

УДК 62.50

# СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИГРОВАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А., Матевосян А.Г.

Ա.Ա. Գուկասյան Ա.Գ. Մաթևոսյան

Երկօղակ մանիպուլատորի շարժման դեկլավարման ստոխաստիկ խաղային խնդիր

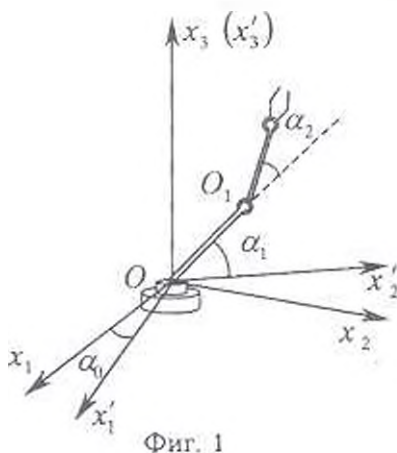
Դիտարկված է մանիպուլատորի ստոխաստիկ շարժման խաղային դեկլավարման խնդիր: Էքստրեմալ նշանառության եղանակով ուսումնասիրված են մանիպուլատորի բոնիչի մեկ և երկու նպատակային բազմությունների հետ մոտեցման խնդիրները: Կառուցված են հիպոթետիկ անհամապատասխանությունները և ստոխաստիկ օպտիմալ ստրատեգիաները:

A. A. Ghukasyan, A. G. Matevosyan

Stochastic game problem of control by a movement of the double link manipulator

Рассматривается игровая задача управления стохастическим движением двухзвенного манипулятора. Методом экстремального прицеливания исследованы задачи сближения схвата манипулятора с одной и с двумя целевыми множествами. Построены гипотетические рассогласования и стохастические оптимальные стратегии.

1. Расчетная модель двухзвенного манипулятора и уравнения движения. Рассматривается двухзвенный антропоморфный манипулятор типичной конструкции [1], состоящий из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг. 1). Предполагается, что рука представляет собой два абсолютно твердых тела (звена), соединенных шарниром  $O_1$ . Первое звено посредством шарнира  $O$  связано с платформой, а на конце второго звена расположен схват с грузом.



Фиг. 1

Шарниры  $O, O_1$  идеальные, цилиндрические. Управление движением манипулятора осуществляется при помощи электромеханических приводов, каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением и редуктор [2]. В данной работе динамика приводов не учитывается.

Для описания движения манипулятора введем две прямоугольные системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $Ox'_1x'_2x'_3$  с общим началом  $O$  и осью вращения плат-

формы  $Ox_3$ . Система координат  $Ox_1x_2x_3$  неподвижная,  $Ox'_1x'_2x'_3$  жестко связана с платформой, координатная плоскость  $Ox'_2x'_3$  совпадает с плоскостью руки манипулятора.

Введем обозначения:  $\alpha_0$  — угол поворота системы координат  $Ox'_1x'_2x'_3$  относительно  $Ox_1x_2x_3$  (угол поворота платформы),  $\alpha_1$  — угол между первым звеном и осью  $Ox'_1$  (угол поворота первого звена руки относительно основания),  $\alpha_2$  — угол между звеньями руки манипулятора,  $L_1 = OO_1$  — длина первого звена,  $L_2 = O_1O_2$  — длина второго звена,  $l_1$  — расстояние от оси шарнира  $O$  до центра масс первого звена,  $l_2$  — расстояние от оси шарнира  $O_1$  до центра масс второго звена.

Кинематику движения манипулятора по вышеуказанным степеням подвижности, принимая схват с грузом как материальную точку, можно определить следующим образом:

$$\bar{R}^i = \bar{f}^i(\bar{\alpha}) \quad \bar{R}^i = F^i(\bar{\alpha})\bar{\alpha} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где  $\bar{R}^1$  — радиус-вектор центра масс первого звена относительно точки  $O$ ;  $\bar{R}^2$  — радиус-вектор центра масс второго звена относительно точки  $O$ ;  $\bar{R}^3$  — радиус-вектор схвата (материальной точки на конце второго звена) относительно точки  $O$ .

$$\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)^T; F^i(\bar{\alpha}) = \left\{ \frac{\partial f^i_j}{\partial \alpha_k} \right\}_{j=1,2,3; k=1,2,3} \text{ — якобиан, который имеет}$$

максимальный ранг.

Кинетическая энергия движения манипулятора имеет вид

$$\begin{aligned} K = \frac{I_0}{2} \dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 M_i (\dot{\bar{R}}^i)^2 = \frac{1}{2} [I_0 + M_1 l_1^2 \cos^2 \alpha_1 + M_2 L_1^2 \cos^2 \alpha + \\ + M_2 l_2^2 \cos^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + 2M_2 L_1 l_2 \cos \alpha_1 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + \\ + M_3 L_1^2 \cos^2 \alpha_1 + M_3 L_2^2 \cos^2 (\alpha_1 + \alpha_2) - 2M_3 L_1 L_2 \cos \alpha_1 \cos (\alpha_1 + \alpha_2)] \dot{\alpha}_0^2 + \\ + \frac{1}{2} [M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2 + M_3 L_2^2 + 2M_2 L_1 l_2 \cos \alpha_1 + M_3 (L_1^2 + L_2^2) + 2M_3 L_1 L_2 \cos \alpha_2] \dot{\alpha}_1^2 + \\ + \frac{1}{2} [M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2] \dot{\alpha}_2^2 + [M_2 L_1 l_2 \cos \alpha_1 + M_3 l_2^2 + M_3 L_1^2 + M_3 L_1 L_2 \cos \alpha_2] \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $I_0$  — момент инерции вращения платформы относительно оси  $Ox_1$ ;

$M_1, M_2$  — массы первого и второго звеньев руки манипулятора.

Потенциальная энергия силы тяжести манипулятора будет

$$\Pi = [M_1 l_1 + L_1 (M_2 + M_3)] g \sin \alpha_1 + (M_1 l_1 + M_2 L_2) g \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (1.3)$$

Движение манипулятора в рамках принятой модели описывается

системой уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} + Q_i \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1.4)$$

Обобщенные силы  $Q_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) состоят из двух слагаемых, первое из которых является движущей силой, а второе — удерживающей. Они могут быть выработаны в системе управления манипулятором с обратной связью с помощью одной или нескольких приводных систем и в сочетании обеспечивают плавное (или мягкое) движение звеньев и схвата манипулятора [3,4]. Для определенности предполагаем, что движущие силы по каждой степени подвижности совершают положительную, а удерживающие — отрицательную работу.

Из (1.2)–(1.4) следует, что уравнения движений манипулятора имеют вид:

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{\alpha}_0 + f_0(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= n_0 u_0 - m_0 v_0 \\ A_{11} \ddot{\alpha}_1 + A_{12} \ddot{\alpha}_2 + f_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= n_1 u_1 - m_1 v_1 \\ A_{21} \ddot{\alpha}_1 + A_{22} \ddot{\alpha}_2 + f_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= n_2 u_2 - m_2 v_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

С целью дальнейшего упрощения движения манипулятора (1.5) предполагаем, что вращение манипулятора в целом относительно оси  $Ox_3$  происходит независимо от остальных движений. При этом уравнения (1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} A_{00} \ddot{\alpha}_0 &= n_0 u_0 - m_0 v_0 \\ A_{11} \ddot{\alpha}_1 + A_{12} \ddot{\alpha}_2 + f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= n_1 u_1 - m_1 v_1 \\ A_{21} \ddot{\alpha}_1 + A_{22} \ddot{\alpha}_2 + f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= n_2 u_2 - m_2 v_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $A_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) — постоянные коэффициенты,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)^T$ ,  $Q_i = n_i u_i - m_i v_i$ ,  $n_i, m_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) — коэффициенты усиления или передаточные силы приводных систем,  $f_{ii}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$  ( $i = 1, 2$ ) — нелинейные члены соответствующих уравнений и имеют вид

$$\begin{aligned} A_{00} &= I_0 + (M_1 l_1^2 + (M_2 + M_3) L_1^2) \cos^2 \alpha_1 + (M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2) \cos^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &\quad + (M_2 L_1 l_2 + M_3 L_1 L_2) 2 \cos \alpha_1 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) = \text{const} \\ A_{11} &= M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2 + L_1^2 (M_2 + M_3) + L_2^2 M_3 \\ A_{12} &= A_{21} = A_{22} = M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2 \\ f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= L_1 (M_2 l_2 + M_3 L_2) [2 \ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 + \ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - 2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2] + \\ &\quad + (M_1 l_1 + (M_2 + M_3) L_1) g \cos \alpha_1 + (M_2 l_2 + M_3 L_2) g \cos (\alpha_1 + \alpha_2) \\ f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= L_1 (M_2 l_2 + M_3 L_2) [\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_2] - (M_2 l_2 + M_3 L_2) g \cos (\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

После перехода к безразмерным переменным

$$\bar{t} = \frac{t}{T_*}; \quad u'_i = \frac{\eta u_i T_*^2}{A_{ii}}; \quad v'_i = \frac{m_i v_i T_*^2}{A_{ii}} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1.8)$$

уравнения (1.7) принимают вид

$$\ddot{\alpha}_0 = u'_0 - v'_0, \quad \ddot{\alpha}_1 + \frac{A_{12}}{A_{11}} \ddot{\alpha}_2 + \frac{f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{A_{11}} = u'_1 - v'_1 \quad (1.9)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{A_{22}} = u'_2 - v'_2$$

В обозначениях (1.8)  $T_*$  — принятое за единицу измерения характерное время рабочей транспортной операции, осуществляемой манипулятором. Углы поворотов платформы, схвата и звеньев руки манипулятора — суть величины порядка единицы  $\alpha_i \sim 1$ , ( $i = 0, 1, 2$ ). Тогда для безразмерных переменных и параметров системы (1.9) выполняются следующие соотношения порядков [5]:

$$u_i \sim 1, v_i \sim 1, \ddot{\alpha}_i \sim 1, \ddot{\alpha}_i \sim 1, \quad (i = 0, 1, 2)$$

Рассматривается случай, когда параметры системы (1.14) удовлетворяют соотношениям:

$$\left| \frac{f_{11}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{A_{11}} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{f_{22}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{A_{22}} \right| \ll 1 \quad (1.10)$$

Соотношения (1.10) имеют место для ряда промышленных и специальных манипуляционных роботов, динамику движения которых можно представить системой квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$A_1 \ddot{\alpha} + \varepsilon f(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = B_1 u' + C_1 v' \quad (1.11)$$

$$\text{где } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)^T, \quad a = 1 - \frac{A_{22}}{A_{11}}, \quad \varepsilon f_0 = 0, \quad \varepsilon f_1 = \frac{A_{22} f_{11} - A_{12} f_{22}}{A_{11} A_{22}} \ll 1$$

$$\varepsilon f_2 = \frac{A_{12} f_{22} - A_{22} f_{11}}{A_{11} A_{22}} \ll 1, \quad b = \frac{A_{12}}{A_{11}}, \quad u' = (u'_0, u'_1, u'_2)^T, \quad v' = (v'_0, v'_1, v'_2)^T \quad (1.12)$$

2. Игровая задача управления движением двухзвеного манипулятора.

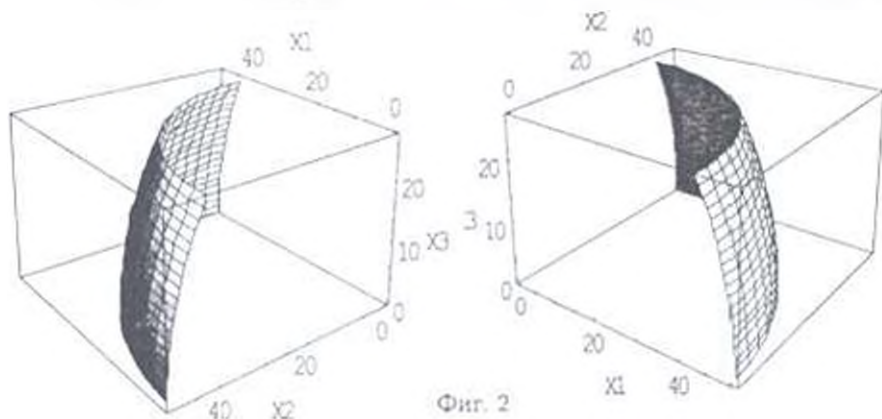
Рассмотрим задачу управления движением двухзвеного манипулятора, описываемого уравнениями (1.10).

Требуется привести схват манипулятора из заданного начального состояния  $(t_0, \alpha_i^0, \dot{\alpha}_i^0)$  в целевое множество  $M$ .

$$M = \{ \alpha : a_1 \alpha_0^2 + a_2 \alpha_1^2 + a_3 \alpha_2^2 \leq d^2 \} \quad (2.1)$$

где  $a_i$  ( $i = 1, 3, 5$ ),  $d$  — постоянные величины.

Так как вращение манипулятора в целом относительно оси  $Ox_3$ , независимо от остальных движений, то целевое множество (2.1) для схвата в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , в частности, имеет следующий вид (фиг. 2):



Фиг. 2

где

$$x = [L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] \sin \alpha_0, \quad L_1 = 100, L_2 = 50$$

$$y = [L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] \cos \alpha_0, \quad 0 < \alpha_0 < \pi/2, \quad 0 < \alpha_1 < \pi/6$$

$$z = L_1 \sin \alpha + L_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha_2^2 = \pi^2 - \alpha_1^2$$

Для исследования поставленной задачи используем линейную модель уравнения движения манипулятора, т.е. ( $\epsilon = 0$ ).

Предположим также, что во время управления движением в передаточных системах манипулятора возникают случайные элементы. Движение такого манипулятора можно описать следующей системой стохастических дифференциальных уравнений [6]:

$$\begin{aligned} d\dot{\alpha}_0 &= u'_0 d\xi - v'_0 d\xi(t, \omega) \\ d\dot{\alpha}_1 &= \frac{u'_1 - v'_1}{1-b} d\xi - \frac{(u'_1 - v'_1)b}{1-b} d\xi(t, \omega) \\ d\dot{\alpha}_2 &= \frac{u'_2 - v'_2}{1-b} d\xi - \frac{(u'_2 - v'_2)}{1-b} d\xi(t, \omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\xi = \xi(t, \omega)$  — случайный процесс, удовлетворяющий условиям теоремы существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения [7].

Введем следующие обозначения:

$$x_1 = \alpha_0, \quad x_2 = \alpha_1, \quad x_3 = \alpha_1, \quad x_4 = \alpha_1, \quad x_5 = \alpha_2, \quad x_6 = \alpha_2 \quad (2.3)$$

$$u_0^* = u_0', u_1^* = \frac{u_1'}{1-b}, u_2^* = \frac{u_2'}{1-b}, v_0^* = v_0', v_1^* = \frac{v_1'}{1-b}, v_2^* = \frac{v_2'}{1-b}$$

Система (2.2) при (2.3) приводится к виду

$$dx = Axdt + Bvd\xi + Cvd\xi \quad (2.4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T, u = (u_0^*, u_1^*, u_2^*)^T, v = (v_0^*, v_1^*, v_2^*)^T.$$

Целевое множество (2.1) в новых переменных примет следующий вид:

$$M = \{x: a_1 x_1^2 + a_2 x_3^2 + a_3 x_5^2 \leq d^2\}$$

Пусть на управляющие силы наложены следующие ограничения:

$$u_0^{*2} + u_1^{*2} + u_2^{*2} \leq \lambda^2, \quad v_0^{*2} + v_1^{*2} + v_2^{*2} \leq \mu^2 \quad (2.6)$$

Рассмотрим дифференциальную игру сближения системы (2.4) с множеством  $M$  в момент времени  $\vartheta$ . Для исследования поставленной задачи составим гипотетическое рассогласование, которое будет стохастическим [8,9]

$$\varepsilon(t, t_0, \vartheta, \omega) = \max_{|t| \leq 1} [I'X[\vartheta, t]x(t) + \min_{P \in M} I'P + \int_{t_0}^{\vartheta} \min_{u_0^*, u_1^*, u_2^* \leq \lambda} IX[\vartheta, \tau]B(\tau)u(\tau, \omega)d\xi(t, \omega) + \int_{\vartheta}^{\vartheta} \min_{v_0^*, v_1^*, v_2^* \leq \mu} IX[\vartheta, \tau]C(\tau)v(\tau, \omega)d\xi(t, \omega)] \quad (2.7)$$

где  $X[\vartheta, \tau]$  — фундаментальная матрица решений однородной части системы (2.4). Предположим, что стохастический процесс можно представить в следующем виде:

$$\xi(t, \omega) = \eta(\omega)\gamma(t) \quad (2.8)$$

где  $\eta(\omega)$  — случайная величина, а  $\gamma(t)$  имеет ограниченную вариацию

$$d\xi(t, \omega) = \eta(\omega)d\gamma(t) = \eta(\omega)\beta(t)dt \quad (2.9)$$

Пусть имеет место регулярный случай [10]. Тогда стратегия первого игрока, обеспечивающая встречу почти наверно всех траекторий системы (2.4) с множеством  $M$  определяется из условия

$$I'X[\vartheta, t]Bu\eta(\omega)\beta(t) = \min_{u_0^*, u_1^*, u_2^* \leq \lambda} I'X[\vartheta, t]Bu\eta(\omega)\beta(t) \quad (2.10)$$

По методу неопределенных множителей Лагранжа можно вычислить



минимум в правой части (2.10). Оптимальные стохастические стратегии первого игрока будут

$$u_0 = -\lambda l_1 / D, \quad u_1 = -\lambda(l_3 - l_5) / D, \quad u_2 = -\lambda(l_5 - bl_3) / D \quad (2.11)$$

а стратегии второго игрока являются

$$v_0 = \mu l_1 / D, \quad v_1 = \mu(l_3 - l_5) / D, \quad v_2 = \mu(l_5 - bl_3) / D \quad (2.12)$$

где  $D = \sqrt{l_1^2 + (l_3 - l_5)^2 + (l_5 - bl_3)^2}$ .

Предположим, что  $\beta(t)$  — линейная функция, то есть  $\beta(t) = mt + n$ . Тогда гипотетическое рассогласование примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_0, \vartheta, \omega) = \max_{|t|=1} & \left[ l_1 x_1^2 + l_1 (\vartheta - t_0) x_2^0 + l_1 x_3^2 + l_3 (\vartheta - t_0) x_4^0 + l_1 x_5^2 + l_5 (\vartheta - t_0) x_6^0 + \right. \\ & \left. + (\mu - \lambda) D \eta(\omega) \left( \frac{(\vartheta m - n)}{2} (\vartheta^2 - t_0^2) - m \frac{\vartheta^3 - t_0^3}{3} + \vartheta n (\vartheta - t_0) \right) - d \sqrt{\frac{l_1^2}{a_1} + \frac{l_3^2}{a_3} + \frac{l_5^2}{a_5}} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для удобства исследований за начальное состояние возьмем начало координат фазового пространства  $x_i^0 = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) и  $a_1 = a_3 = a_5 = 1$ . При этом гипотетическое рассогласование будет

$$\varepsilon(t, t_0, \vartheta, \omega) = \max_{|t|=1} \left[ M_1 \sqrt{1 - 2(1+b)l_3 l_5 + b^2 l_3^2 + l_5^2} - d \right] \quad (2.14)$$

$$\text{где } M_1 = (\mu - \lambda) \eta(\omega) \left( \frac{(\vartheta m - n)}{2} (\vartheta^2 - t_0^2) - m \frac{\vartheta^3 - t_0^3}{3} + \vartheta n (\vartheta - t_0) \right).$$

После этого по методу неопределенных множителей Лагранжа вычислим максимум по  $\bar{l}$  в (2.14). Согласно (1.8) и (1.13) всегда имеет место следующее неравенство  $0 < b < 1$ . Тогда решение задачи условного экстремума имеет следующий вид:

$$l_1 = 0, l_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{(b-1)}{2\sqrt{4+(b-1)^2}}}, l_5 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{(b-1)}{2\sqrt{4+(b-1)^2}}} \quad \text{при } M_1(\omega) < 0 \quad (2.15)$$

$$l_1 = 0, l_3 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{(b-1)}{2\sqrt{4+(b-1)^2}}}, l_5 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{(b-1)}{2\sqrt{4+(b-1)^2}}} \quad \text{при } M_1(\omega) > 0$$

Выбор компонентов вектора  $\bar{l}$  зависит от значения  $M_1(\omega)$ , т.е. является случайной величиной. После этого, подставляя (2.15) в (2.12) и (2.12) в (2.4) и интегрируя, получим соответствующие фазовые траектории, обеспечивающие их встречу с множеством  $M$  почти наверно.

**3. Игровая задача управления при двух целевых множествах.** Рассмотрим задачу управления движением двухзвенного манипулятора, описываемого уравнениями (2.2) в случае двух целевых множеств.

Пусть требуется привести схват манипулятора из заданного начального состояния  $(t_0, \alpha_i^0, \dot{\alpha}_i^0)$  в целевое множество  $M_1$  в момент времени  $\vartheta_1$  и в целевое множество  $M_2$  в момент  $\vartheta_2$  ( $\vartheta_1 < \vartheta_2$ ), где целевыми множествами  $M_1$  и  $M_2$  являются:

$$M_1 = \{\bar{\alpha} : a_1 \alpha_0^2 + a_2 \alpha_0^2 \leq d_1^2\} \quad (3.1)$$

$$M_2 = \{\bar{\alpha} : b_1 \alpha_1^2 + b_2 \alpha_2^2 \leq d_2^2\} \quad (3.2)$$

Введем те же обозначения, что и в (2.3) и пусть система в фазовых координатах описывается системой стохастических дифференциальных уравнений (2.4), а целевые множества (3.1), (3.2) в фазовых переменных примут следующий вид:

$$M_1 = \{\bar{\alpha} : a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 \leq d_1^2\} \quad (3.3)$$

$$M_2 = \{\bar{\alpha} : b_1 x_3^2 + b_2 x_4^2 \leq d_2^2\} \quad (3.4)$$

Для исследования поставленной задачи используем гипотетическое рассогласование, построенное для стохастических систем при  $m$  целевых множествах [8,9]

$$J_k(t_0, x_0, x_1, x_2, \dots, \{\vartheta_k\}, \omega) = \max_{\mu \in \Pi} \left[ \sum_{k=1}^{i-1} l'_k x_k + \sum_{k=1}^{i-1} \min_{p_k \in P_k} l'_k p_k + \sum_{k=1}^m l'_k \bar{X}[\vartheta_k, t, k] + \right. \\ \left. + \int \min_{\mu \in \Pi} \sum_{k=1}^m l'_k \bar{X}[\vartheta_k, \tau] B(\tau) \mu d\xi(\tau, \omega) + \int \max_{\nu \in \Pi} \sum_{k=1}^m l'_k \bar{X}[\vartheta_k, \tau] C(\tau) \nu d\xi(\tau, \omega) + \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^m \min_{p_k \in P_k} l'_k p_k \right] \quad (3.5)$$

Здесь  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  ( $t \in [\vartheta_{i-1}, \vartheta_i]$ ) — начальное положение системы (2.4), а

матрицы  $\bar{X}[t, \tau]$  и  $\bar{X}[\tau, \tau]$  определяются следующим образом:

$$\bar{X}[t, \tau] = \begin{cases} X[t, \tau] & t \geq \tau, \\ E & t \leq \tau; \end{cases} \quad \bar{X}[\tau, \tau] = \begin{cases} X[t, \tau] & t > \tau, \\ 0 & t \leq \tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $X[\vartheta, \tau]$  — фундаментальная матрица решений однородной части системы (2.4),  $d\xi(t, \omega) = \eta(\omega) dt \gamma(t) = \eta(\omega) \beta(t) dt$  (2.8), (2.9).

Стратегия первого игрока в регулярном случае, обеспечивающая встречу почти наверно всех траекторий системы (2.4) со всеми целевыми множествами определяется из следующего условия:

$$\sum_{k=1}^m l'_k \bar{X}[\vartheta_k, t] \beta(t) \mu_0 \eta(\omega) \beta(t) = \min_{\mu \in \Pi} \sum_{k=1}^m l'_k \bar{X}[\vartheta_k, t] B(t) \mu \eta(\omega) \beta(t) \quad (3.7)$$

Гипотетическое рассогласование для системы (2.4) и при двух целевых множествах (3.3), (3.4) примет следующий вид:



$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(t_*, x_*, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}, \omega) = & \\
= \max_{|l| \leq 1} & \left[ l_1^{(1)} x_1^* + (l_1^{(1)}(\vartheta_1 - t_*) + l_2^{(1)}) x_2^* + l_3^{(2)} x_3^* + l_4^{(2)}(\vartheta_2 - t_*) x_4^* + l_5^{(2)} x_5^* + l_6^{(2)}(\vartheta_2 - t_*) x_6^* + \right. \\
+ \min_{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 \leq \mu^2} & \left[ \int_{t_*}^{\vartheta_1} [(l_1^{(1)}(\vartheta_1 - \tau) + l_2^{(1)}) u_0 + (l_3^{(2)} - l_5^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) u_1 + (l_5^{(2)} - b l_3^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) u_2] \times \right. \\
\times \eta(\omega) \beta(\tau) d\tau - & \left. \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [(l_3^{(2)} - l_5^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) u_1 + (l_5^{(2)} - b l_3^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) u_2] \eta(\omega) \beta(\tau) d\tau \right] + \\
+ \max_{v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 \leq \mu^2} & \left[ \int_{t_*}^{\vartheta_1} [(l_1^{(1)}(\vartheta_1 - \tau) + l_2^{(1)}) v_0 + (l_3^{(2)} - l_5^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) v_1 + (l_5^{(2)} - b l_3^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) v_2] \times \right. \\
\times \eta(\omega) \beta(\tau) d\tau + & \left. \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [(l_3^{(2)} - l_5^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) v_1 + (l_5^{(2)} - b l_3^{(2)})(\vartheta_2 - \tau) v_2] \eta(\omega) \beta(\tau) d\tau \right] - \\
- d_1 \sqrt{\frac{(l_1^{(1)})^2}{a_1} + \frac{(l_2^{(1)})^2}{a_2}} - & d_2 \sqrt{\frac{(l_3^{(2)})^2}{b_1} + \frac{(l_5^{(2)})^2}{b_2}} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где  $(t_*, x_*)$  — начальное положение системы (2.4) и  $t_* \in [t_0, \vartheta_1]$ .

Оптимальными стратегиями первого игрока будут

$$\begin{aligned}
u_0 = - & \frac{\lambda(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})}{\sqrt{(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})^2 + ((l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2 + ((l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2}} \\
\text{при } t_* \leq t < \vartheta_1 & \\
u_0 = 0 & \text{ при } \vartheta_1 \leq t < \vartheta_2 \\
u_1 = - & \frac{\lambda(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t)}{\sqrt{(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})^2 + ((l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2 + ((l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2}} \quad (3.9) \\
\text{при } t_* \leq t < \vartheta_1 & \\
u_1 = - & \frac{\lambda(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})}{\sqrt{(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})^2 + (l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})^2}} \quad \text{при } \vartheta_1 \leq t < \vartheta_2 \\
u_2 = - & \frac{\lambda(l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t)}{\sqrt{(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})^2 + ((l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2 + ((l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2}} \\
\text{при } t_* \leq t < \vartheta_1 & \\
u_2 = - & \frac{\lambda(l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})}{\sqrt{(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})^2 + (l_{50}^{(2)} - b l_{30}^{(2)})^2}} \quad \text{при } \vartheta_1 \leq t < \vartheta_2
\end{aligned}$$

а стратегиями второго игрока являются

$$v_0 = \frac{\mu(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})}{\sqrt{(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})^2 + ((l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2 + ((l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2}}$$

при  $t_* \leq t < \vartheta_1$

$v_0 = 0$  при  $\vartheta_1 \leq t < \vartheta_2$

$$v_1 = \frac{\mu(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t)}{\sqrt{(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})^2 + ((l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2 + ((l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2}}$$

при  $t_* \leq t < \vartheta_1$

$$v_1 = \frac{\mu(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})}{\sqrt{(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})^2 + (l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})^2}} \quad \text{при } \vartheta_1 \leq t < \vartheta_2 \quad (3.10)$$

$$v_2 = \frac{\mu(l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t)}{\sqrt{(l_{10}^{(1)}(\vartheta_1 - t) + l_{20}^{(1)})^2 + ((l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2 + ((l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})(\vartheta_2 - t))^2}}$$

при  $t_* \leq t < \vartheta_1$

$$v_2 = \frac{\mu(l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})}{\sqrt{(l_{30}^{(2)} - l_{50}^{(2)})^2 + (l_{50}^{(2)} - bl_{30}^{(2)})^2}} \quad \text{при } \vartheta_1 \leq t < \vartheta_2$$

где  $l_0 = (l_{10}^{(1)}, l_{20}^{(1)}, l_{30}^{(2)}, l_{50}^{(2)})$  — максимизирующий вектор из (3.8).

При конкретных значениях параметров манипулятора и при заданной функции распределения стохастического процесса можно вычислить экстремальный вектор прицеливания  $\bar{l}_0$  из (3.8). Компоненты определяемого вектора прицеливания  $\bar{l}_0$  при выборе стохастического процесса в виде (2.8) будут зависеть от  $\omega$  неявным образом. Отсюда и из вида гипотетического рассогласования (3.8) заключаем, что при разных значениях  $\omega \in \Omega$ , области достижимости будут подобными. После чего, подставляя (3.9) и (3.10) в (2.4) и интегрируя, получим соответствующие фазовые траектории, обеспечивающие их встречу с множествами  $M_1$  и  $M_2$ . При заданной функции распределения для стохастического процесса  $\xi(t, \omega)$  можно вычислить также математическое ожидание, дисперсию гипотетического рассогласования (3.8). Оптимальные стратегии (2.11), (2.12), (3.9), (3.10), которые были определены для управления линейной моделью манипулятора, можно использовать при управлении нелинейной моделью, применяя метод компенсации с помощью дополнительного регулятора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы. Справочник. М.: Машиностроение, 1983. 425с.
2. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979. 480с.
3. Гукасян А.А., Степанян В.К. Игровые задачи для управления схватом манипулятора //Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т.53. №4. С. 63-72.
4. Гукасян А.А., Симонян Т.А. Об игровом подходе управления движением двухзвенного манипулятора. // Ученые записки. 2001. №3. С. 49-56.
5. Черноусько Ф.А., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 365 с.
6. Справочник по теории автоматического управления./ Под редакцией А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 330с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 350с.
8. Матевосян А.Г. Дифференциальная игра сближения с  $m$  целевыми множествами для стохастических линейных систем. //Ученые записки. 2001. №3. С. 31-34.
9. Габриелян М.С., Матевосян А.Г. Минимаксное прицеливание в собственно-линейной стохастической системе при  $m$  целевых множествах. //Ученые записки. 2002. №2. С. 146-149.
10. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455с.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15.07.2002