

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ,
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ,
ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ КОРОТКИХ ВОЛН

Багдаев А.Г.

Ա.Գ. Բաղդև

Կարճ ալիքների հավասարումներով նկարագրվող ոչ զծային ոչ ստացիոնար դիֆրակցիոն խնդիրների լուծման ալգորիթմի մշակումը:

Դիտարկվում է հարթ խնդիրը ճնշման քափանցելիության սեղմելի հեղուկի մեջ և քարակ կոմի քափանցելիությունը հեղուկ կիսատարածության մեջ: Երկու խնդիրներում հետազոտվում է ալիքների շփման կետի շրջակայքը զծային և ոչ զծային դրվածքով:

A.G. Bagdov

Elaboration of algorithm of solution of non-linear unsteady diffraction problems,
described by short waves equations

Рассматриваются типичные дифракционные волновые задачи: плоская задача о проникании давления в сжимаемую жидкость занимающую полупространство и задача о проникании узкого конуса в жидкое полупространство. В обеих задачах исследуется окрестность точки касания распространяющейся волны с точечной волной. Находятся линейное и точное нелинейное решения впереди точечной волны, а затем формулируется задача численного решения нелинейных уравнений коротких волн позади точечной волны с определением высшей ударной волны.

1. Плоская задача о проникании отрицательного избыточного давления в жидкость или положительного в упругую полуплоскость.

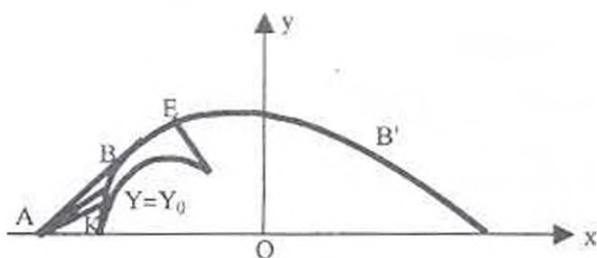
Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего в начальный момент $t = 0$ в точке O на поверхности и движущегося по границе жидкости по закону

$$p = \begin{cases} p_1 f\left(\frac{x}{vt}\right), & |x| < vt \\ 0, & |x| > vt \end{cases} \quad (1)$$

где $f(1) = 1$, $p_1 < 0$, $v > a$ – постоянные, координата x отсчитывается по границе жидкости, a – скорость звука невозмущенной жидкости.

Ставится задача определить нелинейное решение в окрестности точки B касания волн AB и BB^* (фиг. 1). В случае $p_1 > 0$ эта задача решена аналитически в [1], при этом ABB^* является ударной волной и определено распределение давления вдоль BB^* . При этом условия на ударной волне удовлетворяются с достаточной точностью. В случае $p_1 < 0$ ABB^* является непрерывной волной [2], при этом имеется

висячая ударная волна BK (фиг. 1), на которой получено аналитически нелинейное решение, которое удовлетворяет не столь точно условиям на BK [1]. Поэтому следует рассмотреть постановку задачи численного счета нелинейных уравнений для определения точного решения в окрестности B (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть r, θ есть полярные координаты.

$\tilde{\Phi}$ — потенциал движения. Тогда можно в случае $p_1 < 0$ ввести переменные [2]

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{p_1}{\rho_0 a^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} = a\gamma\mu, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{r\partial\theta} = a\gamma^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k+1}{2}} v \\ r &= at \left(1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta \right), \quad \theta - \theta_0 = \gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} Y \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ_0 — начальная плотность, n — показатель адиабаты. Тогда из уравнения для $\tilde{\Phi}$ в нелинейной задаче в первом порядке по γ получится уравнение коротких волн [2]

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial \Phi}{\partial \delta}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta} - \delta \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В упругой среде для нормальной скорости продольной волны [1] $c_n = a + \Gamma u$, где $u = \partial \tilde{\Phi} / \partial r$ есть нормальная к волне скорость частицы, $\Gamma < 0$ и в (2) следует заменять $(n+1)\gamma/2$ на $-\Gamma a^0$, где a^0 — начальная скорость частицы в точке O , причем

$$a^0 = \frac{p_1}{b^2 \rho_0} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{2}{v^2} \right) \frac{1}{F(v^{-1})}, \quad F(v^{-1}) = \left(2 \frac{1}{v^2} - \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{4}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{v^2}}$$

a — скорость продольных, b — скорость поперечных волн, $p_1 > 0$.

Впереди точечной волны BK имеет место точное нелинейное решение [2], получаемое методом характеристик



$$\mu_1 = \delta - \frac{Y^2}{2}, \quad v_1 = -\mu_1 Y \quad (4)$$

или для потенциала

$$\varphi_1 = \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2} Y^2 \delta + \frac{Y^3}{8} \quad (5)$$

Решение (4), (5) имеет место до нижней характеристики фиг. 1, где $Y = Y_1$, после которой имеется постоянный поток

$$\mu_1 = -1, \quad v_1 = Y, \quad \varphi_1 = -\delta + \frac{Y^2}{2} - \frac{1}{2} \quad (6)$$

Решения (4)-(6) имеют место впереди ударной волны KB , причем (5) имеет место для $0 > Y > Y_0$, а (6) — для $Y_0 > Y > -2$, где при

$$Y = Y_0, \quad \mu_1 = -1, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2}.$$

Здесь для определенности выбрана граничная точка K , для которой $Y = -2$. Координаты точки B [2]

$$Y = 0, \quad \delta = 0, \quad \mu = 0, \quad v = 0, \quad \varphi = 0 \quad (7)$$

Считая, что на ударной волне BK $Y < 0$, получим дифференциальные уравнения BK

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1}, \quad 0 > Y > Y_0 \quad (8)$$

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu + 1}, \quad Y_0 > Y > -2$$

На точечной волне BE фиг. 1 имеет место

$$\delta = 0, \quad \varphi = 0 \quad (9)$$

Формулируется граничная задача в области $KBEMK$ фиг.1, где введен дополнительный контур KME , на котором ставится условие перехода в частное точное решение уравнения (3), полученное в [2]

$$\delta = -\frac{1}{2} Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi \quad (10)$$

Поскольку решение этого уравнения для определения $\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}$ затруднительно, можно вместо него брать линейное решение [2]

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_0 = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y}$$

$$\varphi = \varphi^0(\delta, Y), \quad \varphi^0 = -\frac{Y}{2\pi} \sqrt{-2\delta} - \frac{1}{2\pi} (2\delta - Y^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y} \quad (11)$$

Используя (10), (5), (6), (8) можно получить асимптотические решения на ударной волне KB для малых Y :

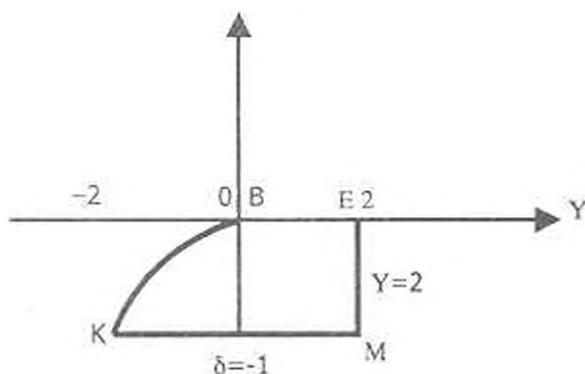
$$\delta = -\frac{1}{3}Y^2, \quad \mu = -\frac{1}{6}Y^2, \quad \mu_1 = -\frac{5}{6}Y^2 \quad (12)$$

и для больших $-Y > 0$:

$$\mu = -1 + \frac{3}{\pi^2 Y^2}, \quad \delta = -1 + \frac{3}{2\pi^2 Y^2} \quad (13)$$

Уравнение вспомогательной дуги KE , на которой задается $\varphi = \varphi^0(\delta, Y)$ по (11), аппроксимируем в виде ломаной KME фиг.2:

для KM $\delta = -1$, $-2 < Y < 2$, для EM $Y = 2$, $-1 < \delta < 0$ (14)



Фиг. 2

Решение (12) удовлетворяет с большой точностью условию на ударной волне BK вблизи точки B . Отсюда следует, что BK является ударной волной, что не согласуется с выводом работы [4], где решена аналогичная по математической постановке задача обтекания установившимся сверхзвуковым потоком верха треугольного крыла, при этом расчет ведется не

только вблизи B , но и во всей области возмущенного движения, причем утверждается, что расчеты показывают на отсутствие ударной волны KB вблизи B .

Вероятно, этот выпад получился в связи с тем, что там в нулевом приближении для KB бралась характеристика, на которой решение непрерывно, т.е. отсутствовала ударная волна.

Схема расчета задачи.

Запишем, следуя [4], [5], конечные разности для сетки $\delta = h_i$, $Y = 2 + hk$, h — шаг, $i, k = 1, 2, 3, \dots$

Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \right)_{i,k} = \frac{1}{2h_i} (\varphi_{i+1,k} - \varphi_{i-1,k}) \quad (15)$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\frac{h^2}{h_1^2} (\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{i,k+1} + \varphi_{i,k-1}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}}{\frac{h^2}{h_1^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta \right) + 1} \quad (16)$$

Решение задачи проводится методом итерации, когда в правую часть подставляется линейное решение (11) в качестве нулевого приближения. При этом учитываются в граничных узлах сетки условия (5), (11), которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } BE, \quad \delta = \delta^0(Y), \quad \varphi = \varphi_1 \text{ из (5), (6) на } KB, \\ \varphi = \varphi^0(\delta, Y) \text{ на } KME, \text{ даваемое (14)} \end{aligned} \quad (17)$$

Для нулевого приближения уравнение ударной волны получается из (12), (13) в виде

$$\delta^0(Y) = -\frac{1}{3} Y^2 - \frac{1}{24} Y^3 \quad (18)$$

После указанных процедур мы получаем первое приближение $\varphi = \varphi^1(\delta, Y)$. По найденному φ^1 определяется вблизи ударной волны KB

$$\mu^1 = \frac{\partial \varphi^1}{\partial \delta} \text{ по (15), и подставляя его в дифференциальные условия (8) и}$$

интегрируя их, начиная с точки $Y^0 = -0.2$, $\delta = -\frac{1}{3}(Y^0)^2$, можно получить уравнение KB в первом приближении $\delta = \delta^1(Y)$.

Далее берутся граничные условия [17] с заменой $\delta^0(Y)$ на $\delta^1(Y)$, подставляя в правую часть (16) $\varphi = \varphi^1(\delta, Y)$ с учетом (17), можно определить следующее приближение $\varphi = \varphi^2(\delta, Y)$. Потом в (8) заменяется

$$\mu^1 \text{ на } \mu^2 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial \delta} \text{ и интегрированием от точки } Y^0 = -0.2 \text{ получается}$$

уравнение KB во втором приближении $\delta = \delta^2(Y)$ и т.д.

Расчет заканчивается, когда $\delta^{(n-1)}(Y) = \delta^n(Y)$, $\varphi^{(n-1)}(\delta, Y) = \varphi^n(\delta, Y)$ с нужной точностью. Поскольку $i, k = 1, 2, \dots, 10$ шаг по Y $h = -0.4$, шаг по $\delta h_1 = -0.1$, для (8) шаг по $h = -0.2$.

В случае, когда нулевое приближение (18) приводит в некоторой итерации к мнимому уравнению ударной волны KB из (8), следует уравнения (8) отбросить и вместо них брать уравнение характеристики

KB [4]. на которой решение непрерывно, т.е. $\mu = \mu_1$, причем из уравнения характеристики $\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2(\delta - \mu)}$ получится:

$$\text{при } 0 > Y > -1, \quad \delta = -\frac{Y^2}{2}, \quad \mu_1 = -Y^2, \quad \mu = -Y^2$$

$$\text{при } Y_2 < Y < -1, \quad \mu_1 = -1, \quad \mu = -1, \quad \delta + 1 = \frac{1}{2}(Y + 2)^2 \quad (18')$$

причем $\Phi = \Phi_1$ дается (5), (6). При счете в качестве нулевого приближения во всем отрезке $[0, -2]$ для KB вместо (18) берется (18'), а в интервале от O до Y_2 равенства (18'), повидимому, имеют место для всех приближений [4].

Здесь $Y_2 < -1$ есть некоторая точка на KB , где решение на KB становится разрывным, расчет ударной волны KB в последующих приближениях ведется по формулам (8).

2. Движение узкого конуса в сжимаемой жидкости.

Картина движения в задаче проникания узкого конуса раствора 2β со сверхзвуковой скоростью V в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство, дана фиг.3.

Выберем ось Ox по поверхности жидкости, ось Oz - вглубь.

Введем полярные координаты $r = r_1 \cos \varphi$, $z = r_1 \sin \varphi$.

Методом замены в линейном решении [3], [6] характеристической координаты на нелинейную можно получить решение на ударной волне CB [2]

$$p = p', \quad \frac{p'}{\rho_0 a^2} = \frac{3}{2}(n+1)\beta^4 M^n (M^2 - 1)^{-1}, \quad M = \frac{V}{a} \quad (19)$$

Вводя в окрестности точки B фиг. 3 безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \Phi - \Phi_0 &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y, \quad p = p' \mu, \quad v_n = a \gamma \mu \\ r_1 &= at + at \frac{n+1}{2} \gamma \delta, \quad v_n = a \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma^2 v, \quad \gamma = \frac{p'}{\rho_0 a^2} \end{aligned} \quad (20)$$

и

где V_n, V_ϕ есть компоненты скорости частиц по r, ϕ , можно получить [2]

линейное решение вблизи B позади точечной волны $BE \left(t - \frac{r}{a} > 0 \right)$

$$\mu = c \left(Y + \sqrt{Y^2 - 2\delta} \right), \quad c = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad (21)$$

Вводя потенциал ϕ по формуле $\mu = \frac{\partial \phi}{\partial \delta}$, интегрируя (21) при условии $\delta = 0, \phi = 0$, можно получить в линейной задаче $\phi = \phi^0(\delta, Y), \delta < 0$,

$$\phi^0 = c\delta Y - c(Y^2 - 2\delta)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} + \frac{c}{3}|Y|^3 \quad (22)$$

В случае $\delta > 0$, т.е. впереди волны BE линейное решение имеет вид [6], [2]

$$\mu = 2c\sqrt{Y^2 - 2\delta}, \quad v = -2c\sqrt{Y^2 - 2\delta}Y \quad (23)$$

Уравнения коротких волн в осесимметричном случае [6], [2]

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \delta} - \delta \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = 0 \quad (24)$$

Уравнение ударной волны BC вблизи точки B [1], [6]

$$\delta = \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2} \quad (25)$$

Уравнение нелинейной параболической линии BE будет

$$\delta = \mu \quad (26)$$

Точка пересечения их B будет иметь координаты

$$Y_B = 1, \quad \mu_B = 1, \quad \delta_B = 1 \quad (27)$$

Можно найти [1], [2] решение (24), которое для больших Y переходит в линейное (23), в виде $\delta > 0$,

$$\delta = \frac{Y^2}{2} + 2\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_1^2, \quad v_1 = -Y\mu_1, \quad \mu_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial \delta} \quad (28)$$

$$\phi_1 = \frac{2}{3}\delta - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}Y^2 - \frac{2}{3}\delta \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{Y^2}{3} - \frac{8}{27}$$

где при определении ϕ_1 учтено, что на BC $\phi_1 = 0$.

На BC имеет место (25) и по (28) $\phi_1 = 0, \mu_1 = 1$, т.е. решение (28) удовлетворяет всем условиям на BC , и тем самым является точным.

Следует решать уравнение (24) методом конечных разностей в области $B'BE MB''$ фиг.3 с учетом граничных условий:

$$\text{на } BE \quad \mu_1 = \delta, \quad \delta = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} Y^2}, \quad \phi = \phi_1 \quad (29)$$

в точке $B'' \quad Y = -2, \delta = 0$, в точке $E \quad Y = 2, \delta = 1.5$, поэтому уравнение $B'E$ можно взять в виде ломаной $B'ME$

$$\text{для } B''M \quad \delta = 0, \quad -2 < Y < 2; \text{ для } ME \quad Y = 2, \quad 0 < \delta < 1.5 \quad (30)$$

на которой ϕ берется в виде (22), на ударной волне BB''

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu}, \quad \phi = 0, \quad \mu = \frac{\partial \phi}{\partial \delta} \quad (31)$$

Как в задаче п.1 сначала задается ударная волна $BB'' \quad \delta = \delta^0(Y)$, и из условий в точке $B: Y = 1, \delta = 1$ и в точке $B'':$

$Y = -2, \delta = 0$, можно взять

$$\delta^0(Y) = \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{18} (Y-1)^2 \quad (32)$$

и решается (16), где заменены φ на ϕ , $\frac{h^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta}$ на $h^2 \frac{\partial \phi}{\partial \delta}$ и в правую часть

подставляется линейное решение (22) с учетом граничных условий (29)-(32). Таким образом, находится первое приближение $\phi^1(\delta, Y)$, далее из (31) находится ударная волна $BB'' \quad \delta = \delta^1(Y)$ и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Сафарян Ю.С. К расчету ударных волн в дифракционных задачах газодинамики и нелинейной динамической упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №1. С.37-42.
2. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач. // Изв. АН Арм ССР. Механика. Т.ХХI. №1. 1968. С.39-56.
3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1981. 303с.
4. Бабаев Д.А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла. // Журнал выш. мат. и мат. физики. 1962. Т.2. №2. С.278-289.
5. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 343с.
6. Багдоев А.Г. Движение конуса в сжимаемой жидкости // Докл. АН Арм ССР. Механика. 1967. Т.ХLV. №3. С.101-106.