

УДК 534.1: 539.1

О ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ БАЛКИ
С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Габриелян М.С., Мовсисян А.А.

ՄՍ Գաբրիելյան, Ա.Ա. Մովսիսյան

Հեծանի շարժման ուղադրումով ստարիիկացման և դեկավարման մասին

Առավելակա՛ն հեծանի օրինակի վրա ուսումնասիրվում են համակարգի շարժման ստարիիկացիայի և դեկավարման խնդիրները, երբ ժամանակի տվյալ մոմենտին ազդող դեկավարումը օրեկտին է հասնում որոշ ուղադրումով, ըստ որում, վերջինս միշտ մնում է հաստատուն: Երկու խնդիրների համար էլ որպես մինիմալագույն ֆունկցիոնալներ ընդունվում են դասական դեպքերը:

Դիսարկված օրինակում ցույց է տրված սարքերի դրվագների տարբերությունը:

M.S. Gabrielyan, L.A. Movsisyan

On Stabilization and Control With Lagging of Motion of Beam

На примере упругой балки исследуются задачи стабилизации и управления движением системы, когда внешнее воздействие до объекта доходит с некоторым опозданием, при этом оно не меняется со временем. В качестве минимизируемых функционалов берутся обычные классические случаи. На примере системы с одной степенью свободы показано различные выражений управляющих сил при различных постановках задачи.

Обычно стабилизация и управление движением осуществляется с самого начала движения [1]. Аналогичным образом поступают и для подобных задач для упругих систем [2,3 и др.]. Однако, как следует из характера подобных задач, с момента времени наблюдения движением и до того как реакция дойдет до объекта, необходимо некоторое время, т.е. „сигнал“ доходит с некоторым запаздыванием. В настоящей статье управление и стабилизация рассматриваются с этой точки зрения. Следует отметить, что существуют различные постановки задач управления и стабилизации с запаздыванием. Настоящая постановка, наверное, самая простая, когда запаздывание входит только в управляющее воздействие, причем оно одинаковое для всех моментов времени. По существу, управлять или стабилизировать систему, начиная с какого-то момента времени, или условие, при котором действующая сила доходит до объекта с запаздыванием, имеют одинаковый эффект. Возможно, в плане математики нового здесь немного. А разве это так важно? Думается, что с точки зрения практики роль такой постановки бессомненна. Для конкретности изложение проводится для упругой балки.

1. Уравнение движения балки запишем в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t - t_1) \quad (1.1)$$

с соответствующими краевыми и начальными условиями

$$w|_{x=0} = a(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = b(x) \quad (1.2)$$

Предполагается, что время запаздывания t_1 одинаковое для всех моментов и входит в выражение действующей нагрузки (1.1), при этом $F(x, t - t_1) = 0$ при $t < t_1$.

Перейдем к безразмерным величинам:

$$u = \frac{w}{\sqrt{S}}, \quad y = \frac{x}{l}, \quad \tau = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{t}{l}, \quad \Phi = \frac{F}{E\sqrt{S}} \quad (1.3)$$

тогда (1.1) превратится

$$l^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \Phi(y, \tau - \tau_1) \quad (1.4)$$

Здесь $l = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{I}{S}}$ — гибкость стержня $\tau_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{t_1}{l}$ — площадь

поперечного сечения, l — длина стержня.

Если искать решение (1.4) в виде

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) X_m(y)$$

где $X_m(y)$ — собственные функции, удовлетворяющие соответственным краевым условиям, то для $f_m(\tau)$ получим

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 f_m = \varphi_m(\tau - \tau_1) \quad (1.6)$$

Здесь $\omega_m = i\lambda_m^2$ — собственные частоты, λ_m — соответствующие собственные значения для заданных краевых условий,

$$\varphi_m = \frac{1}{Q_m} \int_0^1 \Phi(y, \tau - \tau_1) X_m(y) dy, \quad Q_m = \int_0^1 X_m^2(y) dy \quad (1.7)$$

Начальными условиями для (1.6) по (1.2) будут

$$f_m(0) = a_m, \quad \dot{f}_m(0) = b_m \quad (1.8)$$

В дальнейшем, если нет необходимости подчеркивать номер гармоники и если не создается путаница, для краткости индекс m опустим.

2. Сначала рассмотрим задачу стабилизации. Систему (1.6) в отдельности изучим для $\tau \leq \tau_1$ и $\tau > \tau_1$. Итак, для $\tau \leq \tau_1$

$$f = a \cos \omega \tau + \frac{b}{\omega} \sin \omega \tau \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \omega^2 f = \Psi(\xi), \quad \xi = \tau - \tau_1, \quad \Psi(\xi) = \varphi(\tau - \tau_1) \quad (2.2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} f(0) &= \bar{a} = a \cos \omega \tau_1 + \frac{b}{\omega} \sin \omega \tau_1 \\ \dot{f}(0) &= \bar{b} = -a \omega \sin \omega \tau_1 + b \cos \omega \tau_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Постановка задачи и условие оптимальности обычные [4], т.е. стабилизировать движение (2.2), (2.3) при минимуме функционала

$$I^{(0)} = \int_0^1 \int_0^1 [\mathfrak{E} + \Psi^2(y, \xi)] d\xi dy \quad (2.4)$$

Под \mathfrak{E} понимается безразмерная полная энергия,

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \left[\left(i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 \right] \quad (2.5)$$

На основании (1.5) минимум (2.4) равносильно минимуму каждой гармоники, т.е.

$$I_m^{(0)} = \int_0^1 \left[\gamma_m f_m^2 + \frac{1}{2} (\dot{f}_m)^2 + \Psi_m^2(\xi) \right] d\xi \quad (2.6)$$

$$\gamma_m = \frac{1}{2} \int_0^1 [X_m^*(y)]^2 dy / \int_0^1 X_m^2(y) dy$$

Искомый Ψ ищется в виде

$$\Psi = A_{11} f^2 + 2A_{12} f \dot{f} + A_{22} \dot{f}^2 \quad (2.7)$$

с условиями $A_{11} > 0$, $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$. Уравнение Ляпунова-Беллмана будет [4]

$$(A_{11} f + A_{12} \dot{f}) \dot{f} + (A_{12} f + A_{22} \dot{f}) (\Psi - \omega^2 f) + \frac{1}{2} \left(\gamma f^2 + \frac{1}{2} \dot{f}^2 + \Psi^2 \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\Psi + (A_{12} f + A_{22} \dot{f}) = 0$$

Подставляя последнее в первое уравнение и требуя, чтобы в полученной квадратичной форме коэффициенты были нулями, получим

$$\begin{aligned} A_{11} &= \Omega \sqrt{\Omega - \gamma}, \quad A_{12} = \Omega - \omega^2 \\ A_{22} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \Omega - \omega^2}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^4 + \gamma} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Легко видеть, что условия $A_{11} > 0$ и $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$ выполняются.

следовательно, $\psi > 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} < 0$ и стабилизирующая функция будет

$$\psi = -A_{12}f - A_{22}\dot{f} \quad (2.10)$$

коэффициенты которой определяются выражениями по (2.9), при этом

$$f = \exp(-p_1\xi)(c_1 \sin p_2\xi + c_2 \cos p_2\xi)$$

$$\dot{f} = \exp(-p_1\xi)[(p_2c_1 - p_1c_2)\cos p_2\xi - (c_1p_1 + c_2p_2)\sin p_2\xi] \quad (2.11)$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}A_{22}, \quad p_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3\Omega + \omega^2 - \frac{1}{2}}$$

Постоянные c_i согласно (2.3) определяются

$$c_1 = \frac{\bar{b} + \bar{a}p_1}{p_2}, \quad c_2 = \bar{a} \quad (2.12)$$

Искомая оптимальная функция получится из (2.10) заменой на $\tau - \tau_1$, а

$$\Phi(y, \tau - \tau_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\tau - \tau_1) X_m(y) \quad (2.13)$$

3. Задача оптимального управления также ставится обычным образом. Решение системы (1.6), удовлетворяющее начальным условиям (1.8), будет

$$f = a \cos \omega\tau + \frac{b}{\omega} \sin \omega\tau + \frac{1}{\omega} \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\vartheta - \tau_1) \sin \omega(\tau - \vartheta) d\vartheta \quad (3.1)$$

Требуется, чтобы в определенный момент времени $\tau = T$ прогиб и скорость балки принимали определенные значения

$$u(y, T) = u_1(y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X_m(y)$$

$$\frac{\partial u(y, T)}{\partial \tau} = u_2(y) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m X_m(y) \quad (3.2)$$

при этом, минимизируя некоторый функционал. Согласно (1.5), (3.1) и (3.2) имеем

$$Z_1 = Y_1 \sin \omega T_1 + Y_2 \cos \omega T_1$$

$$Z_2 = Y_2 \sin \omega T_1 - Y_1 \cos \omega T_1 \quad (3.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$Z_1 = \int_0^1 \psi(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad Z_2 = \int_0^1 \psi(\xi) \sin \omega \xi d\xi, \quad T_1 = T - \tau_1 \quad (3.4)$$

$$Y_i = \omega \left(c - a \cos \omega\tau - \frac{b}{\omega} \sin \omega\tau \right)$$

$$Y_2 = d + a\omega \sin \omega\tau - b \cos \omega\tau$$

В качестве минимизируемых функционалов будем изучать два случая. Если критерий качества брать

$$I^{(2)}(y, \tau) = \int_0^T \int_{\tau_1}^T \Phi^2(\tau - \tau_1) dt d\tau \quad (3.5)$$

то в конечном счете он сводится к минимуму

$$I_m^{(2)} = \int_0^T \Psi_m^2(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

и поставленная задача сводится к нахождению минимума (3.6) при условиях (3.4). Такую задачу можно решать как типичную изопериметрическую задачу (такой способ будет применен в следующем пункте). Однако для общности она будет изучена при помощи проблемы моментов [4], тем более, что при другом критерии качества, который будет использован ниже, только таким способом можно добиться результата.

Решение поставленной задачи ищется обычным способом [5] и оно есть

$$\Psi(\xi) = \mu_1 \cos \omega\xi + \mu_2 \sin \omega\xi \quad (3.7)$$

$$\mu_1 = \frac{Z_1 B_{22} - Z_2 B_{12}}{\Delta}, \quad \mu_2 = \frac{Z_2 B_{11} - Z_1 B_{21}}{\Delta}$$

$$B_{11} = \frac{1}{2} T_1 - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega\tau_1, \quad B_{21} = \frac{1}{2\omega} \sin^2 \omega\tau_1$$

$$B_{22} = \frac{1}{2} T_1 + \frac{1}{2\omega} \sin^2 \omega T_1$$

$$\Delta = B_{11} Z_2^2 - 2B_{12} Z_1 Z_2 + B_{22} Z_1^2$$

Искомая управляющая нагрузка определится по (2.13), но уже с новыми (3.7)

$$\varphi_m(\tau - \tau_1) = \Psi_m(\xi).$$

Теперь рассмотрим другой функционал качества:

$$I^{(3)} = \sum_{m=1}^n \int_0^T |\Psi_m(\xi)| d\xi \quad (3.8)$$

Условие минимума (3.8) эквивалентно условию минимума

$$I_m^{(3)} = \int_0^T |\Psi_m| d\xi \quad (3.9)$$

и управление осуществляется через сосредоточенные силы следующим образом: минимальное значение нормы $r_m(h) = \max_{0 \leq \xi \leq T} |h_m(\xi)|$ определяется,

как

$$r_s^0 = \min_{\sum_{m=1}^s \alpha_m} \max_{0 \leq \xi_k \leq T_k} |\alpha_m \cos \omega_m \xi_k + \beta_m \sin \omega_m \xi_k| > 0 \quad (3.10)$$

так как $\cos \omega_m \xi$ и $\sin \omega_m \xi$ независимые. Пусть указанный максимум достигается в точках $\xi_k^0 \in [0, T_k]$ ($k = 1, 2, \dots, s$, число s конечно, так как функция $\alpha \cos \omega \xi + \beta \sin \omega \xi$ аналитическая). Тогда

$$\psi^0(\xi) = \sum_{k=1}^s P_k \delta(\xi - \xi_k^0) \quad (3.11)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Числа P_k должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^s P_k \cos \omega_k \xi_k^0 = Z_1, \quad \sum_{k=1}^s P_k \sin \omega_k \xi_k^0 = Z_2 \quad (3.12)$$

Следует отметить, что всегда существуют числа P_k , удовлетворяющие условиям (3.12), но они не всегда определяются единственным образом.

4. Представляет еще определенный интерес также задача следующего типа. В заданный момент времени привести какую-нибудь точку в заданное положение. На примере предыдущей задачи это выглядит так (точка $y = y_0$ в момент $\tau = T$):

$$u(y_0, T) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(T) X_m(y_0) = u_0 \quad (4.1)$$

Учитывая выражение (3.1), соотношение (4.1) можно переписать

$$\int_0^T \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(\xi)}{\omega_m} \sin \omega_m (T - \xi) X_m(y_0) \right] d\xi = h \quad (4.2)$$

$$h = u_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \omega_m T + \frac{b}{\omega_m} \sin \omega_m T \right) X_m(y_0)$$

Если в качестве минимизируемого функционала брать (3.5) при условии (4.2), то подобную задачу можно рассматривать как изопериметрическую. Тогда

$$\psi_m(\xi) = \frac{2h X_m(y) \sin \omega_m (T - \xi)}{\omega_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(y_0)}{\omega_n^2} \left[T_1 - \frac{\sin 2\omega_n T_1}{2\omega_n} \right]} \quad (4.3)$$

суммарная оптимальная нагрузка будет по (2.13) с новыми (4.3).

5. На одном простом примере покажем разницу в выражениях управляющей нагрузки при различных подходах, когда осуществляется управление. Пусть системе с одной степенью свободы сообщается начальное отклонение (для балки отклонение по одной полуволне). В

момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega} = T$ (период колебания) отклонение будет x_0 .

Теперь потребуем, чтобы при $t = T$ отклонение было нулевым.

Вот выражения управляющих сил при различных постановках:

а) управление начинается с самого начала движения —

$$\varphi(t) = \frac{x_0 \omega^2}{\pi} \sin \omega t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.1)$$

б) сила действует с момента $t = 0$, но доходит до объекта через $t = T/4$, или действует, начиная с момента $t = T/4$. Тогда,

$$f\left(t - \frac{T}{4}\right) = \frac{4x_0 \omega^2}{3\pi} \cos \omega \left(t - \frac{T}{4}\right), \quad \text{или}$$
$$\psi(\xi) = \frac{4x_0 \omega^2}{3\pi} \cos \omega \xi, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{3T}{4} \quad (5.2)$$

Интересно, что в обоих случаях суммарная сила $\int_0^T \varphi(t) dt$ одинаковая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С. Об оптимальной стабилизации механических систем мощности котинуума // Уч. записки ЕГУ. 1975. №2. С. 49-57.
2. Мовсисян А.А., Габриелян М.С. Возвращение к вопросу управления движением упругой балки // Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №3. С. 23-27.
3. Габриелян М.С., Мовсисян А.А. К оптимальному управлению движением упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1999. №6. С.146-152.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
5. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // I-IV, — Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №№4,5,6, 1961. Т.22. №4; 1962. Т.23. №11.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
12.12.2001