

УДК 539.1

К РАСЧЕТУ УДАРНЫХ ВОЛН В ДИФРАКЦИОННЫХ
ЗАДАЧАХ ГАЗОДИНАМИКИ И НЕЛИНЕЙНОЙ
ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Сафарян Ю.С.

Ա.Գ. Բագդոև, Գ.Մ. Մաշուրյան, Յու.Ս. Սաֆարյան

Հարվածային ալիքների հաշվարկման փազադինամիկայի և ոչ գծային դինամիկ
առանձգական տեսության դիֆրակցիայի խնդիրներում

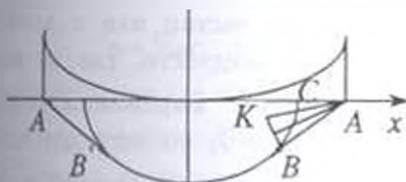
Պատրվում են հարվածային ալիքների հաշվարկման խնդիրները տարածվող և կետային ալիքների
լուծման կետի շրջակայքում հեղուկ և առանձգական ոչ գծային միջավայրերի համար: Հաշված է լուծումը
այն դեպքի համար, երբ նշված ալիքները հարվածային են, երբ նրանք անընդհատ են և տեղի ունի
կտրված հարվածային ալիքը:

A. G. Bagdoyev, G. M. Mashuryan, Ju. S. Safaryan

Calculation of shock waves in diffraction problems of gasodynamics and nonlinear dynamical elasticity

Рассматриваются задачи расчета ударных волн в окрестности точки касания распространяющейся волны и точечной волны для жидкой и упругой нелинейной среды. Сначала рассмотрен случай когда распространяющиеся и точечные волны являются ударными. Получено нелинейное решение и рассчитана точечная ударная волна. Затем рассмотрен случай, когда распространяющиеся и точечные волны непрерывны и имеется плоская ударная волна. Получено нелинейное решение позади и впереди этой волны и рассчитано решение на ней.

Рассматривается задача определения нелинейного решения в окрестности точки B касания распространяющейся волны AB с точечной волной BB' . Эта задача возникает при распространении давления в глубь сжимаемой жидкости или упругого полупространства. В этих задачах предполагается, что скорость фронта давления по поверхности постоянна и больше скорости звука для жидкости, или скорости продольной волны теории упругости. Картина волн дается на фиг. 1.



Фиг. 1

Как показано в работах [1], [2] и [3], для случая жидкой, упругой и электромагнитной волн в безразмерных переменных задача приводится к системе уравнений

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta} (\mu - \delta) + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \delta} \quad (1)$$

где μ и v есть безразмерные радиальные и трансверсальные компоненты скорости частиц для жидкой и упругой сред, δ и y есть радиальные и угловые координаты относительно точечной волны BB' .

Линейное решение в окрестности точки B имеет вид [1], [2], [3].

$$\mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\delta}}{y} \quad (2)$$

$$v = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{tg}(\mu\pi) - \mu \right) y \quad (3)$$

Соотношение (3) получено из линейного решения $v(\delta, y)$ исключением δ из (2) и предположено верным и в нелинейной задаче. Подставив (3) в (1) и интегрируя, можно найти нелинейное решение вблизи B [1]-[3]

$$\delta = -\frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg}^2(\mu\pi) + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin(2\mu\pi) + B \sin^2(\mu\pi) \quad (4)$$

и [3]. Постоянная B находится из сращивания (3), (4) с одномерным решением нелинейной задачи, причем [4] B равно 0. Как для жидкой, так и для упругой среды для малых значений параметра возмущения

$\gamma = \frac{p_1}{\rho_0 a_0^2}$, где p_1 — максимальное давление на поверхности, ρ_0 —

плотность, a_0 — скорость продольных жидких или упругих волн, можно получить формулу для нормальной скорости волны

$$c_n = a_0 + \Gamma \cdot u \quad (5)$$

где u есть возмущенная нормальная скорость частиц или в данном случае радиальная скорость, $\Gamma = (n+1)/2$ для жидкости, где n есть показатель адиабаты, для упругой среды $\Gamma < 0$ выражается через нелинейные упругие модули [2,4]. В случае $\gamma\Gamma > 0$, то есть для волн сжатия $\gamma > 0$ в жидкой среде или волн разрежения $\gamma < 0$ в упругой среде имеет место ударная волна ABB' , а в случае $\gamma\Gamma < 0$ имеет место непрерывная волна ABB' разрежения в жидкости или сжатия в упругой среде, и имеется виская ударная волна BC на фиг. 1. В случае $\gamma\Gamma > 0$ уравнение ударной волны ABB' [1-3] имеет вид

$$\frac{d\delta}{dy} = -\sqrt{2\delta - \mu} \quad (6)$$

причем на ударной волне должно быть

$$\chi = 0, \quad \chi = v - \mu \sqrt{2\delta - \mu} \quad (7)$$

которое выражает равенство нулю касательной к волне скорости частицы в жидкой и упругой среде.

Подставляя (3) и (4) в (6) и (7), получим уравнение на ударной волне BB'

$$\frac{du}{dy} = \frac{y \operatorname{tg}^2(\mu\pi) - \sqrt{-y^2 \operatorname{tg}^2(\mu\pi) + \mu + \sin(2\mu\pi)/\pi + 2B \sin^2(\mu\pi)}}{-y^2 \pi \operatorname{tg}(\mu\pi) \cos^{-2}(\mu\pi) + 1 + \cos(2\mu\pi) + B\pi \sin(2\mu\pi)} \quad (8)$$

где $B = 0$, которое следует решать при граничном условии в B $y = -1$, $\mu = 1$, получаемым решением уравнения ударной волны AB $\delta = (1 - y^2)/2$ [1-3] и уравнения BC $\delta = \mu$, $\mu = 1$. Кроме того, следует проверить малость χ , где по (7), (3), (4)

$$\chi = (\operatorname{tg}(\mu\pi)/\pi - \mu)y - \mu \sqrt{-y^2 \operatorname{tg}^2(\mu\pi) + \mu - \sin(2\mu\pi)/\pi + 2B \sin^2(\mu\pi)} \quad (9)$$

Численный расчет уравнения (8) с шагом $\Delta y = 0.01$ приведен на фиг. 2, где даны графики функций $\mu(y)$ и $\chi(y)$. Как видно, функция $\chi(y)$ мала всюду. Как для жидкой, так и для упругой среды, обозначим через γ значение нормальной к волне скорости частиц на волне AB и введем безразмерный коэффициент $\gamma = a^u / c_0$. Пусть нормальная скорость элементарной волны имеет вид $c_n = c_0 + \Gamma u$, причем для жидкости $\Gamma > 0$ [4], а для упругой среды $\Gamma < 0$ [2]. В случае $\Gamma < 0$, $\gamma > 0$ или $\Gamma > 0$, $\gamma < 0$ имеется всячая ударная волна BC , причем получается $\bar{\Gamma} = -\Gamma$ или $\bar{\gamma} = -\gamma$, так что в обоих случаях $\bar{\Gamma}\gamma > 0$ или $\bar{\Gamma}\bar{\gamma} > 0$ и положено $u = -\gamma\mu a_0$

$$v = -\gamma \sqrt{\bar{\Gamma}\gamma} v', \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\bar{\Gamma}\gamma} y, \quad r - a_0 t = \bar{\Gamma}\gamma t \delta a_0 \quad (10)$$

или

$$u = \bar{\gamma}\mu a_0, \quad v = \bar{\gamma} \sqrt{\bar{\Gamma}\bar{\gamma}} v' a_0, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\bar{\Gamma}\bar{\gamma}} y, \quad r - a_0 t = \bar{\Gamma}\bar{\gamma} t \delta a_0 \quad (11)$$

соответственно для случаев $\Gamma < 0$, $\gamma > 0$ или $\Gamma > 0$, $\gamma < 0$.

Позади точечной волны с BB' решение имеет вид (3), (4), а впереди BC имеет место центрированная волна ABK , на каждой из характеристик которой $\mu_1 = \text{const}$ и решение

$$\mu_1 = \delta - \frac{1}{2} y^2, \quad v_1 = -\mu_1 y \quad (12)$$

Уравнение всячей ударной волны BC [1] - [3]

$$\frac{d\delta}{dy} = \pm \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} \quad (13)$$

что после подстановки в него (4) дает

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y \operatorname{tg}^2(\mu\pi) \pm \sqrt{-y^2 \operatorname{tg}^2(\mu\pi)/2 + \sin(2\mu\pi)2\pi + B \sin^2(\mu\pi) + y^2/2}}{-\pi y^2 \operatorname{tg}(\mu\pi) \cos^{-2}(\mu\pi) + 1 + \cos(2\mu\pi) + B\pi \sin(2\mu\pi)} \quad (14)$$

Безразмерная касательная составляющая скорости частиц к BC непрерывна, т. е.

$$k = 0, \quad k = v - v_1 \pm \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} (\mu - \mu_1) \quad (15)$$

Рассмотрим решение вблизи точки B , в основном порядке

$$\delta = 2\mu, \quad v = -\mu^3 \pi^2 / 3, \quad \mu_1 = 2\mu - y^2 / 2 \quad (16)$$

$$\mu = cy^2, \quad c = -5/32, \quad v_1 = -y^3(2c - 1/8)$$

считаем, что на BC $\mu < 0$, $\delta < 0$. Тогда знак приращения Δy будет \pm . При этом

$k = y^3 \left(2c - \frac{1}{2} \right) \pm \left(-c + \frac{1}{2} \right) y^2 |y| \sqrt{\frac{1}{2} + c}$ вблизи B . На начальном участке BC $\Delta y = y$. Пусть там $y > 0$, тогда в силу (1) в k будет нижний знак. При этом около B будет $k = -y^3 1,2$, то есть k мала. Тот же вывод будет при $y < 0$, когда берется верхний знак.

Уравнение (14) следует решать при условиях $y = 0$, $\mu = 0$. Возможны следующие варианты: а) около B $\Delta y > 0$ и в (14) берется нижний знак, для некоторого $y = y_1$, где y_1 мало, радикал в (14) обращается в нуль и далее следует при $y < y_1$ брать $\Delta y < 0$ и верхний знак в (6); б) около B $\Delta y < 0$ и в (14) берется верхний знак, для некоторого $y = y_2$ радикал в (14) обращается в нуль и далее следует брать $\Delta y > 0$ и нижний знак в (14).

Кроме того, следует согласно (15) считать

$$k = y \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{tg}(\mu\pi) - \mu \right) + y \left(-\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\mu\pi) y^2 + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin(2\mu\pi) \right) \pm \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\mu\pi) y^2 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\mu\pi) \right) \sqrt{\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\mu\pi) y^2 + \frac{1}{2\pi} \sin(2\mu\pi)} \quad (17)$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 3 для варианта а). При этом, кроме малой окрестности точки $\mu = -0.13$, $y = 0$, получают лучшие значения решения с точки зрения удовлетворения условия $k=0$ на BC в случае $B = 0$. Поскольку при некотором $\mu = -0.13$, $y(\mu_3) = 1.1$, $\mu_1 = -1$, далее следует считать ударную волну BC , учитывая, что впереди BC

имеется постоянное течение $\mu_1 = -1$, $v_1 = y$: Тогда уравнение на ударной волне BC будет

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y \operatorname{tg}^2 \mu \pi \pm \zeta'}{-\pi \operatorname{tg} \mu \pi y^2 \cos^{-2} \mu \pi + 1 + \cos 2\mu \pi + B \pi \sin 2\mu \pi} \quad (18)$$

$$\zeta' = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 \mu \pi y^2 + \mu + \frac{1}{\pi} \sin 2\mu \pi + 1 + 2B \sin^2 \mu \pi}$$

которое решается при указанном условии $y(\mu_3) = y_3$ для $\mu < \mu_3$.

Кроме того, следует для $\mu < \mu_3$ рассчитать функцию

$$K = \frac{y}{\pi} \operatorname{tg} \mu \pi - \mu y - y \pm \zeta'(\mu + 1) \quad (19)$$

где в (18) и (19) берется верхний знак. Полный расчет кривых $y(\mu)$, $K(\mu)$ дан на фиг. 3. При этом, как видно из фиг. 3, условие $K = 0$ удовлетворяется на BC почти всюду и в случае а) лучше, чем в случае б). Поэтому в качестве окончательного решения на ударной волне BC берем случай а) и фиг. 3. Вдали от точки B для больших $|y|$ имеет место

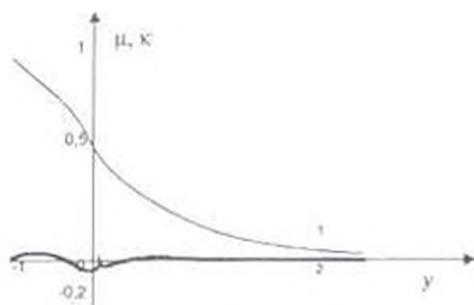
одномерное по δ решение, причем на ударной волне BC $\frac{d\delta}{dy} = 0$.

$2\delta - \mu - \mu_1 = 0$, впереди BC берем вместо (12) постоянное течение $\mu_1 = -1$ и имеет место на BC

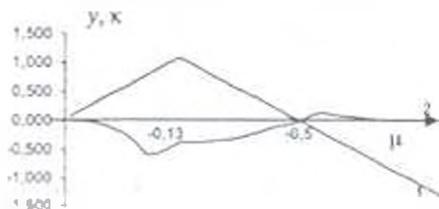
$$\mu = -1 + \frac{3}{\pi^2 y^2}, \quad \delta = -1 + \frac{3}{2\pi^2 y^2} \quad (20)$$

Таким образом, получено решение на висячей ударной волне BC , удовлетворяющее, как это принято в теории коротких волн в газодинамике [1], [7], условию непрерывности касательной к BC составляющей скорости частицы приближенно, интегрально. Это решение описывает ударную волну сжатия ($\gamma > 0$) для упругой среды ($\Gamma < 0$) или разрежения ($\gamma < 0$) для жидкой среды ($\Gamma > 0$).

Следует отметить, что график $y(\mu)$ на фиг. 3 согласуется качественно с экспериментальной кривой работы [8], относящейся к аналогичной по систематической постановке задачи обтекания установившимся сверхзвуковым потоком газа верха треугольного крыла.



Фиг. 2. (1- $\mu(y)$, 2- $\kappa(y)$)



Фиг. 3. (1- $y(\mu)$, 2- $\kappa(\mu)$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1968. Т. 21. №10. С. 39-56.
2. Сафарян Ю.С. Решение нелинейной дифракционной задачи для неоднородной упругой среды // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55, №1. С. 23-31.
3. Bagdoyev A.G., Sahakyan S.G. "Solution of non-linear diffraction problem for inhomogeneous electrodynamic media. // Information technologies and management. 2001. №2. P. 10-16.
4. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. 520 с.
5. Zahalak G. J., Myers M. K. Conical flow near singular rays. // Journ. Fluid Mechanics. 1974. Vol 64. №3. P. 537-561.
6. Багдоев А.Г., Даноян З.Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке // Журнал вычис. матем. и математ. физики. 1972. Т. 12. №6. С.1512-1529.
7. Рыжов О.С., Христианович С.А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. 1958. Т.22. №5. С.586-599.
8. Булах Б.Н. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука. 1970. 343с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.03.2003