

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Геворкян Г.А.

Գ. Ա. Գևորգյան

Առաձգական սալերի լուծման վերջավոր տարրերի մոդիֆիկացված մեթոդ

Առաջարկվում է վերջավոր տարրերի մոդիֆիկացված մեթոդ, որում երկչափ առաձգական սալերի լուծումը հանգեցվում է բառակոսային ծրագրավորման խնդիրների: Դերվում է նրանց լուծման ալգորիթը:

G. A. Gevorgyan

A Modified Finite Elements Method for Elastic Plates

Предлагается модифицированный метод конечных элементов, при котором решения двумерных упругих пластин сводится к задачам квадратичного программирования. Приведен алгоритм их решения.

1.Метод конечных элементов треугольной формы для двумерных упругих пластин.

Рассмотрим пластинку единичной толщины, внутри которой выделен s -ый конечный элемент треугольной формы с узлами i, j, m .

Перемещения i -ого узла зададим вектором $\delta_i = (u_i, v_i)^T$, при котором вектор узловых перемещений треугольного элемента представится в виде

$$\delta_e = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m)^T$$

Вектор перемещения $f = (u, v)^T$ внутри элемента задается формулой [3]

$$f = (IN_i, IN_j, IN_m)\delta_e, \quad (1)$$

где

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad (2)$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j, \quad (3)$$

Δ – площадь треугольника; ijm : I – единичная матрица второго порядка.

Остальные величины, входящие в соотношение (1), можно получить циклической перестановкой индексов ijm в выражениях (2) и (3).

Деформация в некоторой точке элемента определяется вектором

$$\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})^T = \begin{bmatrix} B_x^T & B_y^T & B_{xy}^T \end{bmatrix} \delta_e$$

где

$$B_r^s = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{vmatrix} \quad r = \{i, j, m\}, \quad (4)$$

В соответствии с законом Гука для плоского напряженного состояния и изотропного материала имеем

$$\sigma = \tilde{D}\epsilon = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \epsilon \quad (5)$$

Здесь $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$ — вектор напряжения, $\tilde{D}$ — матрица упругости, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Для определения матрицы жесткости $k_s = \|k_{rq}^s\|$ элемента ijm имеем [3]

$$k_s = (B_s)^T \tilde{D} B_s \Delta t \quad (6)$$

где матрица $B_s = \|B_s^i, B_s^j, B_s^m\|$; t — толщина элемента.

Обозначим через $F_s = (F_{s,x}^i, F_{s,y}^i, F_{s,x}^j, F_{s,y}^j, F_{s,x}^m, F_{s,y}^m)^T$ вектор узловых сил, а через $P_s = (P_{s,x}^i, P_{s,y}^i, P_{s,x}^j, P_{s,y}^j, P_{s,x}^m, P_{s,y}^m)^T$ — вектор нагрузок. Здесь индексами x и y показаны проекции сил на соответствующие координатные оси.

Векторы F_s и P_s связаны соотношением [3]

$$F_s = k_s \delta_s - P_s \quad (7)$$

2. Модифицированный метод конечных элементов треугольной формы для двумерных упругих пластин.

Примем в качестве обобщенных сил и обобщенных перемещений соответственно узловые усилия F_s и перемещения δ_s , тогда, согласно теореме Клапейрона потенциальная энергия S -ого конечного элемента равна

$$\Omega_s = \frac{1}{2} (\delta_s)^T F_s \quad (8)$$

откуда, с учетом связей (7) имеем

$$\Omega_s = \frac{1}{2} [(\delta_s)^T k_s \delta_s - (\delta_s)^T P_s] \quad (9)$$

Если рассматриваемая область представлена в виде совокупности m конечных элементов, то потенциальная энергия для всей конструкции будет

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i \quad (10)$$

Пусть n – общее число узлов конструкции.

$\delta = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)^T$ – вектор узловых перемещений,

$F = (F_1^x, F_1^y, F_2^x, F_2^y, \dots, F_n^x, F_n^y)^T$ – вектор узловых сил,

$P = (P_1^x, P_1^y, P_2^x, P_2^y, \dots, P_n^x, P_n^y)^T$ – вектор нагрузок,

$K = \|K_{ij}\|$ – матрица жесткости для всей конструкции.

Тогда, как следует из соотношения (10),

$$P_i^x = \sum_s P_{i,s}^x, \quad P_i^y = \sum_s P_{i,s}^y, \quad i \in N = \{1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

и, кроме этого, матрица K имеет $n \times n$ компонентов квадратной подматрицы второго порядка

$$\bar{K}_{ij} = \sum_s k_{ij}^s, \quad i \in N, \quad j \in N \quad (12)$$

В формулах (11) и (12) знак суммы распространяется на все соединяемые в узле стороны конечных элементов.

Из соотношения (9) и (10) находим

$$\Omega = \frac{1}{2} (\delta^T K \delta - \delta^T P) \quad (13)$$

которая является однородной функцией второй степени узловых перемещений.

Если исходить из принципа минимума потенциальной энергии системы [4], то определение искомого вектора δ сводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\min \{0,5(\delta^T K \delta - \delta^T P),$$

условия совместности деформаций,

кинематические краевые условия\} \quad (14)

Если i -ый узел s -ого конечного элемента жестко зашцеилен, то кинематические граничные условия соответственно будут

$$u_i^s = 0 \text{ и } v_i^s = 0 \quad (15)$$

если же шарнирно оперт, то имеем

$$u_i^s = 0 \text{ или } v_i^s = 0 \quad (16)$$

Введем обозначения

условия неотрицательности искоемых переменных, то ее решение сводится к определению обратной матрицы $G^{-1} = \|g_{ij}\|$, где

$$G = AD^{-1}A^T \quad (24)$$

Зная обратную матрицу G^{-1} , последовательно находим векторы

$$B = AD^{-1}C \quad (25)$$

$$Z = G^{-1}B \quad (26)$$

Тогда искоемые компоненты вектора X определяем по формуле

$$X = D^{-1}(A^T Z - C) \quad (27)$$

Приведем алгоритм нахождения обратной матрицы G^{-1} для данной задачи.

Нулевой шаг. В качестве базисных переменных примем компоненты вектора Z , тогда, легко увидеть, что $G_0 = \bar{I}$. Очевидно, что обратная матрица G_0^{-1} также единичная и $G_0^{-1} = \bar{I}$.

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в k -ом шаге. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению k -ого шага. Зафиксируем некоторый элемент $p \in M = \{1, 2, \dots, 2n\}$, в соответствии с которым последовательно находим вектор Q_p и матрицу $G_{k,p}^{-1}$ по формулам [1]:

$$Q_p = G_k^{-1} d_{pp}^{-1} A_p \quad (28)$$

$$g_{ij}^{(k,p)} = g_{ij}^{(k)} - \frac{Q_p^i Q_j^T}{1 + A_p^T Q_p}, i \in M \setminus \{2n\}, j \in M \setminus \{2n\} \quad (29)$$

Эту процедуру повторим $2n$ раз для всех векторов $A_j, j \in M$. Ясно, что при $p = 2n$ получим

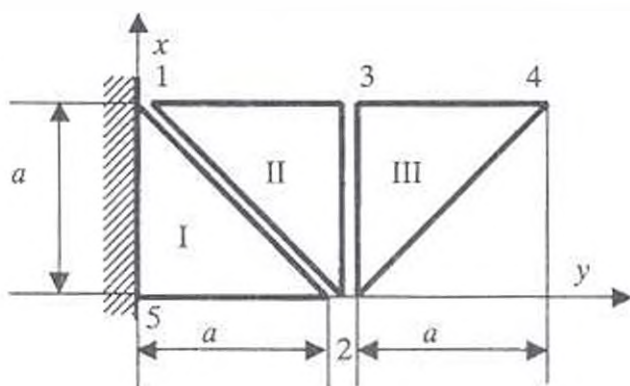
$$G^{-1} = G_{2n}^{-1} \quad (30)$$

Отметим, что по сравнению с ранее существующими методами данный подход потребует почти одинаковое количество действий умножения (деления). Однако программный пакет реализации вышеприведенного алгоритма малообъемен и прост в применении.

4. Пример.

Рассмотрим расчет пластинки [2], представленной на фиг. 1, на которую действует равномерно распределенная по всей поверхности нагрузка с интенсивностью q .

Разобьем пластинку на ряд треугольников (фиг.1). Составим таблицу координат вершин треугольников и поочередно рассмотрим элементы I, II и III. По формулам (3) и (4) найдем матрицы



Фиг. 1

$$B_2^I = B_4^{III} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad B_2^{II} = B_2^{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3^{II} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad B_3^{III} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

Учитывая, что площадь конечного элемента равна $\Delta = a^2/2$, и, принимая $\nu = 0,3$, для элементов I, II и III определяем векторы нагрузок и матрицы жесткостей (6). Исходя из соотношений (12) и (11), находим подматрицы жесткостей и компоненты вектора нагрузок. На основе этих величин формируем вектор C и матрицу жесткости для всей конструкции. Имеем

$$C = qa^2(0, 0,5, 0, 0,33333, 0, 0,16667, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$K = \frac{Et}{1,82} \begin{bmatrix} 1,7 & 0 & -0,7 & 0,05 & 0 & -0,35 \\ 0 & 2,35 & 0 & -2 & -0,3 & 0 \\ -0,7 & 0 & 2,7 & 0 & -1 & 0,35 \\ 0,05 & -2 & 0 & 2,7 & 0,3 & -0,35 \\ 0 & -0,3 & -1 & 0,3 & 1 & 0 \\ -0,35 & 0 & 0,35 & -0,35 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

Используя формулы (19), (20) и обозначения (17), находим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,7 & 0,05 & 0 & -0,35 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -0,3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,035 & -1 & 0,105 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,265 & -0,336175 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,0159136 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и целевую функцию

$$\Omega = \frac{1,82qa^2}{Et} (0,7u_2^2 + 1,35v_2^2 + 1,21u_3^2 - 2,3v_3^2 - 1,16u_4^2 + 0,103v_4^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2)$$

Используя вышеприведенный алгоритм, вычисляем обратную матрицу

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0,286449 & -0,265257 & 0,0893936 & -0,0455973 & 0,0967714 \\ -0,265257 & -1,8969 & 0,334242 & 1,29098 & -0,322129 \\ 0,0893936 & 0,334242 & -0,207506 & -0,446221 & 1,27638 \\ -0,0455993 & 1,29098 & -0,446221 & -0,226627 & 0,679938 \\ 0,0967714 & -0,322129 & 1,27638 & 0,679938 & -1,08372 \end{bmatrix}$$

и поочередно находим (формулы (24) – (26)) векторы

$$B = (-0,57245, 0,65975, 0,1645, -0,68758, 0,025699)^T$$

$$Z = (-0,29044, -1,94059, 0,47482, 0,97773, -0,55332)^T$$

$$\delta = \frac{1,82qa}{Et} (-0,4149, -1,8078, 0,5604, -1,9653, 0,6076, -3,4168)^T$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г. А. Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования. Ереван: Изд. АН Армянской ССР, 1987. 184 с.
2. Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И., Лужкин О. В., Рекач В. Г., Синельников В. В., Шалиро Г. С. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1976. 600 с.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974. 240 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1977. 280 с.

Ереванский государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
02.09.2002