УДК 517.946: 531.36

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
 НЕЛИНЕЙНЫХ СОСТОЯНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО УПРУГОГО
 ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

Матвийчук К.С.

Կ Ս Մատվիչուկ

Ղեկավարվող առաձգական բռնող սարքի ոչ գծային վիճակների տեխնիկական կայունության պայմանների որոշումը

Հոդվածը նվիրված է հրթրյա տիպի երկարազված առաձգական բռնող համակարգերի ոչ գծային վիճակների տրված չափի նկատմամբ տեխնիկական կայունության հետազոտմանը ուղղաձիգ ետքորոշման մեջ նրանց երկայնական շարժման ժամանակ [1-6]։ Պրոցեսի առաջարկված ղեկավարման համար ստացված են դինամիկ համակարգի տրված չափի նկատմամբ տեխնիկական կայունության բավարար պայմաններ։ Օպտազործվում է համեմատության մեթոդը [5-6] բաշխված պրոցեսների օպտիմիզացիայի հիման վրա [4]։ Լյապունովի ուղիղ մեթոդի հետ կոմբինացված

K.S. Matvijchuk

*Determination of Technical Stability Conditions of Nonlinear
 States of Regulated Elastic Aircraft*

Статья посвящена исследованию технической устойчивости относительно заданной меры нелинейных динамических состояний удлинённых упругих летательных систем типа ракеты при их продольном движении в вертикальной плоскости [1-6]. Для предложенного управления процессом получены достаточные условия технической устойчивости относительно меры заданной динамической системы. Применяется метод сравнения [5-6] на основе оптимизации распределённых процессов [4] в комбинации с прямым методом Ляпунова.

1. Формулировка управляемой краевой задачи системы. Пусть летательная система представляет собой удлинённое упругое тело, например, тонкое тело вращения, или тело вращения с крыльями и оперением малого удлинения, которое совершает движение в вертикальной плоскости. Скорость полета тела считается постоянной. Колебания оси летательной системы, как балки переменного сечения, под действием сил упругости, веса и аэродинамических сил описываются уравнениями [4]

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = L(\varphi) + \frac{\alpha}{m} u, \quad t \in T, \quad x \in D$$

$$L(\varphi) = -\frac{I}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) - \frac{a_1}{m} \varphi_2 - \frac{b_1}{m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{I}{m} \bar{Q} \quad (1)$$

$$x = \frac{\tilde{x}}{\ell}, \quad \varphi_1 = \frac{\tilde{\varphi}}{\ell}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{g\ell}} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau}, \quad t = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tau, \quad EI = \frac{\tilde{EI}}{G\ell^2}, \quad a_1 = \frac{\tilde{a}\ell\sqrt{g\ell}}{G}$$

$$b_1 = \tilde{b}\ell/G, \quad m = \tilde{m}g\ell/G, \quad 0 < \mu \leq \mu_0 < 1, \quad T_1 = [t_0, N\mu^{-1}]$$

$$D \equiv (0, 1), \quad t_0 = \text{const} \geq 0, \quad N = \text{const} > 0, \quad T_1 \subset I_1 = [t_0, +\infty)$$

$u = u(t, x)$ — управление, $\alpha = \alpha(x)$ — заданная функция, учитывающая место приложения управляющих усилий, например, если управление приложено только в отрезке $[a, 1]$ оси, то полагается: $\alpha(x) \equiv 0$ при $x \in [0, a)$ и $\alpha(x) = 1$ при $x \in [a, 1]$; G — вес, ℓ — длина летательного тела; $\tilde{x}$ — координата текущего сечения, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tau)$ — отклонение оси от равновесного состояния, φ_1 — безразмерное отклонение оси, $\tilde{EI}$ — жесткость при изгибе, $\tilde{m}$ — погонная масса, $\tilde{a}, \tilde{b}$ — коэффициенты аэродинамических сил, g — ускорение силы тяжести, $\tilde{Q}$ — приращение поперечной нагрузки за счет искривления продольной оси системы; τ — время, t — безразмерное время. При горизонтальном полете $\tilde{Q} = 0$ [4]. Введем граничные условия для функции $\varphi_1 = \varphi_1(x, t)$:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right]_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)_{x=1} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) \right]_{x=1} = u, \quad (2)$$

где u — управляющая сила в точке $x = 1$. Пусть заданы начальные распределения заданного процесса

$$\varphi_1(x, t) \Big|_{t=t_0} = \omega_0(x), \quad \varphi_2(x, t) \Big|_{t=t_0} = v_0(x) \quad (3)$$

$$t_0 \in T_1, \quad x \in D, \quad \varphi_0(x) \equiv (\omega_0(x), v_0(x))^*$$

Управляемую краевую задачу (1)-(3) исследуем в предположении, что при заданных функциях $\omega_0(x), v_0(x)$, удовлетворяющих необходимым условиям согласования на границе системы, задача (1)-(3) имеет однозначное решение в классе непрерывных по t, x функций, имеющих непрерывные по t, x производные необходимых порядков. В качестве меры $\rho = \rho(\varphi)$, характеризующей отклонение функций $\varphi = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)), \varphi_2(x, t) = \partial \varphi_1(x, t) / \partial t$, от значения $\varphi = 0$ невозмущенного процесса, выберем величину [3]

$$\rho(\varphi) = \int_0^1 [(\partial^2 \varphi_1 / \partial x^2)^2 + (\partial \varphi_1 / \partial x)^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2] dx. \text{ Пусть наперед заданы область}$$

возможных начальных состояний системы (1)-(3) $\Omega_0 = \{\varphi: \rho \leq \tilde{a}_1, \tilde{a}_1 > 0\}$ и область допустимых текущих состояний системы (1)-(3) $\Omega(t) = \{\varphi: \rho \leq \eta(t), 0 < \eta(t) \leq \tilde{\eta}, \tilde{\eta} = \text{const} > 0\}$, где $\tilde{a}_1, \eta(t)$ - заданные число и ограниченная в области $T_1 \subseteq I_1$ функция соответственно, при этом справедливы условия $\tilde{a}_1 \leq \eta(t_0), \Omega_0 \subset \Omega(t_0)$. Используем оптимальное управление, полученное в [4]:

$$u = - \frac{\alpha(x)}{2\omega(x)m(x)} \int_0^1 \sum_{\xi=1}^2 [v_{12}(t, \xi, x) + v_{21}(t, x, \xi)] \varphi_1(\xi, t) d\xi \quad (4)$$

$$u_x = - \frac{1}{2\omega_m(1)} \int_0^1 \sum_{\xi=1}^2 [v_{12}(t, \xi, 1) + v_{21}(t, 1, \xi)] \varphi_1(\xi, t) d\xi \quad (5)$$

Здесь множители при функциях $\varphi_1(\xi, t), \varphi_2(\xi, t)$ являются коэффициентами усиления обратной связи, которые представляют собой функции координат точек продольной оси летательной системы. Смещения разных точек оси системы вносят разный вклад в величину управления в зависимости от того, где расположена эта точка оси [4].

Симметричные функции $v_{ij} = v_{ij}(t, x, \xi)$, входящие в управление (4), (5), должны удовлетворять соответствующей системе нелинейных интегродифференциальных уравнений вида (2.25) работы [4]. Однако отыскание точного решения для этой системы уравнений является проблематичным в силу ее нелинейности и перемешанности коэффициентов. Поэтому при заданных свойствах [4] функций $v_{ij} = v_{ij}(t, x, \xi)$ для решения задачи о технической устойчивости исходного управляемого процесса (1)-(5) применим метод сравнения.

2. Условия технической устойчивости динамических состояний упругой системы при вертикальном полете. Для исследования свойств технической устойчивости рассматриваемого процесса зададим функционал

$$V[\varphi, t] = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)^2 - P \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (6)$$

$$P = \overline{Q}_1 + a_1^n + b_1^n, \quad \overline{Q}_1 = \sup_{x,t} (\overline{Q}), \quad a_1^n = \sup_x (a_1), \quad b_1^n = \sup_x (b_1) \quad (7)$$

При (7) имеем неравенство $V[\varphi, t] \geq (1-P)\rho(\varphi)/3$. Отсюда находим, что функционал $V[\varphi, t]$ (6) положительно определен при условии $0 < 1-P \leq 1$. Исходя из содержания заданного динамического процесса, будем рассматривать случай

$$0 < 1-P < 1 \quad (8)$$

Величина $\mu = 1-P$ имеет смысл малого положительного параметра: $\mu \in (0, 1)$. Условие (8) будет справедливым при выполнении неравенства [3]

$$\ell(Q_0 + \bar{a}\sqrt{gl} + \bar{b}) < G, \quad \forall x \in D, \quad \forall t \in T_1 \quad (9)$$

При (7)–(9) с помощью параметра μ определяем конечный промежуток времени T_1 , на котором, согласно (1), рассматривается динамическое поведение системы: $T_1 = [t_0, N\mu^{-1}]$, $t_0 \geq 0$, $N = \text{const} > 0$ – величина, характеризующая надежность системы. Рассматриваем систему (1)–(5) в заданной области:

$$\bar{\Omega} = \left\{ t, x, \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}, m(x), \bar{Q}(x), P, a_1, b_1, \omega, v_{ij}, EI(x), \frac{\partial(EI)}{\partial x} \right\};$$

$$t \in T_1 \subseteq I_1, x \in D, |\varphi_i| \leq n_i, \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \leq \ell_i, \left| \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right| \leq c_k, \left| \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right| \leq \gamma_j, m_{\min} \leq m(x) \leq m_{\max},$$

$$0 \leq \bar{Q}(x) \leq \bar{Q}_{\max}, \quad 0 \leq P < 1, \quad a_{1\min} \leq a_1 \leq a_{1\max}$$

$$b_{1\min} \leq b_1 \leq b_{1\max}, \quad 0 < \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

$$|v_{ij}| \leq \theta_{ij}, \quad 0 < EI \leq K_1 = \max(EI), \quad \left| \frac{\partial(EI)}{\partial x} \right| \leq K_2;$$

$$c_k, \gamma_j, m_{\min}, m_{\max}, b_{1\min}, b_{1\max}, \bar{Q}_{\max}, \omega_{\min}, \omega_{\max}, K_1, K_2 = \text{const} > 0 \quad i = 1, 2;$$

$$j = 1, 2; k = 1, \dots, 4\}. \text{ Пусть заданы величины } b = \text{const} > 0, \quad y_0 = \text{const} > 0.$$

При условиях

$$0 < y_0 \leq b \quad (10)$$

определим с помощью V (6), (7) множество

$$\tilde{N}_{y_0} = \{ \varphi : V[\varphi, t] \leq y_0, \quad \forall t \in T_1, \quad \forall x \in D \} \quad (11)$$

которое по предположению удовлетворяет условию

$$\Omega_0 \subset \tilde{N}_{y_0} \quad \text{при } t = t_0 \quad (12)$$

Вдоль решений краевой задачи (1)–(5) находим

$$\begin{aligned} \frac{dV[\varphi(x, t), t]}{dt} &= \frac{m(1) + EI(1)}{EI(1)m^2(1)} \varphi_2(t, 1) \frac{1}{\omega_0} \int_0^1 \sum_{i=1}^2 [v_{12}(t, \xi, 1) + v_{21}(t, \xi, 1)] \varphi_i(\xi, t) d\xi + \\ &+ 2 \int_0^1 dx \left[\left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, t)}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial^4 \varphi_1(x, t)}{\partial x^4} - \frac{a_1(x)}{m(x)} \varphi_2(x, t) - \frac{b_1(x)}{m(x)} \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{m(x)} \bar{Q}(x) \right) \varphi_2(x, t) - \right. \end{aligned} \quad (13)$$

$$-\frac{\alpha^2(x)}{2\omega(x)m^2(x)} \varphi_2(x,t) \int_0^z \sum_{i=1}^2 [v_{i2}(t, \xi, x) + v_{2i}(t, x, \xi)] \varphi_1(\xi, t) d\xi \Big|$$

Выражение справа в (13) обозначим $M(t)$. Пусть $M = \text{const} > 0$ — заданная величина. В частности, пусть:

$$|M(t)| \leq M$$

$$M = \frac{m(1) + EI(1)}{EI(1)m^2(1)} n_2 \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^2 [\theta_{1i} + \theta_{2i}] n_i + 2 \left[\left(\frac{1}{m_{\min}} K_2 c_2 + \frac{1}{m_{\min}} K_1 c_1 + c_1 \right) \gamma_1 + \left(c_4 + \frac{a_{1\max}}{m_{\min}} n_2 + \frac{b_{1\max}}{m_{\min}} c_1 + \frac{Q_{\max}}{m_{\min}} \right) n_2 + \frac{1}{2\omega_{\max} m^2} c_2 \sum_{i=1}^2 [\theta_{1i} + \theta_{2i}] n_i \right] \quad (14)$$

Пусть задана функция $\eta(t)$ вида

$$\eta(t) = \frac{\bar{M}}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \left\{ \exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right] \right\} + b \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \quad (15)$$

$\bar{M} = \text{const} > 0, \quad M \leq \bar{M}$

при условиях (10)-(11). Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = M(t) - \frac{\mu}{3(\mu+t)^2} \rho(\varphi(x,t)) \quad (16)$$

Пусть функция $\bar{\Phi}(t)$ (16) удовлетворяет условию

$$|\bar{\Phi}(t)| \leq \Phi(t) \equiv M \frac{1}{(\mu+t)^2} \exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right] \quad (17)$$

где $M = \text{const} > 0$ — заданная величина согласно (14), удовлетворяющая свойству $M \leq \bar{M}$.

Полагая, что при (10) имеют место неравенства

$$\theta^{-1} y_0 \leq b, \quad \theta^{-1} M \leq \bar{M}, \quad \theta \geq 3^{-1}(1-P) \quad (18)$$

Взяв решение исходного процесса (1)-(5) находим неравенство

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq \frac{1}{(\mu+t)^2} V(t) + \left| M(t) - \frac{\mu}{3(\mu+t)^2} \rho(\varphi(x,t)) \right| \quad (19)$$

Из (19) при (17) на решении процесса (1)-(5) имеем $dV(t)/dt \leq 1/(\mu+t)^2 V(t) + \Phi(t)$. В области T_1 существует интеграл

$$O(t) = \int_0^t \Phi(\tau) d\tau. \text{ Рассмотрим функцию } z(t) = V[\varphi(x,t), t] - O(t) \text{ вдоль решений}$$

задачи (1)–(5). Для dV/dt при вышезаданных условиях вдоль решений задачи (1)–(5) имеем $dz(t)/dt \leq (\mu/(\mu+t)^2)z(t) + \sigma(t)$. Отсюда следует задача Коши сравнения вида

$$dy/dt = (1/(\mu+t)^2)[y + \sigma(t)], \quad t \in T_1 \quad (20)$$

$$y(t_0) = y_0 \geq V_0 \equiv V[\varphi_0(x), t_0], \quad t_0 \in T_1, \quad \forall x \in D \quad (21)$$

Задача (20), (21) имеет в области T_1 непрерывное решение

$$y(t) = \frac{M}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \left\{ \exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right] \right\} + \\ + y_0 \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] - \sigma(t) \quad (22)$$

Используя (22), по соответствующей теореме о дифференциальных неравенствах находим [5-7] $z(t) < y(t)$, $t \in T_1$. Тогда вдоль решения задачи (1)–(5) при условиях (8), (9) имеем $V(t) \leq y(t) + \sigma(t)$, $t \in T_1$. Отсюда находим последовательность неравенств

$$V(t) \leq \frac{M}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \left\{ \exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right] \right\} + \\ + y_0 \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right] \leq \eta(t) \\ \eta(t) \leq \frac{\bar{M}}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu+L\mu^{-1}}\right] \left\{ \exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu+N\mu^{-1}}\right] \right\} + \\ + b \exp\left[-\frac{1}{\mu+L\mu^{-1}}\right] \exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]$$

$\eta(t_0) \equiv b$, $V_0 \leq b$, вдоль решения процесса (1)–(5) при (8), (9). Из этих неравенств получаем следующее свойство включения:

$$C_{\Lambda(t)} \subset \Omega(t), \quad C_{\Lambda(t)} = \{\varphi: V[\varphi, t] \leq A(t) \quad \forall t \in T_1, \quad \forall x \in D\}, \quad A(t) \equiv y(t) + \sigma(t) \quad (23)$$

Из полученного соотношения (23) и заданного условия (12) при (8)–(10), (21) и условия (18) следует справедливость неравенства $\rho(\varphi(x, t)) \leq \eta(t)$, $\forall t \in T_1$, $\forall x \in D$, т.е. исходный процесс (1)–(5) при $\varphi_0 \in \Omega_0$, технически устойчив по мере ρ на ограниченном интервале времени T_1 . При условии $t \rightarrow +\infty$ для (15) справедлива мажорация $\theta^{-1}A(t) \leq \eta(t)$. Оценка

$$\eta(t) \leq \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} = \frac{\bar{M}}{2} \left[\exp \left| \frac{2}{\mu + t_0} \right| - 1 \right] + b \exp \left| \frac{1}{\mu + t_0} \right| \quad \text{справедлива при любых}$$

$T_1 \subseteq I_1$. Следовательно, процесс (1)-(5) при $\varphi_0 \in \Omega_0$ технически устойчив на бесконечном интервале времени I_1 по мере ρ .

Рассмотрим функции следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi(x, t), u) &= \frac{m(1) + EI(1)}{EI(1)m^2(1)} \varphi_2(1, t) \frac{1}{\omega_1} \int_0^1 \sum_{i=1}^2 [v_{1,2}(t, \xi, 1) + v_{21}(t, 1, \xi)] \varphi_1(\xi, t) d\xi + \\ &+ 2 \int_0^1 dx \left[\left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, t)}{\partial x^2} \right) \right) \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^4 \varphi_1(x, t)}{\partial x^4} \varphi_2(x, t) \right] \\ \Phi_2(t, \varphi(x, t), u) &= - \left[2 \int_0^1 dx \left[P \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} + \frac{a_1(x)}{m(x)} \varphi_2^2(x, t) + \right. \right. \\ &+ \frac{b_1(x)}{m(x)} \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \varphi_2(x, t) + \frac{1}{m(x)} \bar{Q}(x) \varphi_2(x, t) + \\ &\left. \left. + \frac{\alpha^2(x)}{2\omega(x)m^2(x)} \varphi_2(x, t) \int_0^1 \sum_{i=1}^2 [v_{1,2}(t, \xi, x) + v_{21}(t, x, \xi)] \varphi_1(\xi, t) d\xi \right] \right], \quad \text{предполагая} \end{aligned}$$

их существование в области I_1 . Если на решении процесса (1)-(5)

выполняются условия: а) $\Phi_2(t, \varphi(x, t), u) \leq -2tV[\varphi(x, t), t]$, $t \in T_1 \subseteq I_1$;

б) $|\Phi_1(t, \varphi(x, t), u)| \leq M\bar{\omega}_1(t)$, $t \in T_1 \subseteq I_1$; в) справедливы условия (18), тогда управляемый процесс (1)-(5) асимптотически технически устойчив по мере ρ [1,3,6].

В этом случае имеем

$$\rho[\varphi(x, t)] \leq \eta(t), \quad \forall t \in T_1 \subseteq I_1; \quad \eta(t) = e^{-(t^2 - t_0^2)} \left[b + \bar{M} e^{-t_0^2} \int_0^t e^{\tau^2} \bar{\omega}_1(\tau) d\tau \right]$$

$$M \leq \bar{M}, \quad \bar{M} = \text{const};$$

Полученные условия технической и асимптотической технической устойчивости процесса (1)-(5) нарушаются, если $P \geq 1$, что равносильно неравенству

$$\frac{t}{G} (Q_0 + \bar{a} \sqrt{g t} + \bar{b}) \geq 1, \quad \forall x \in D. \quad \text{Условия технической неустойчивости в } T_1$$

или в I_1 по мере ρ процесса (1)-(5) имеет вид: $A(t) \rightarrow +\infty$ при $t \in T_1$, или $t \in I_1$. В последнем случае [3] критическое значение $Q_{кр}$ приращения поперечной

нагрузки за счет искривления продольной оси системы равна величине

$$Q_{\text{об}} = \frac{G}{l} - \bar{a} \sqrt{g^2 - \bar{b}}. \quad \text{Если справедливо условие}$$

$\Phi_1(t, \varphi(x, t), u_s) \leq -\Phi_2(t, \varphi(x, t), u), \quad \forall t \in I_1$, то управляемый процесс (1)-(9) устойчив по Ляпунову относительно меры ρ . В случае выполнения строгого неравенства исходный процесс будет асимптотически устойчив по Ляпунову относительно меры ρ [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНТИ, 1976. т.3, с. 43 – 124.
2. Байрамов Ф.Д. Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. – Новосибирск: Наука, 1991, с.134 – 139.
3. Матвийчук К.С. Свойства технической устойчивости решений краевой задачи для движущейся в жидкости протяженной стержневой системы. – Прикл.механика, 1996, т.32, № 7, с. 84 – 89
4. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами – М.: Наука, 1977, 480 с.
5. Matviychuk K.S. Technical stability of disconnected control systems with a continual set of initial perturbations // Int. Appl. Mech., 2000. vol. 36, N 11, p. 1142 – 1155.
6. Matviychuk K.S. On technical stability of forced automatic control systems with variable structure // Int. Appl. Mech., 2001, vol. 37, N 3, p. 393 – 406.
7. Szarski J. Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1967, 256 p.

Институт механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины

Поступила в редакцию
10.01.2002