ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Агаловян Л.А., Асратян М.Г., Геворкян Р.С.

Լ. Ա. Աղալովյան, Մ. Գ. Հասրաթյան, Ռ. Ս. Գևորգյան

Փոփոխական լայնության անիզոտրոպ չերտի համար առաձգականության տեսության ոչ դասական խառը եզրային մեկ խնդրի մասին

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության երկչափ խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկական ինտեգրման միջոցով լուծված է փոփոխական լայնության անիզոտրոպ չերտի համար եզրային խնդիր, երբ նրա մի երկայնական եզրն ազատ է, իսկ հակադիր եզրի վրա տրված են ոչ դասական եզրային պայմաններ. Արտածված են անկորնետ բանաձևեր լարումների բենզորի և տեղափոխումների վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար. Բերված է չերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերլուծությունը մասնավոր դեպքի համար.

Խնդիրը, մասնավորապես, միտված է մոդելավորել երկրակեղևի սեղմվելը Եվրասիական և Արաբական սալերի միջև Հայկական Լեռնաշխարհի և Կովկասի շրջանում.

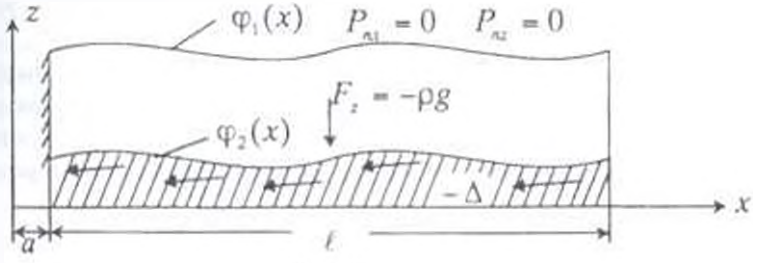
L.A. Aghalovyan, M.G. Hasratyan, R.S. Gevorgyan

On one nonclassic mixed boundary-value problem of elasticity theory for anisotrope layers of variable width

Путем асимптотического интегрирования уравнений двумерной задачи теории упругости анизотропного тела, с учетом массовых сил, решена краевая задача для анизотропной полосы переменной ширины, когда один из ее продольных краев свободен от нагрузок, а на другом заданы неклассические условия, не противоречащие граничным условиям краевых задач теории упругости. Выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния для одного частного случая.

Задача, в частности, в некоторых приближениях моделирует сжатие земной коры между Евразиатской и Аравийской плитами в зоне Армянского нагорья и Кавказского региона.

1. Имеем анизотропную полосу переменной ширины, занимающую область $\Omega = \{x, z : x \in [0, \ell],\ \varphi_2(x) \le z \le \varphi_1(x),\ \varphi_1(x) - \varphi_2(x) > 0,\ h << \ell\}$.



Фиг. 1

где $h = \sup\{\varphi_1 - \varphi_2\}$, ℓ – характерный продольный размер полосы (фиг. 1)

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы переменной ширины, если ее продольный край $z = \varphi_1(x)$ свободен от нагрузок

$$\sigma_{jx}(z = \varphi_1(x))\cos(n,x) + \sigma_{jz}(z = \varphi_1(x))\cos(n,z) = 0 \quad j = x,z \tag{1.1}$$

а по краю $z = \varphi_2(x)$ противоположно оси OX переместилось абсолютно жесткое твердое тело на величину Δ за заданный промежуток времени (в частности, за год). Такое перемещение вызывает деформацию поверхности (линии) $z = \varphi_2(x)$ с компонентами, удовлетворяющими условиям

$$u_x(z = \varphi_2(x)) + \Delta = \frac{U}{\sqrt{1+\dot{\varphi}_2^2}}, \quad u_z(z = \varphi_2(x)) = \frac{U\dot{\varphi}_2}{\sqrt{1+\dot{\varphi}_2^2}} \tag{1.2}$$

где U – скольжение упругого тела (полосы) по поверхности абсолютно твердого тела, т.е. по кривой $z = \varphi_2(x)$. (Здесь и в дальнейшем точки над буквами означают производные по переменной x). Естественно будут возникать также нормальное и тангенциальное напряжения, связанные на $z = \varphi_2(x)$ согласно закону сухого трения Кулона

$$\begin{aligned}
&\sigma_\tau(z = \varphi_2(x)) = f\sigma_n(z = \varphi_2(x)) \\
&\sigma_n(z = \varphi_2(x)) = \frac{\dot{\varphi}_2^2}{1+\dot{\varphi}_2^2}\sigma_{xx}(z = \varphi_2(x)) + \\
&+ \frac{1}{1+\dot{\varphi}_2^2}\sigma_{zz}(z = \varphi_2(x)) - \frac{2\dot{\varphi}_2}{1+\dot{\varphi}_2^2}\sigma_{xz}(z = \varphi_2(x)) \\
&\sigma_\tau(z = \varphi_2(x)) = -\frac{\dot{\varphi}_2}{1+\dot{\varphi}_2^2}\sigma_{xx}(z = \varphi_2(x)) + \\
&+ \frac{\dot{\varphi}_2}{1+\dot{\varphi}_2^2}\sigma_{zz}(z = \varphi_2(x)) + \frac{1-\dot{\varphi}_2^2}{1+\dot{\varphi}_2^2}\sigma_{xz}(z = \varphi_2(x))
\end{aligned} \tag{1.3}$$

(где f – коэффициент сцепления) и как следствие, возникнет общее напряженно-деформированное состояние.

Граничные условия (1.2), (1.3) отличны от классических условий краевых задач теории упругости, однако они непротиворечивы и не нарушают корректность задачи, поскольку фактически являются условиями неполного контакта двух тел.

Граничные условия на поперечных краях полосы не конкретизируются, т.к. здесь решается внутренняя задача полосы, играющая в смысле определения НДС доминирующую роль. В небольшой зоне у поперечных краев возникнет пограничный слой, где все напряжения (и перемещения) равноправны [1-5].

Геодезическая модель зоны коллизии Аравийской и Евразиатской плит впервые была построена Маккензи (McKenzie D.P. 1970)[6]. Затем эта модель на основе современных данных спутниковой геодезии, а также специальных геофизических и сейсмологических наблюдений была уточнена и развита С.Ю. Баласаняном [7,8].

Рассматриваемая задача предложена С.Ю. Баласаняном и сформулирована при его непосредственном участии.

Для решения сформулированной задачи в уравнениях плоской задачи теории упругости анизотропного тела

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (x, z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{15}\sigma_{xz} \quad (x, z; 1, 3) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{15}\sigma_{xx} + a_{35}\sigma_{zz} + a_{55}\sigma_{xz}$$

переходим к безразмерным координатам $\xi = x/\ell$, $\zeta = y/h$ и безразмерным перемещениям $U_x = u_x/\ell$, $U_z = u_z/\ell$, получаем сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/\ell$ систему уравнений, решение которой ищем в виде асимптотического разложения [1-5]

$$Q = \varepsilon^{\chi_Q} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \zeta) \tag{1.5}$$

Считая, что вклад объемных сил соизмерим со вкладом поверхностных воздействий, компоненты объемных сил должны иметь асимптотику

$$F_x = \ell^{-1} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{s-1} F_x^{(s)}(\xi, \zeta), \quad F_z = \ell^{-1} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{s-2} F_z^{(s)}(\xi, \zeta) \tag{1.6}$$

Подставив (1.5) в преобразованную систему (1.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях, получим непротиворечивую систему уравнений относительно искомых коэффициентов $Q^{(s)}$ лишь при

$$\chi_{\sigma_{xx}} = \chi_{\sigma_{zz}} = \chi_{u_z} = -1, \ \chi_{\sigma_{xz}} = \chi_{u_x} = 0 \tag{1.7}$$

Решив эту непротиворечивую систему, получим рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения полосы.

Возвращаясь к размерным координатам и размерным перемещениям, рекуррентные расчетные формулы принимают вид

$$R = \sum_{s=0}^{N} R^{(s)}(x, z)$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \sigma_{zz,0}^{(s)}(x) + \sigma_{zz}^{(s)}(x, z)$$

$$\sigma_{xx}^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\dot{u}_{x0}^{(s)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}\sigma_{zz0}^{(s)} + \sigma_{xx*}^{(s)}(x,z)$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \sigma_{zz0}^{(s)}(x) - \frac{z}{a_{11}}\ddot{u}_{x0}^{(s)} + z\frac{a_{13}}{a_{11}}\dot{\sigma}_{zz0}^{(s)} + \sigma_{zz*}^{(s)}(x,z)$$

$$u_x^{(s)} = u_{x0}^{(s)}(x) + u_{x*}^{(s)}(x,z) \qquad (1.8)$$

$$u_z^{(s)} = u_{z0}^{(s)}(x) + zB_{33}\sigma_{zz0}^{(s)} + z\frac{a_{13}}{a_{11}}\dot{u}_{x0}^{(s)} + u_{z*}^{(s)}(x,z)$$

$$\sigma_{xz*}^{(s)} = -\int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial x} + F_z^{(s)} \right) dz$$

$$\sigma_{xx*}^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{\partial u_{x*}^{(s)}}{\partial x} - \frac{a_{13}}{a_{11}}\sigma_{zz*}^{(s)} - \frac{a_{15}}{a_{11}}\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{zz*}^{(s)} = \int_0^z \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{\partial \sigma_{xz*}^{(s)}}{\partial x} - \frac{1}{a_{11}}\frac{\partial^2 u_{x*}^{(s)}}{\partial x^2} + \frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial x} - F_x^{(s)} \right) dz$$

$$u_{x*}^{(s)} = \int_0^z \left(a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{35}\sigma_{zz}^{(s-1)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} - \frac{\partial u_x^{(s-2)}}{\partial x} \right) dz$$

$$u_{z*}^{(s)} = \int_0^z \left(B_{31}\sigma_{xx*}^{(s)} + \frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{\partial u_{x*}^{(s)}}{\partial x} + B_{35}\sigma_{xz}^{(s-1)} \right) dz$$

$$B_{ij} = \frac{a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}, \qquad i, j = 3,5$$

где $\sigma_{xz0}^{(s)}$, $\sigma_{zz0}^{(s)}$, $u_{x0}^{(s)}$, $u_{z0}^{(s)}$ – неизвестные пока функции интегрирования, которые однозначно определяются из условий, заданных на продольных краях полосы.

Удовлетворив граничным условиям (1.1)-(1.3), определим функции интегрирования:

$$\sigma_{xz0}^{(s)} = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{a_{11} + a_{13}\dot{\varphi}_1^2}\dot{u}_{x0}^{(s)} + \tau_{xz*}^{(s)}(z = \varphi_1(x))$$

$$\sigma_{zz0}^{(s)} = \frac{d}{dx}\frac{\varphi_1 u_{x0}^{(s)}}{a_{11} + a_{13}\dot{\varphi}_1^2} + \frac{1}{\dot{\varphi}_1}\tau_{xz*}^{(s)}(z = \varphi_1(x)) -$$

$$- \sigma_{zz*}^{(s)}(z = \varphi_1(x)) - \frac{a_{13}\varphi_1}{a_{11}}\frac{d}{dx}\tau_{xz*}^{(s)}(z = \varphi_1(x))$$

$$u_{x0}^{(s)} = \dot{\varphi}_2\left(u_{x0}^{(s)} + \Delta^{(s)} + u_{x*}^{(s)}(z=\varphi_2(x))\right) - \varphi_2 B_{33}\sigma_{zz0}^{(s)} -$$

$$-\varphi_2\frac{a_{13}}{a_{11}}\dot{u}_{x0}^{(s)} - u_{z*}^{(s)}(z=\varphi_2(x)) \qquad (1.9)$$

$$U_x^{(s)} = \left(u_{x0}^{(s)} + \Delta^{(s)} + u_{x*}^{(s)}(z=\varphi_2(x))\right)\sqrt{1+\dot{\varphi}_2^2}$$

$$\tau_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1(x)) = \frac{a_{13}}{a_{13}+a_{13}\dot{\varphi}_1^2}\left(\dot{\varphi}_1^2\sigma_{xx*}^{(s)}(z=\varphi_1(x)) - \sigma_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1(x))\right)$$

$$\Delta^{(0)} = \Delta, \quad \Delta^{(s)} = 0, \quad s>0$$

где $u_{x0}^{(s)}$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{u}_{x0}^{(s)}}{a_{11}+a_{13}\dot{\varphi}_1^2}\right) + p\frac{u_{x0}^{(s)}}{a_{11}+a_{13}\dot{\varphi}_1^2} = q^{(s)}$$

$$p = \frac{(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)(1+\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + f(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2))}{(\varphi_1-\varphi_2)(1-\dot{\varphi}_2^2+2f\dot{\varphi}_2)}$$

$$q^{(s)} = \frac{1}{(\varphi_1-\varphi_2)(1-\dot{\varphi}_2^2+2f\dot{\varphi}_2)}\left[(\dot{\varphi}_2+f\dot{\varphi}_2^2)\left(\sigma_{xx*}^{(s)}(z=\varphi_2) - \frac{a_{13}}{a_{11}}\tau_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1)\right) + \right.$$

$$+(f-\dot{\varphi}_2)\left(\tau_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1)+\sigma_{xx*}^{(s)}(z=\varphi_2)\right)+ \qquad (1.10)$$

$$+(\dot{\varphi}_2^2-1-2f\dot{\varphi}_2)\left(\frac{1}{\dot{\varphi}_1}\tau_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1) + \frac{a_{13}(\varphi_2-\varphi_1)}{a_{11}}\frac{d}{dx}\tau_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\dot{\varphi}_1}\sigma_{zz*}^{(s)}(z=\varphi_1)+\sigma_{xx*}^{(s)}(z=\varphi_2)-\sigma_{xx*}^{(s)}(z=\varphi_1)\right)\right]$$

имеющее вид

$$u_{x0}^{(s)} = C_1 + \int_a^x \Phi(\alpha,a)\left(C + \int_a^\alpha \Phi(a,\gamma)q^{(s)}(\gamma)d\gamma\right)d\alpha \qquad (1.11)$$

$$\Phi(\alpha,a) = e^{\int_a^\alpha p(\gamma)d\gamma}$$

Постоянные интегрирования общего решения (1.11) однозначно могут быть определены, используя значения компонентов вектора перемещения в какой-либо точке продольного края (поверхности) полосы

$$u_x^{(0)}(a,\varphi_1(a)) = \overline{u}_{x0}, \quad u_x^{(s)}(a,\varphi_1(a)) = 0 \quad s>0, \quad (x,z) \qquad (1.12)$$

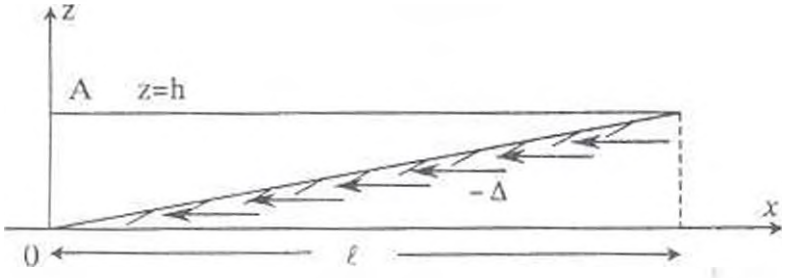
Эти значения обычно известны из геодезических и спутниковых данных.

Рекуррентные расчетные формулы (1.8)-(1.11), (1.12) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения точек

полосы с любой заранее принятой асимптотической точностью $O(\varepsilon^{n})$. Когда функции $z=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ тождественно постоянны, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение краевой задачи.

2. Приведем иллюстрационный пример. Поскольку нам в общем точно неизвестны функции $z=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ (верхняя и нижняя поверхности зоны коллизии) и коэффициенты a_{ij} упругой анизотропии региона, упростим данные, предполагая рассматриваемую область изотропной с горизонтальной верхней поверхностью и нижней плоской поверхностью с постоянным углом наклона. Точка верхней поверхности $A\ (x=a=0, z=h)$ считается неподвижной (фиг. 2)

$$\varphi_1(x)=h, \qquad \varphi_2=k\alpha$$
$$u_z(0,h)=u_x(0,h)=0 \tag{2.1}$$



Фиг. 2

Подставив (2.1) в (1.8)-(1.11), (1.12), после первого шага итерации для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получаем

$$\sigma_{zz}=\rho g(z-h), \quad \sigma_{xx}=\frac{E}{1-\nu^2}(h-z)\ddot{u}$$

$$\sigma_{xz}=\frac{E}{1-\nu^2}\dot{u}-\frac{\nu}{1-\nu}\rho g(h-z), \quad u_x=u, \ U=(u+\Delta)\sqrt{1+k^2}$$

$$u_z=k(u+\Delta)-\frac{\nu}{1-\nu}(z-kx)\dot{u}+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)}\rho g(z-kx)(z+kx-2h)$$

$$\dot{u}=\frac{1-\nu^2}{E}\left[c\left(1-k\frac{x}{h}\right)^{-\gamma}+\frac{\rho g h\alpha}{k(\gamma+1)}\left(1-k\frac{x}{h}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$\ddot{u}=\frac{1-\nu^2}{E}\left[\frac{ck\gamma}{h}\left(1-k\frac{x}{h}\right)^{-\gamma-1}-\frac{\alpha\rho g}{\gamma+1}\right]$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\frac{ch}{k(\gamma-1)}\left[\left(1-k\frac{x}{h}\right)^{1-\gamma}-1\right]-\frac{\alpha\rho g h x}{2k(\gamma+1)}\left(k\frac{x}{h}-2\right)\right)$$

$$c = \frac{kE\Delta}{\nu(1+\nu)h}-\rho g h\left(\frac{\alpha}{k(\gamma+1)}+\frac{1-2\nu}{2\nu(1-\nu)}\right)$$

$$\gamma = \frac{1+kf}{1+2kf-k^2}, \qquad \alpha = \frac{f-k+\dfrac{\nu}{1-\nu}(k+k^2 f)}{1+2kf-k^2}$$

Используя решение (2.2), можно определить равнодействующую R_x горизонтальной упругой силы, которая пропорциональна перемещению Δ Аравийской плиты:

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-k\sigma_{xx}+\sigma_{xz})$$

$$R_x = \sqrt{1+k^2}\,b\int_0^{h/k} P_x(x)dx \qquad (2.3)$$

$$R_x = -\frac{kEb}{\nu(1+\nu)}\Delta = -\frac{2kb}{\nu}G\Delta$$

где b – размер сжимаемой области перпендикулярно плоскости OXZ.

Из (2.3) следует, что зона коллизии работает как упругая пружина с жесткостью

$$C = \frac{kEb}{\nu(1+\nu)} = \frac{2kb}{\nu}G \qquad (2.4)$$

следовательно, накопленная потенциальная энергия будет

$$W = C\frac{\Delta^2}{2} \qquad (2.5)$$

Принимая $E = 2{,}5\cdot10^{11}$ дн/см², $k = 0{,}02$, $\nu = \frac{1}{4}$, $b = 2{,}0\cdot10^{8}$ см, получим упругую силу и энергию упругой деформации

$$R_x = -1{,}6\cdot10^{19}\Delta \quad \text{(дн)}$$

$$W = 0{,}8\cdot10^{19}\Delta^2 \quad \text{(эрг)} \qquad (2.6)$$

(Все величины приведены в принятой в сейсмологии системе единиц СГС)

Накапливаемая потенциальная энергия, когда $\Delta = 1{,}8$ см/год, составляет:

$$W_1 = 2{,}6\cdot10^{19} \text{ эрг.} - \text{за год}$$

$$W'_{10} = 2{,}6\cdot 10^{21}\ \text{эрг.} - \text{за 10 лет,} \qquad (2.7)$$

$$W_{100} = 2{,}6\cdot 10^{22}\ \text{эрг.} - \text{за 100 лет.}$$

Полученные числа согласуются с результатами наблюдений. При достижении критического значения $W_{кр}$ потенциальной энергии произойдет разрушение и высвобождение части накопленной энергии в виде сейсмических волн.

Решение (1.1)-(1.3), (1.8)-(1.11), (1.12) позволяет рассматривать также более сложные случаи.

Работа выполнена при поддержке гранта МНТЦ А 651.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. С. 7-12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок// ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271-278.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
4. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. № 6. С. 3-15.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины// ПММ. 1996. Т.60. Вып. 2. С. 290-298.
6. McKenzie D.P. (1970) Plate tectonics of the Mediterranian region. Nature. V. 226.
7. Balassanian S. Yu. (1977) Seismogenesic and Distructive Earthquakes in the Caucasus. "Historical and Prehistorical Earthquakes in the Caucasus", Kluwer Academic Publisher. Netherlands. pp. 1-37.
8. Balassanian S. Yu. (2002) Earthquake Prediction Research for Current Seismic Hazard Assessment "Earthquake Hazard and Seismic Risk Reduction". Kluwer Academic Publishes. Netherlands. pp. 169-209.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
09.06.2003