^{(2)}] + K_{(n)}[\chi_3(t)\frac{dy^{(3)}}{dt} + \frac{d\chi_3(t)}{dt}y^{(3)}] = \\ &= A_o[K_{(n_1)}y^{(1)} + K_{(\alpha)}\chi_2(t)y^{(2)} + K_{(n)}\chi_3(t)y^{(3)}] + \\ &+ h_o\int_{-\infty}^{t} g(t-t')q[K_{(n_1)}y^{(1)}(t') + K_{(\alpha)}\chi_2(t')y^{(2)}(t') + K_{(n)}\chi_3(t')y^{(3)}(t')]dt' \end{aligned} \quad (20)$$

$\alpha = n_1 + n_2$

Выбор матрицы q и K ограничим требованием

$$\begin{aligned} &K_{(n_1)}\frac{dy^{(1)}}{dt} = A_o K_{(n_1)}y^{(1)} + h_o\int_{-\infty}^{t} g(t-t')qK_{(n_1)}y^{(1)}(t')dt' \\ &K_{(\alpha)}\left[\chi_2(t)\frac{dy^{(2)}}{dt} + \frac{d\chi_2(t)}{dt}y^{(2)}\right] = A_o K_{(\alpha)}\chi_2(t)y^{(2)} + h_o\int_{-\infty}^{t} g(t-t')qK_{(\alpha)}\chi_2(t')y^{(2)}(t')dt' \\ &K_{(n)}\left[\chi_3(t)\frac{dy^{(3)}}{dt} + \frac{d\chi_3(t)}{dt}y^{(3)}\right] = A_o K_{(n)}\chi_3(t)y^{(3)} + h_o\int_{-\infty}^{t} g(t-t')qK_{(n)}\chi_3(t')y^{(3)}(t')dt' \end{aligned} \quad (21)$$

После некоторых преобразований подсистемы (21) приводятся соответственно к виду:

$$K_{(n_1)}J_1 = A_0 K_{(n_1)} + h_0 \int_0^\infty g(s) q K_{(n_1)} e^{-J_1 s} ds \tag{22}$$

$$K_{(\alpha)}(\Gamma_2 + \mu E_{n_2}) = A_0 K_{(\alpha)} + h_0 \int_0^\infty g(s) q K_{(\alpha)} \chi_2(-s) e^{-\mu s} ds \tag{23}$$

$$K_{(n)}\Gamma_3 = A_0 K_{(n)} + h_0 \int_0^\infty g(s) q K_{(n)} \chi_3(-s) ds \tag{24}$$

где Γ_2, Γ_3—матрицы сдвига соответственно порядка $n_2 \times n_2$, $n_3 \times n_3$.

Отдельно рассмотрим выражения (22) — (24).

Обозначим

$$R(p) = \int_0^\infty g(s) e^{-ps} ds, \qquad R_i(p) = \frac{1}{i!}\frac{d^i R(p)}{dp^i} = \frac{(-1)^i}{i!}\int_0^\infty g(s) s^i e^{-ps} ds \tag{25}$$

$$i = (1, 2, \ldots, n)$$

$$U(\lambda) = A_0 + h_0 \int_0^\infty g(s) e^{-\lambda s} ds q = A_0 + h_0 R(\lambda) q$$

Имея в виду (6) и (25), подсистемы (22) — (24) распадаются соответственно на следующие:

$$\begin{cases} U(\lambda_1)K_1 = \lambda_1 K_1 \\ U(\lambda_2)K_2 = \lambda_2 K_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ U(\lambda_{n_1})K_{n_1} = \lambda_{n_1} K_{n_1} \end{cases} \quad \begin{cases} (U(\mu) - \mu E)K_{n_1+1} = 0 \\ (U(\mu) - \mu E)K_{n_1+2} = K_{n_1+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ (U(\mu) - \mu E)K_\alpha = K_{\alpha-1} \end{cases} \quad \begin{cases} U(0)K_{\alpha+1} = 0 \\ U(0)K_{\alpha+2} = K_{\alpha+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ U(0)K_n = K_{n-1} \end{cases} \tag{26}$$

$$\alpha = n_1 + n_2$$

После определения строки $q = bS$ из подсистем (26) определяются столбцы $K_1, K_2, \ldots, K_n$.

Теперь переходим к определению $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Характеристический многочлен матрицы $U(\lambda_i) = A_0 + h_0 R(\lambda_i)$ из (25) имеет вид [3]

$$|U(\lambda_i) - \lambda E| = -R(\lambda_i)[q_1(\lambda^{n-1} + \rho_1\lambda^{n-2} + \ldots + \rho_{n-1}) + q_2(\lambda^{n-2} + \rho_1\lambda^{n-2} + \ldots + \rho_{n-2}) + \ldots + q_n] +$$
$$+ \lambda^n + \rho_1\lambda^{n-1} + \ldots + \rho_{n-1}\lambda + \rho_n = -R(\lambda_i)[\Delta_1(\lambda)q_1 + \Delta_2(\lambda)q_2 + \ldots + q_n] + \Delta(\lambda) \tag{27}$$

где

$\Delta_k(\lambda) = \lambda^{n-k} + \rho_1\lambda^{n-k-1} + \rho_2\lambda^{n-k-2} + \ldots + \rho_{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\Delta_0(\lambda) = \Delta(\lambda)$, $\Delta_n(\lambda) = 1$

При $\lambda_i \neq æ_j$, $æ_i \neq \mu$, $æ_j \neq 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ ($æ_j$ — собственные числа матрицы A), из (25) следуют

$$R(\lambda_i) \neq 0 \ \ (\overline{i = 1, n_1}), \ \ R(\mu) \neq 0, \ \ R(0) \neq 0 \tag{28}$$

Подставляя в (27) $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1,2,\dots,n_1)$ и имея в виду (28), получим относительно $q_1, q_2, \dots, q_n$ следующую систему из n_1 уравнений:

$$\begin{array}{l} \Delta_1(\lambda_1)q_1 + \Delta_2(\lambda_1)q_2 + \dots + q_n = \Delta(\lambda_1) / R(\lambda_1) \\ \Delta_1(\lambda_2)q_1 + \Delta_2(\lambda_2)q_2 + \dots + q_n = \Delta(\lambda_2) / R(\lambda_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_1(\lambda_{n_1})q_1 + \Delta_2(\lambda_{n_1})q_2 + \dots + q_n = \Delta(\lambda_{n_1}) / R(\lambda_{n_1}) \end{array} \tag{29}$$

Аналогично (27) характеристический многочлен для матрицы $U(\mu) = A_0 + h_0 R(\mu) q$ будет

$$|U(\mu) - \lambda E| = -R(\mu)[\Delta_1(\lambda)q_1 + \Delta_2(\lambda)q_2 + \dots + q_n] + \Delta(\lambda) \tag{30}$$

Наложим на $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ условия, при которых $\lambda = \mu$ являлись корнем кратности n_2 для многочлена (30). Дифференцируя (30) $n_2 - 1$ раз и подставляя $\lambda = \mu$ с учетом (28), получим следующую систему из n_2 уравнений относительно $q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$\begin{cases} \Delta_1(\mu)q_1 + \Delta_2(\mu)q_2 + \dots + q_n = \Delta(\mu) / R(\mu) \\ \Delta_1'(\mu)q_1 + \Delta_2'(\mu)q_2 + \dots + \Delta_{n-1}'(\mu)q_{n-1} = \Delta'(\mu) / R(\mu) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_1^{n_2-1}(\mu)q_1 + \Delta_2^{n_2-1}(\mu)q_2 + \dots + \Delta_{n-(n_2-1)}^{n_2-1}(\mu)q_{n-(n_2-1)} = \Delta^{(n_2-1)}(\mu) / R(\mu) \end{cases} \tag{31}$$

Теперь перейдем к случаю, когда $\lambda = 0$ является корнем кратности n_3 для характеристического многочлена $|U(0) - \lambda E|$. Нетрудно увидеть, что многочлен получим в таком виде, если в (30) положить $\mu = 0$.

$$|U(0) - \lambda E| = -R(0)[\Delta_1(\lambda)q_1 + \Delta_2(\lambda)q_2 + \dots + q_n] + \Delta(\lambda) \tag{32}$$

Дифференцируя многочлен (32) $n_3 - 1$ раз по λ и подставляя $\lambda = 0$ с учетом (28), получим систему из n_3 уравнений относительно $q_1, q_2, \dots, q_n$.

$$
\begin{cases}
\Delta_1(0)q_1 + \Delta_2(0)q_2 + \ldots + q_n = \Delta(0)/R(0) \\
\Delta'_1(0)q_1 + \Delta'_2(0)q_2 + \ldots + \Delta'_{n-1}(0)q_{n-1} = \Delta'(0)/R(0) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_1^{(n_1-1)}(0)q_1 + \Delta_2^{(n_1-1)}(0)q_2 + \ldots + \Delta^{(n_1-1)}_{n-(n_1-1)}(0)q_{n-(n_1-1)} = \Delta^{(n_1-1)}(0)/R(0)
\end{cases}
\tag{32'}
$$

$$(n_1 > n_2)$$

Объединяя системы (29), (31) и (32') в одно матричное выражение, окончательно получаем систему уравнений относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$Lq' = \Delta_0 \tag{33}$$

где для простоты обозначены

$$
L = \begin{vmatrix}
\Delta_1(\lambda_1) & \Delta_2(\lambda_1) & \ldots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\lambda_1) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\lambda_1) & \ldots & \Delta_{n-1}(\lambda_1) & 1 \\
\Delta_1(\lambda_2) & \Delta_2(\lambda_2) & \ldots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\lambda_2) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\lambda_2) & \ldots & \Delta_{n-1}(\lambda_2) & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Delta_1(\lambda_{n_1}) & \Delta_2(\lambda_{n_1}) & \ldots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\lambda_{n_1}) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\lambda_{n_1}) & \ldots & \Delta_{n-1}(\lambda_{n_1}) & 1 \\
\Delta_1(\mu) & \Delta_2(\mu) & \ldots & \Delta_{n-(n_2-1)}(\mu) & \Delta_{n-(n_2-2)}(\mu) & \ldots & \Delta_{n-1}(\mu) & 1 \\
\Delta'_1(\mu) & \Delta'_2(\mu) & \ldots & \Delta'_{n-(n_2-1)}(\mu) & \Delta'_{n-(n_2-2)}(\mu) & \ldots & \Delta'_{n-1}(\mu) & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Delta_1^{(n_2-1)}(\mu) & \Delta_2^{(n_2-1)}(\mu) & \ldots & \Delta^{(n_2-1)}_{n-(n_2-1)}(\mu) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\Delta_1(0) & \Delta_2(0) & \ldots & \Delta_{n-(n_2-1)}(0) & \Delta_{n-(n_2-2)}(0) & \ldots & \Delta_{n-1}(0) & 1 \\
\Delta'_1(0) & \Delta'_2(0) & \ldots & \Delta'_{n-(n_2-1)}(0) & \Delta'_{n-(n_2-2)}(0) & \ldots & \Delta'_{n-1}(0) & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Delta_1^{(n_1-1)}(0) & \Delta_2^{(n_1-1)}(0) & \ldots & \Delta^{(n_2-1)}_{n-(n_2-1)}(0) & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
\Delta_0 = \begin{vmatrix} \Delta(\lambda_1)/R(\lambda_1) \\ \Delta(\lambda_2)/R(\lambda_2) \\ \dots \\ \Delta(\lambda_{n_1})/R(\lambda_{n_1}) \\ \Delta(\mu)/R(\mu) \\ \Delta'(\mu)/R(\mu) \\ \dots \\ \Delta^{(n_2-1)}(\mu)/R(\mu) \\ \Delta(0)/R(0) \\ \Delta'(0)/R(0) \\ \dots \\ \Delta^{(n_3-1)}(0)/R(0) \end{vmatrix} \tag{34}
$$

Используя условия (3) и (28), нетрудно увидеть, что матрица L невырожденная. Поэтому из (33) находим

$$
q' = L^{-1}\Delta_0 \Rightarrow q = \Delta_0'\left(L^{-1}\right)'
$$

Тогда по (9) окончательно получим

$$
b = \Delta_0'(L^{-1})'S^{-1} \tag{35}
$$

После того, как найдена строка $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, мы определяем столбцы матрицы $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$ из (26).

Следствие. Согласно (3), (7), (10) и (11) найдем решение системы (1)

$$
x = SK\chi(t)e^{\Lambda t}C \tag{36}
$$

Пример. Рассмотрим задачу программы управления космического аппарата при посадке на луну [4]. Движение космического аппарата в конце посадки будем рассматривать в относительной системе координат OXYZ. Начало относительной системы координат поместим в расчетную точку прилунения.

Для простоты рассмотрим однородную часть системы уравнений

$$
\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\omega^2 x_1 + U\alpha_2 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = 2\omega^2 x_3 + U\alpha_4 \end{cases} \tag{37}
$$

где

$$
\alpha_2^2 + \alpha_4^2 = 1 \tag{38}
$$

ω – угловая скорость на круговой орбите радиуса r_0.

Обозначим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{39}$$

примем

$$U = \int_{-\infty}^{t} g(t-t')\nu(t')dt', \qquad \nu = bx, \; b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

тогда система (37) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + h\int_{-\infty}^{t} g(t-t')bx(t')dt' \tag{40}$$

Предположим, что наперед заданными желательными числами являются $1, 1, 0, 0$.

Требуется построить $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ так, чтобы система (40) приводилась к виду

$$\begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = y_2, \\ y_3' = 0 \cdot y_3, \\ y_4' = 0 \cdot y_4, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y_1 = C_1 e^t \\ y_2 = C_2 e^t \\ y_3 = C_3 \\ y_4 = C_4 \end{cases}$$

Предполагается, что

$$R'(p)/_{p=1} = 0, \; R''(p)/_{p=1} \neq 0, \;\; R'(p)/_{p=0} = 0, \; R''(p)/_{p=0} \neq 0 \tag{40$_1$}$$

Решение. Предположим $\alpha_2 = \cos 60^0 = 1/2$ следовательно, $\alpha_4^2 = 1 - \alpha_2^2 = 3/4$, $\alpha_4 = \sqrt{3}/2$. Тогда по (39) матрица (7) имеет вид

$$S = (h, Ah, A^2h, A^3h) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -0.5\omega^2 \\ 0.5 & 0 & -0.5\omega^2 & 0 \\ 0 & 0.5\sqrt{3} & \omega^2 & 0 \\ 0.5\sqrt{3} & \omega^2 & 0 & -\omega^4 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Так как $|S| = 3\omega^4/16 \neq 0$, легко получить обратную матрицу

$$S^{-1}=\begin{vmatrix} -4\sqrt{3}\omega^2/3 & 0 & 0 & 2\sqrt{3}/3 \\ 8\omega^2/3 & 4\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{3}/3 & -4/3 \\ -4\sqrt{3}/3 & -2/\omega^2 & 0 & 2\sqrt{3}/3\omega^2 \\ 8/3-2/\omega^2 & 4\sqrt{3}/3\omega^2 & 2\sqrt{3}/3\omega^2 & -4/3\omega^2 \end{vmatrix} \qquad (42)$$

Из (39), (41) и (42) следуют

$$h_0=S^{-1}h=(1,0,0,0)', \qquad A_0=S^{-1}AS=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (43)$$

Из (27) и (43) получаются

$$\Delta(\lambda)=|A_0-\lambda E|=\lambda^4+\omega^2\lambda^2;\ \ \Delta_1(\lambda)=\lambda^3+\omega^2\lambda$$

$$\Delta_2(\lambda)=\lambda^2+\omega^2;\ \ \Delta_3(\lambda)=\lambda;\ \ \Delta_4(\lambda)=1 \qquad (44)$$

Из (34) и (44) найдем

$$L=\begin{vmatrix} \Delta_1(1) & \Delta_2(1) & \Delta_3(1) & 1 \\ \Delta_1'(1) & \Delta_2'(1) & \Delta_3'(1) & 0 \\ \Delta_1(0) & \Delta_2(0) & \Delta_3(0) & 1 \\ \Delta_1'(0) & \Delta_2'(0) & \Delta_3'(0) & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\omega^2 & 1+\omega^2 & 1 & 1 \\ 3+\omega^2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},\ \Delta_0=\begin{vmatrix} \Delta(1)/R(1) \\ \Delta'(1)/R(1) \\ \Delta(0)/R(0) \\ \Delta'(0)/R(0) \end{vmatrix} \qquad (45)$$

Из (45) имеем $|L|=1$. Можно получить вид для обратной

$$L^{-1}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ 2\omega^2 & -\omega^2 & -2\omega^2 & 1+\omega^2 \\ -3\omega_2 & \omega^2 & 3\omega^2+1 & 2\omega^2 \end{vmatrix} \qquad (46)$$

Из (40_1) следует вид для передаточной функции регулятора [5] в окрестности $p=0$

$$R(p)=\frac{G_1(p)}{p^2+G_1(p)}, \qquad G_1(0)\neq 0$$

в окрестности $p=1$

$$R(p)=\frac{G_2(p)}{(p-1)^2+G_2(p)}, \qquad G_2(1)\neq 0$$

Следовательно, $$R(0)=1,\ R(1)=1 \qquad (47)$$

Из (45) и (47) получаем $\Delta_0=\left[\Delta(1),\Delta'(1),\Delta(0),\Delta'(0)\right]'$

Поэтому из (44) найдем

$$\Delta_0 = (1+\omega^2; 4+\omega^2; 0; 0)'$$

Используя формулу (35),из (42), (46) и (48) окончательно получим

$$b = [2(\omega^2 - 1); 4; 0; 0]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М. :Наука, 1973. 432 с.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М. :Наука, 1967. 596 с.
3. Чернятин В. А. О построении устойчивых линейных систем регулирования // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1967. №1. С. 5-12.
4. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов. М.: Наука, 1965. 455с.
5. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 395с.

Государственный Инженерный
Университет Армении

Поступила в редакцию
29.03.2001