ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539.3,62.50

О НАБЛЮДЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

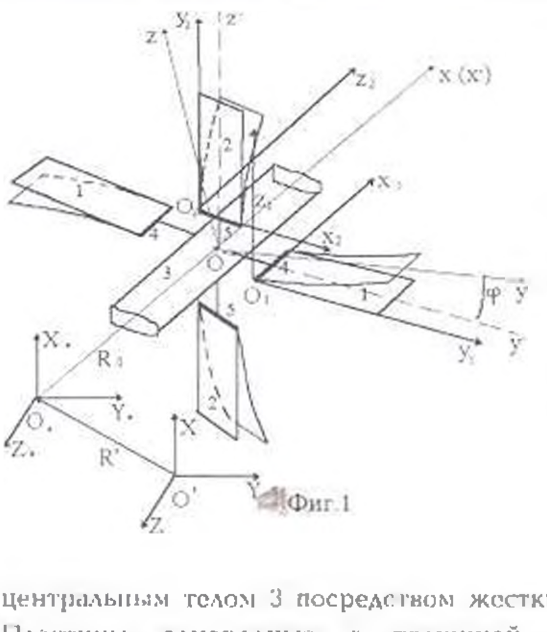
Айрапетян В.В., Гукасян А.А.

Վ.Վ.Հայրապետյան, Ա.Ա.Ղուկասյան
Բաշխված պարամետրերով ղեկավարվող համակարգերի դիտման մասին
Հետազոտված է առաձգական թռչող սարքի և առաձգական վերջին օղակով մանիպուլյացիոն ռոբոտի առաձգական էլեմենտների դիտման խնդիրը: Ստացված են դիտման օպտիմալ ֆիլտրներ, որոնք չափվող ազդակի միջոցով վերականգնում են նրանց ֆազային վիճակը:

V.V.Hayrapetyan, A.A.Ghukasyan
On estimation of controlled systems with distributed parameters

Исследована задача наблюдения упругих элементов для упругого летательного аппарата и манипуляционного робота с упругим последним звеном. Получены оптимальные фильтры наблюдения, которые с помощью измеряемого сигнала восстанавливают фазовое состояние систем.

Современные тенденции увеличения габаритных размеров, сложности структуры космических аппаратов (КА), манипуляционных роботов (МР) и требования к снижению их масс и энергозатрат привели к необходимости использования легких, упругих материалов при их конструировании. Следовательно, упругость конструкции необходимо учитывать уже на стадии проектирования систем управления. Методы и алгоритмы управления таких систем используют информацию о текущем состоянии, которая обеспечивается специальными средствами наблюдения. Разработка таких средств для систем с упругими элементами приводит к задачам наблюдения с распределенными параметрами [1-3].



Фиг.1

Рассматриваются две упругие системы: упругий космический аппарат (КА) и двухзвенный манипулятор с упругим последним звеном.

1. КА представляет собой цилиндрическое, абсолютно твердое тело (центральное тело) с закрепленными к нему упругими пластинами (фиг.1). Пары пластин 1 и 2 находятся в взаимно-перпендикулярных плоскостях. Края пластин жестко закреплены с центральным телом 3 посредством жестких стержневых конструкций 4,5. Пластины однородные с толщиной h и размерами a,b. Они

характеризуются плотностью ρ, модулем Юнга E и жесткостью на изгиб D. Радиус центрального тела обозначим через q. Введем инерциальную систему координат $O_*X_*Y_*Z_*$ и связанную прямоугольную систему координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс KA, а ось Ox направлена вдоль продольной оси KA [4,5].

Здесь, как и в [4,5], рассматривается поступательное движение KA вдоль оси Ox и вращение вокруг той же оси. Положение начала системы координат $O_*X_*Y_*Z_*$ относительно $O'XYZ$ определим радиус-вектором $\mathbf{R}'$, а положение центра масс KA относительно системы $O_*X_*Y_*Z_* - \mathbf{R}_0$. Относительное положение точки тела в деформированном состоянии обозначим через вектор $\mathbf{r}$. Абсолютное положение точек KA определяется вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}\,;\ (\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{w}(t,x,y))$$

где вектор R_0 определяет положение центра масс KA в системе координат $O_*X_*Y_*Z_*$, $\mathbf{r}$ – относительное положение точек KA, ($\mathbf{w}(t,x,y)$ – вектор упругих смещений пластин), $R' = \mathrm{const}$.

Поступательное движение и вращение KA происходят за счет силы $\mathbf{F}$, направленной вдоль оси Ox и вращательного момента M, приложенного вокруг той же оси. Для аналитических исследований уравнений движения и упругих колебаний пластин предполагается, что ось O_*X_* совпадает с продольной осью KA. Уравнения движения KA и упругих колебаний пластин в рамках линейной теории упругости, с учетом следующих предположений $D \sim \varepsilon^{-1}$, $w_i/\max(c,b) \sim \varepsilon$ $i = 1,2$, $\dot\varphi \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot\varphi \sim \varepsilon$, $\dot R_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot R_0 \sim \varepsilon$ $\varepsilon \ll 1$ имеют вид [4,5]:

$$m\ddot R_0 = -mg + F - 2\rho h\iint_\Omega \ddot w_2\, d\Omega \qquad (1.1)$$

$$2a_{\varphi 1}\ddot\varphi\rho h + 2\rho h\iint_\Omega \ddot w_1(q + l + y_1)\, d\Omega + I\ddot\varphi = M(t) \qquad (1.2)$$

$$\ddot w_1 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_1 = -\ddot\varphi(q + l + y_1) \qquad (1.3)$$

$$\ddot w_2 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_2 = -\ddot R_0 + g \qquad (1.4)$$

с начальными

$$R_0(0) = R_{0*},\quad \dot R_0(0) = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \ \dot\varphi(0) = 0 \qquad (1.5)$$

$$w_i(0,x,y) = 0,\quad \dot w_i(0,x,y) = 0 \quad i = 1,2 \qquad (1.6)$$

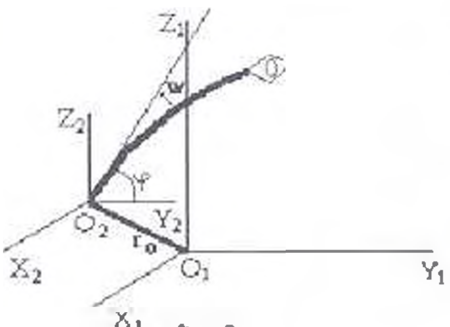
и граничными условиями [4], где $(a\times b) = \Omega$,

$$a_{\varphi 1} = d_2\rho h\iint_\Omega [(q + l + y_1)^2 + (x_2 - b/2)^2]\, d\Omega + \rho h\iint_\Omega (q + l + y_2)^2\, d\Omega,$$

$d_2 = 1 - \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \sin\theta_2$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ являются самолетными углами [6].

2. Рассматривается кинематическая модель двухзвенного манипуля-

гора (фиг.2), последнее звено которого моделируется как упругий стержень. На конце упругого звена находится схват с грузом [4,5]. Уравнения движения последнего звена и упругих колебаний относительно системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ имеют вид [7-9]



Фиг.2

$$A\ddot{\varphi}+\int_0^l \rho s\xi\ddot{w}(t,\xi)d\xi=Q(t) \qquad (2.1)$$

$$\ddot{w}(t,\xi)+\frac{EI_0}{\rho_0 s_0}w^{IV}(t,\xi)=-\ddot{\varphi}\xi \qquad (2.2)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$w(t,0)=w'(t,0)=w''(t,l)=0$$

$$w'''(t,l)=\frac{m}{EI_0}[\ddot{w}(t,l)+\ddot{\varphi}l] \qquad (2.3)$$

$$w(0,\xi)=\dot{w}(0,\xi)=\dot{\varphi}(0)=0;\ \varphi(0)=\varphi_0 \qquad (2.4)$$

где

$A=\int_0^l \rho s\xi^2 d\xi$, $\rho s=\rho_0 s_0+m\delta(\xi-l)$, $E-$модуль Юнга, $m-$масса груза.

3. Для улучшения качества управления вышеприведенных систем необходимо иметь также информацию о текущем состоянии упругих элементов во время движения.

Допустим, есть возможность с помощью измерительных устройств на некоторых областях положительной меры упругих элементов измерить некоторую величину, определенную на промежутке времени $t-\theta\le\tau\le t$, где $\theta>0$, постоянное число. Число θ определяется из дополнительных требований и зависит от физических возможностей измерительных устройств. Поскольку наблюдаемый объект подвержен воздействию управления, необходима также информация о предыстории процесса управления, которая может быть определена на $t-\theta\le\tau<t$ [10,11].

Предполагается, что области упругих элементов, подлежащих измерению, характеризуются функциями $f_i, g_i, i=1,2$ из класса L_2. Для KA и упругого звена MP они определены следующим образом:

a) $f_1=f_1(x,y), g_1=g_1(x,y),\ (x,y)\in[0,b]\times[0,a]$

b) $f_2=f_2(\xi), g_2=0,\ \xi\in[0,l]$ (3.1)

В частности, они могут быть характеристическими функциями измеримых областей.

Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния упругих элементов.

Используя метод разделения переменных Фурье, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_i(t)+k_i^2 q_i(t)=u_i(t) \qquad (3.2)$$

$i=1,2$, где индекс 1 соответствует KA а индекс $2-MP$.

Для KA имеем [4]

$$w(t,x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} q_1(t)X_m(x)Y_n(y),\quad q_1(t)=w_{mnl}(t)$$

$$k_1^2=\frac{D}{\rho h}\left[\lambda_n^4+\mu_m^4+2\iint_{\Omega} X''_{mi}(x_i)Y''_{ni}(y_i)X_{mi}(x_i)Y_{ni}(y_i)d\Omega\right] \tag{3.3}$$

$$u_1(t)=\Phi_{mnj}[t]=\iint_{\Omega}\Phi_j X_{mj}(x_j)Y_{nj}(y_j)d\Omega,\ j=1,2;\ m,n=1,2,3\cdots$$

Здесь Φ_1,Φ_2 есть правые части уравнений (1.3),(1.4), соответственно. $X_{mi}(x_i),Y_{ni}(y_i),i=1,2$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок, которыми аппроксимируются пластины. λ_n,μ_m – собственные частоты этих балок [4].

Для упругого звена МР [7-9]

$$w(t,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} q_2(t)X_n(\xi)\ q_2(t)=w_n(t),\ k_2=\lambda_n^2\sqrt{\frac{EJ_0}{\rho_0 s_0}},\ u_2=-\int_0^{b_2}\varphi\xi X_n(\xi)d\xi$$

$$n=1,2,3\cdots \tag{3.4}$$

Здесь $X_n(x)$ – собственные функции колебаний упругого звена, а λ_n – собственные числа этих функций.

Введя обозначения

$$q_i^{(1)}(t)=q_i(t),\ q_i^{(2)}(t)=\frac{1}{k_i}\dot{q}_i(t)$$

уравнения (3.2) запишем в нормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{q}_i^{(1)}(t)&=k_i q_i^{(2)}(t)\\ \dot{q}_i^{(2)}(t)&=-k_i q_i^{(1)}(t)+\frac{1}{k_i}u_i(t)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Обозначим коэффициенты Фурье функций f_i, g_i следующим образом: $\bar{f}_i,\bar{g}_i\ i=1,2$.

Для *КА*

$$\bar{f}_1=\int_0^{b_1}\int_0^{c_1} f_1(x,y)X_m(x)Y_n(y)dxdy$$

$$\bar{g}_1=\int_0^{b_1}\int_0^{c_1} g_1(x,y)X_m(x)Y_n(y)dxdy\quad m,n=1,2,3\cdots.$$

Для *МР*

$$\bar{f}_2=\int_0^{b_2} f_2(\xi)X_n(\xi)d\xi,\ \bar{g}_2=0\qquad n=1,2,3\cdots$$

Предполагается, что $\bar{f}_i^2+\bar{g}_i^2\neq 0,\ i=1,2$ [12].

Допустим, что через измерительные устройства поступает сигнал [10,13]

$$y_i(\tau)=\bar{f}_i q_i^{(1)}(\tau)+\bar{g}_i q_i^{(2)}(\tau),\quad t-0\le\tau\le t,\ i=1,2 \tag{3.6}$$

Поступающие сигналы могут быть различными. Целесообразность выбора сигнала (3.6) обусловлена содержанием достаточного количества информации и несложной реализацией.

Рассмотрим по отношению (3.6) "усиленный сигнал"

$$y_i(\tau)=k_i^{\alpha}\bar{f}_i q_i^{(1)}(\tau)+k_i^{\alpha}\bar{g}_i q_i^{(2)}(\tau),\quad t-0\le\tau\le t,\ i=1,2 \tag{3.7}$$

реализация которого также нетрудна [10]. Здесь $\alpha=1+\varepsilon$; $\varepsilon>0$ – малое число. Для KA и упругого манипулятора k_i^{α} имеет, соответственно, следующие виды: $k_{mn}^{\alpha}, k_n^{\alpha}$, $m,n=1,2,3,\cdots$.

Таким образом, имеем следующую задачу наблюдения: найти линейную операцию $\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]=q_i^{(j)}(t),\ i=1,2;\ j=1,2 \tag{3.8}$$

каким бы ни было реализовавшееся в системе (3.5) значение $q_i^{(j)}(t)$ и каким бы ни был сигнал (3.7).

4. Приведение задачи наблюдения к проблеме моментов и ее решение. Разрешающие операции $\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$, $i=1,2$; $j=1,2$ составим следующим образом [11]:

$$\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]=\overline{\varphi}_i^j[t,y_i(\tau)]-\overline{\varphi}_i^j[t,G_i\int_t^{\zeta}H_i(\zeta,\tau)u_i(\tau)d\tau]$$

$$i=1,2;\ j=1,2 \tag{4.1}$$

В (4.1) $\overline{\varphi}_i^j$ – разрешающие операции при условии $u_i\equiv 0$, т.е.

$$\overline{\varphi}_i^j[t,y_i(\tau)]=q_i^{(j)}(t) \tag{4.2}$$

и приняты следующие обозначения:

$$G_i=(k_i^{\alpha}f_i,k_i^{\alpha}g_i),\quad H_i(\zeta,\tau)=X_i(\zeta,\tau)B_i$$

где $X_i(\zeta,\tau)$ – нормированная фундаментальная матрица однородной части системы (3.5) и имеет вид

$$X_i(\zeta,\tau)=\begin{pmatrix}\cos k_i(\zeta-\tau) & \sin k_i(\zeta-\tau)\\ -\sin k_i(\zeta-\tau) & \cos k_i(\zeta-\tau)\end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{k_i}\end{pmatrix},\ i=1,2 \tag{4.3}$$

Для построения операции $\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$, $i=1,2$; $j=1,2$ достаточно построить разрешающие операции $\overline{\varphi}_i^j[t,y_i(\tau)]$ для системы

$$\begin{aligned}&\dot{q}_i^{(1)}(t)=k_i q_i^{(2)}(t)\\ &\dot{q}_i^{(2)}(t)=-k_i q_i^{(1)}(t)\\ &i=1,2;\end{aligned} \tag{4.4}$$

удовлетворяющей условию (4.2) [11]. Решение системы (4.4), согласно формуле Коши, запишется в следующем виде

$$\overline{q}_i(\tau)=X_i(\tau,t)\overline{q}_i(t)\quad i=1,2 \tag{4.5}$$

где

$$\overline{q}_i(\tau)=\begin{pmatrix} q_i^{(1)}(\tau) \\ q_i^{(2)}(\tau) \end{pmatrix},\ i=1,2$$

Из (3.7),(4.5) получаем

$$y_i(\tau)=G_iX_i(\tau,t)\overline{q}_i(t),\ t-\theta\le\tau\le t \tag{4.6}$$

Операции, вычисляющие функции $q_i^{(1)}(t),q_i^{(2)}(t)$ по сигналу (3.7), будем искать в виде

$$\int_{t-\theta}^{t} y_i(\tau)\overline{V}_i^{(j)}(t,\tau)d\tau=q_i^{(j)}(t),\quad i=1,2;\ \ j=1,2 \tag{4.7}$$

Подставляя $y_i(\tau)$ из (3.7) в (4.7), выполняя замену переменного $\tau-t=\xi$ и введя обозначение $\overline{V}_i^{(j)}(t,t+\xi)=V_i^{(j)}(\xi)$ $i=1,2;$ $j=1,2$, будем иметь

$$\begin{gathered}
\int_{-\theta}^{0}(f_i\cos k_i\xi-g_i\sin k_i\xi)\overline{V}_i^{(1)}(\xi)d\xi=\frac{1}{k_i^{\alpha}}\\
\int_{-\theta}^{0}(f_i\sin k_i\xi+g_i\cos k_i\xi)\overline{V}_i^{(1)}(\xi)d\xi=0\\
\int_{-\theta}^{0}(f_i\cos k_i\xi-g_i\sin k_i\xi)\overline{V}_i^{(2)}(\xi)d\xi=0\\
\int_{-\theta}^{0}(f_i\sin k_i\xi+g_i\cos k_i\xi)\overline{V}_i^{(2)}(\xi)d\xi=\frac{1}{k_i^{\alpha}}
\end{gathered}\qquad i=1,2. \tag{4.8}$$

Найдем функции $\overline{V}_i^{(1)}(\xi),\overline{V}_i^{(2)}(\xi)$, удовлетворяющие условиям (4.8) и являющиеся оптимальными в смысле

$$\int_{-\theta}^{0}\left[\left(\overline{V}_i^{(1)}(\xi)\right)^2+\left(\overline{V}_i^{(2)}(\xi)\right)^2\right]d\xi\to\min,\qquad i=1,2 \tag{4.9}$$

Решая полученную вариационную задачу (4.8),(4.9) с помощью проблемы моментов [11], для оптимальных функций $\overline{V}_i^{(1)0}(\xi)$, $\overline{V}_i^{(2)0}(\xi)$ получим

$$\overline{V}_i^{(1)0}(\xi)=A_i\Big\{(\overline{g}_i^2\sigma_{i1}+2\bar{f}_i\overline{g}_i\sigma_{i3}+\bar{f}_i^2\sigma_{i2})(\bar{f}_i\cos k_i\xi-\overline{g}_i\sin k_i\xi)-[\bar{f}_i\overline{g}_i(\sigma_{i1}-\sigma_{i2})+$$
$$+(\bar{f}_i^2-\overline{g}_i^2)\sigma_{i3}](\bar{f}_i\sin k_i\xi+\overline{g}_i\cos k_i\xi)\Big\} \tag{4.10}$$

$$\overline{V}_i^{(2)0}(\xi)=A_i\Big\{(\bar{f}_i^2\sigma_{i1}-2\bar{f}_i\overline{g}_i\sigma_{i3}+\overline{g}_i^2\sigma_{i2})(\bar{f}_i\sin k_i\xi+\overline{g}_i\cos k_i\xi)-[\bar{f}_i\overline{g}_i(\sigma_{i1}-\sigma_{i2})+$$
$$+(\bar{f}_i^2-\overline{g}_i^2)\sigma_{i3}](\bar{f}_i\cos k_i\xi-\overline{g}_i\sin k_i\xi)\Big\} \tag{4.11}$$

где

$$A_i=2[k_i^{\alpha}(\sigma_{i1}\sigma_{i2}-\sigma_{i3}^2)(\bar{f}_i^2+\overline{g}_i^2)]^{-1}$$

$$\sigma_{i1}=\theta+\frac{\sin 2k_i\theta}{2k_i},\ \ \sigma_{i2}=\theta-\frac{\sin 2k_i\theta}{2k_i},\ \ \sigma_{i3}=-\frac{\sin^2 k_i\theta}{k_i}$$

Чтобы показать ограниченность нормы бесконечномерного вектора $V_i^0(\xi)$, компонентами которого являются найденные универсальные функции $\overline{V}_i^{(1)0}(\xi)$, $\overline{V}_i^{(2)0}(\xi)$, составим квадрат выражения нормы

$$\left\|V_i^0\right\|^2 = \int_{-\theta}^{0} \left\{ \left(V_i^{(1)0}(\xi)\right)^2 + \left(V_i^{(2)0}(\xi)\right)^2 \right\} d\xi, \; i = 1,2$$

Проведя соответствующие вычисления, получим

$$\left\|V_i^0\right\|^2 = \frac{4}{\theta k_i^{2\alpha}\left(1-(\sin^2 k_i\theta)/k_i^2\theta^2\right)\left(\bar{f}_i^2+\bar{g}_i^2\right)}, \quad i = 1,2 \qquad (4.12)$$

Из (4.12) видно, что выбором функций f_i, g_i можно улучшить сходимость этого ряда.

Таким образом, построены оптимальные операции $\overline{\varphi}_i^{(j)0}$, $i = 1,2;\; j = 1,2$ в виде

$$\overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, y_i(t+\xi)] = \int_{-\theta}^{0} V_i^{(j)0} y_i(t+\xi)d\xi, \; i = 1,2 \qquad (4.13)$$

(4.13) является первым слагаемым правой части выражения (4.1). Операции, разрешающие задачу наблюдения системы (3.5) по сигналу (3.7), согласно (4.1), будут

$$\varphi_i^{(j)0}[t, \{y_i(t+\xi), u_i(t+\xi)\}] = \overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, y_i(t+\xi)] - \overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, G_i \int_0^{\eta} H_i(t+\eta, t+\xi)u(t+\xi)d\xi]$$

$$i = 1,2;\; j = 1,2 \qquad (4.14)$$

где

$$H_i(t+\eta, t+\xi) = \begin{pmatrix} \sin k_i(\eta-\xi) \\ \cos k_i(\eta-\xi) \end{pmatrix}, \; i = 1,2.$$

Для второго слагаемого выражения (4.14) с учетом (4.13) и (3.7) после соответствующих вычислений получим

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, G_i \int_0^{\eta} H_i(t+\eta, t+\xi)u(t+\xi)d\xi] = \\ &= \int_{-\theta}^{0} V_i^{(j)0}(\xi)k_i^{\alpha-1}u_i(t+\xi)[f_i \sin k_i\xi + g_i(\cos k_i\xi - 1)]d\xi \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Итак, с учетом оптимальных функций $\overline{V}_i^{(1)0}(\xi), \overline{V}_i^{(2)0}(\xi)$ из (4.10),(4.11), значения измерения $y_i(\tau)$ из (3.7) и формул (4.13)-(4.15) функции $q_i^{(j)}(t)$, $i = 1,2;\; j = 1,2$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} q_i^{(j)}(t) = &\int_{t-\theta}^{t} \overline{V}_i^{(j)0}(t,\tau)y_i(\tau)d\tau - \\ &- \int_{t-\theta}^{t} \overline{V}_i^{(j)0}(t,\tau)k_i^{\alpha-1}u_i(\tau)\left[f_i \sin k_i(\tau-t) + g_i\left(\cos k_i(\tau-t)-1\right)\right]d\tau \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Подставляя значения функций $q_i(t) \equiv q_i^{(1)}(t)$ из (4.16) в выражения (3.3),(3.4), будем иметь функции состояния упругих элементов в момент времени t (аналогичным образом для скорости точек упругих элементов).

Оптимальный фильтр (4.16) позволяет с помощью измеряемого сигнала (3.7) восстанавливать состояние упругих элементов.

Восстановленные величины $w, \dot{w}$ используются для определения управляющих сил и моментов всей системы в соответствии с уравнениями (1.1),(1.2),(2.1).

Замечание 1. Приведенный алгоритм позволяет измерять также случайные возмущения в процессе движения и учитывать их в системе управления.

Замечание 2. Если при управлении системой возникнет необходимость решения граничных задач, то вышеприведенный алгоритм наблюдения позволит задать начальные условия для этих задач.

Замечание 3. Если при движении системы на упругие элементы наложены ограничения типа $|w(t, x, y)| < \mathrm{const}$, то данный алгоритм позволяет проверить это условие во время движения в любой момент времени t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М: Наука, 1975. 568с.
2. Охами Ю., Ликинз Л. Влияние упругости КЛА на управляемость и наблюдаемость систем. В сб.: Управление в пространстве. Т.2. М.: Наука, 1970. С.275-285.
3. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 214с.
4. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами. //Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т.53. N1. С.61-68.
5. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т.43. N4. С.13-23.
6. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.:Машиностроение, 1987. 232с.
7. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N5. С.33-41.
8. Гукасян А.А. Анализ движений двухзвенного упругого манипулятора с электромеханическими приводными системами на подвижном основании. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т.42. N1. С.45-55.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1966. 724с.
10. Барсегян В.Р., Айрапетян В.В. К задаче наблюдения управляемых колебательных движений мембраны. //Уч. записки Ереванского Государственного Университета. N2. 1997. С.21-26.
11. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
12. Габриелян М.С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. //Изв. АН СССР. ПМ. 1964. Т.28. Вып.3. С.493-501.
13. Барсегян В.Р. Задача наблюдения струны. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. N1. С.66-69.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
11.06.2002