

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
 ОБОЛОЧКИ ПРИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКЕ

Мовсисян А.А., Нерсисян Г.Г.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Մասձգանձուցիկ զլանային թաղանթի կայունության մասին շարժվող բեռի դեպքում

Դիտարկվում է օրթոտրոպ կյուրից զլանային թաղանթի կայունությունը շարժվող բեռի դեպքում Նյուերը առաձգանձուցիկ իատկություն է զուգարերում միայն սահրի դեֆորմացիայի նկատմամբ: Բեռի շարժման արագությունը այնքան փոքր է, որ իներցիոն ուժերը կարելի է արհամարել: Բացի ակնարարային է երկարատև կրիտիկական բեռներից մտպվում է նաև կրիտիկական ժամանակի գաղափարը:

A. A. Movsisyan, G. G. Nersisyan

On Stability of Viscoelastic Cylindrical Shell under Moving Load

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки из композита когда нормальное давление движется с одного конца в другой. Движение настолько медленное, что инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь и в то же время вязкие свойства играют заметную роль. Для обсуждаемых систем, помимо мгновенной и длительной критических нагрузок, есть необходимость также введения критического момента времени потери устойчивости. Аналогичная задача для разномодульного стержня рассмотрена в [1].

Ի Կակ Իզվեստնո, մնոգե կոմպոզիտ, սվազույոսիմ մաթերիալոմ կոթորի յալյույթս թոլիմերս, Ե Եոլիսինսթև սվոեմ, վազկե սվոյթս յրոյալյոթ թո օրոնոսիոնս կ սձվոցոյմ ձեֆորմազիոնս [2], յ.ե. Դլս տաիկ մաթերիալօս օրոձերոյոսիկ յաոն է մեծ վիձ:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11}e_x + A_{12}e_y \\ \sigma_y &= A_{12}e_x + A_{22}e_y \\ \sigma_{xy} &= \bar{A}_{66}e_{xy} = A_{66}(1 - I^*)e_{xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Օպերատոր Γ^* Կարակթերիզուեթ վազկե սվոյթս մաթերիալս:

Յ քրոձօղօսիոնս, շո ձվազույոսիկ նաղրուկ սվոաձեթ կօլեցօե ուսիսե: (1.1) սօօթսթվոյոթ սևոսոյոսիե սվաոնոսիոսի Ե քրեմեոսիոնս:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{C}_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + \bar{C}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} C_{12} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ (C_{12} + \bar{C}_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{C}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} C_{22} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{R} \left[C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \right] + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2^u \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Как уже было отмечено в введении, задача рассматривается в квазистатическом приближении.

Будем рассматривать случай, когда на концах оболочки осуществляется условие свободного опирания, тогда, представив перемещения в виде

$$u = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) \cos \lambda_m x$$

$$v = \sin \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t) \sin \lambda_m x \quad (1.3)$$

$$w = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \mu_n = \frac{n}{R}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}$$

граничные условия будут удовлетворены. Для получения системы относительно φ_m , ψ_m и f_m , необходимо ещё начальное кольцевое усилие также представить в виде ряда

$$T_2^u = R \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.2) и исключая φ_m и ψ_m , для f_m получим бесконечную систему однородных интегральных уравнений

$$\left[Y_1 - Y_2 \Gamma^* + K_m \frac{1 - \Gamma^*}{x_1 - x_2 \Gamma^*} \right] f_m = - \frac{R \mu_n^2}{2} \left[\sum_{p=1}^m a_{m-p} f_p + \sum_{p=m}^{\infty} a_{p-m} f_p - \sum_{p=1}^{\infty} a_{p+m} f_p \right] \quad (1.5)$$

Здесь

$$Y_1 = D_{11} \lambda_m^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4$$

$$Y_2 = 4D_{66} \lambda_m^2 \mu_n^2$$

$$X_1 = C_{11} C_{66} \lambda_m^4 + (C_{11} C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12} C_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + C_{22} C_{66} \mu_n^4$$

$$X_2 = C_{66} (C_{11} \lambda_m^4 - 2C_{12} \lambda_m^2 \mu_n^2 + C_{22} \mu_n^2)$$

$$K_m = \frac{1}{R^2} C_{66} \lambda_m^4 (C_{11} C_{22} - C_{12}^2)$$

2. В качестве примеров рассмотрим два случая:

а) равномерное внешнее давление ($q = q_0$ при $x \leq ct$) с одного конца движется в другой с постоянной скоростью c . Тогда для коэффициентов a_k будем иметь

$$a_0 = q_0 t, \quad a_k = \frac{2q_0}{k\pi} \sin k\pi t \quad (2.1)$$

Здесь $t = ct/l$ — безразмерное время, и $t = 1$ соответствует времени, когда нагрузка доходит до второго конца.

б) гидростатическое давление распространяется с постоянной скоростью

$$q = q_0 \left(1 - \frac{x}{ct} \right), \quad 0 \leq x \leq ct \quad (2.2)$$

$$a_0 = \frac{q_0 t}{2}, \quad a_k = \frac{2q_0}{(k\pi)^2 t} (1 - \cos k\pi t)$$

Материал оболочки берется такой, для которого наследственное свойство характеризуется моделью Максвелла — Томпсона

$$\Gamma^* u = A \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Критическая нагрузка или критическое время потери устойчивости определяются из системы (1.5). Если принять нагрузку не движущейся, то для каждого фиксированного положения (на интервале действующей нагрузки), можно определить мгновенную и длительную критические нагрузки, как обычно делается для вязкоупругих систем [3]. Но при движущейся нагрузке, естественно, имеются ещё промежуточные значения критических параметров. Таковым, в частности, является критическое время. Понятие последнего — в некоторой степени произвольное и различное при толковании различных авторов. Мы будем пользоваться понятием, использованным в [1,4].

Если в (1.5) $\int_0^t \Gamma^*(t-\tau) f_m d\tau$ заменить на $f_m \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau$, то вместо системы интегральных уравнений будем иметь алгебраическую систему с переменными коэффициентами от времени. Вот из условия разрешимости этой системы и определяется критическое время. Такое понятие относительно критического времени помимо того, что дает значения мгновенных и длительных критических величин, имеет еще ясный физический смысл — критическое время — это время, при котором для вывода системы из начального состояния, необходимо наименьшее внешнее воздействие, чем в другой момент времени.

3. Произведем числовой эксперимент. В качестве материалов для оболочки брались ортогонально армированные ($\pm 45^\circ$) [5].

а) стеклопластик с данными -

$$E_1 = E_2 = 17 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0, \quad G_{12} = 12.5 \text{ ГПа} \quad (3.1)$$

б) углепластик -

$$E_1 = 8.2 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 7.6 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = 0.89; \quad (3.2)$$

$$\nu_{21} = 0.87; \quad G_{12} = 20 \text{ ГПа}$$

$$A_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_{12} = \nu_{21}A_{11}, \quad A_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_{66} = G_{12} \quad (3.3)$$

Некоторые результаты вычислений приведены в таблицах. В табл. 1 положены значения $qR^3/A_{11}h^3$, при которых потеря устойчивости происходит для одного момента времени для первой задачи, а в табл. 2 - для второй. В первых строках каждой клетки помещены эти значения для $\frac{\dot{h}}{A} = 2 \cdot 10^{-3}$, а во вторых - $\frac{\dot{h}}{R} = 1 \cdot 10^{-3}$, при этом $\pi R = 0.5l$ (то, что числа первых строк меньше вторых, не должно смущать, т.к. в выражении $\frac{q}{A_{11}} \frac{R^3}{h^3}$ существует второй множитель).

Таблица 1

β	Стеклопластик				Углепластик			
	0	3	6	15	0	3	6	15
0.2	34.78	34.29	33.92	33.41	37.04	36.49	36.16	35.78
	48.40	47.91	47.54	47.02	50.54	50.01	49.68	49.30
0.4	8.001	7.895	7.848	7.824	8.415	8.226	8.166	8.138
	11.16	11.05	11.00	10.98	11.55	11.36	11.30	11.27
0.6	4.278	4.222	4.210	4.208	4.483	4.361	4.341	4.337
	5.985	5.931	5.919	5.917	6.182	6.063	6.043	6.039
0.8	3.284	3.244	3.238	3.238	3.439	3.337	3.329	3.327
	4.602	4.563	4.557	4.557	4.752	4.652	4.642	4.640
1	3.132	3.092	3.088	3.088	3.280	3.180	3.174	3.174
	4.389	4.349	4.347	4.347	4.533	4.431	4.427	4.427

Для длительного коэффициента модуля сдвига принималось значение половины его мгновенного значения -

$$A_{66}^* = A_{66}(1 - \Gamma^* \cdot 1) = 0.5 A_{66} \quad (\text{в (2.3) } 2A = \alpha) \quad (3.4)$$

В первых строках таблиц заданы значения

$$\beta = \frac{\alpha l}{c} = 0; 3; 6; 15 \quad (3.5)$$

(β^{-1} - безразмерное время релаксации).

Случай $\beta = 0$ соответствует упругой постановке задачи – мгновенная критическая нагрузка, а $\beta = 15$ уже можно трактовать как случай длительной нагрузки ($1 - e^{-\beta} \approx 1$).

Таблица 2

$\tau_{кр}$	Стеклопластик				Углепластик			
	0	3	6	15	0	3	6	15
0.2	122.6	120.5	118.9	116.6	131.5	129.5	128.3	126.8
	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1	155.1
0.4	25.10	24.67	24.48	24.38	26.48	25.88	25.68	25.58
	34.93	34.50	34.31	34.20	36.23	35.64	35.44	35.35
0.6	11.80	11.61	11.57	11.56	12.39	12.06	11.99	11.98
	16.47	16.28	16.24	16.23	17.04	16.70	16.64	16.63
0.8	7.752	7.638	7.624	7.623	8.125	7.885	7.864	7.862
	10.84	10.73	10.72	10.71	11.20	10.96	10.94	10.94
1	6.096	6.011	6.005	6.005	6.385	6.190	6.180	6.178
	8.537	8.451	8.445	8.445	8.816	8.621	8.611	8.611

Как видно из приведенных таблиц, разница между мгновенными и длительными нагрузками не очень большая. Это и понятно, ведь вязким свойством обладает только коэффициент сдвига (возможно, не самый главный для подобных задач), как и следовало ожидать, критическое время для промежуточных состояний находится между значениями мгновенного и длительного.

С другой стороны, чем толще и чем короче оболочка, тем больше относительное критическое давление ($q(\tau_{кр})/q(\tau=0)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян А.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. //Изв.АН РФ. МТТ. 1994. №4. С.171-175.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Изд. "Зинатне", 1980. 571 с.
3. Потанов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312 с.
4. Мовсисян А.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №4. С.3-12.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.