ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО МИНИМАЛЬНОМУ СУММАРНОМУ ВРЕМЕНИ ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОИСК И ПРИВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան
Դինամիկական համակարգով սահմանափակ տիրույթի անշարժ կետի օպտիմալ՝ ըստ նվազագույն գումարային ժամանակի երաշխավորված փնտրումն ու նրան բերումը:

Դիտարկվում է ուղղանկյուն տիրույթում արագությամբ ղեկավարվող դինամիկական համակարգով անշարժ կետային օբյեկտը օպտիմալ ըստ նվազագույն գումարային ժամանակի երաշխավորված փնտրելու և այնուհետև մոտենալու խնդիրը: Ստացված է խնդրի լուծումը այն դեպքում, երբ հայտնաբերված օբյեկտին մոտենալու ժամանակը շատ անգամ փոքր է որոնելի օբյեկտի փնտրման ժամանակից: Աշխատանքը [1-3]-ի շարունակությունն է:

V.V. Avetisyan
The Total Time-Optimal Guaranteed Search and Putting the Dynamic System to yhe Immobile Point in the Limited Domain

Рассматривается задача оптимального по минимальному суммарному времени гарантированного поиска и приведения в неподвижную точку в прямоугольной области динамической системы, управляемой по скорости. Получено решение поставленной задачи в случае, когда время приведения в обнаруженную точку намного меньше времени поиска искомой точки. Работа является продолжением [1-3].

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задано некоторое выпуклое компактное связанное множество $D \subset R^3, D = D' + D''$, где $D' \subset R^2$ и $D'' \subset R$ – взаимно-ортогональные выпуклые компактные подмножества соответственно. Рассмотрим систему из двух точечных объектов: совершающего простое движение во множестве $D \subset R^3$ управляемого объекта X с вектором положения x, и неподвижного в пределах подмножества $D' \subset D$, $D' \subset R^2$ объекта Y с вектором положения y. Пусть проекции $x' = (x_1, x_2) \in D'$ и $x'' \in D''$ вектора $x \in D$ управляются с помощью управлений $u' \in U'$ и $u'' \in U''$ соответственно, где U', U'' – взаимно-ортогональные выпуклые компактные подмножества множества $U : U' + U'' = U$. При таком предположении, динамика описанной системы на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ задается следующими соотношениями:

$$X:\ \dot{x}' = u',\quad x', u' \in R^2, \qquad \dot{x}'' = u'',\quad x'', u'' \in R^1,$$
$$x'(t_0) = x'^0,\quad |u'(t)| \le U', \qquad x''(t_0) = x''^0,\quad |u''(t)| \le U'',$$
$$x'(t) \in D' \subset R^2,\ t \ge t_0, \qquad x''(t) \in D'' \subset R^1,\ t \ge t_0,$$
$$x(t) = (x'(t), x''(t)) \in D = D' \cup D'' \subset R^3,\ t \ge t_0,$$
$$Y:\ y(t) \equiv y(t_0) \in D' \subset R^2,\ t \ge t_0 \tag{1.1}$$

Предположим, что управляемому объекту X в процессе движения доступна полная информация о соотношениях (1.1) за исключением начального состояния объекта $Y - y(t_0)$. Однако, имеется некоторое подвижное и изменяющееся информационное множество $G(x(t))$, связанное с текущим значением вектора $x(t)$, позволяющее уточнить информацию о координатах местоположения точечного объекта Y в случае попадания последнего в это множество.

Определим область $G(x)$ для любого $x \in D \subset R^3$ следующим образом:

$$G(x(t), C) = G(x'(t), x''(t), C) = \begin{Bmatrix} \xi' \in R^2:\ |\xi' - x'| \le \rho' = C|x''|, \\ x' \in D',\ x'' \in D'',\quad C > 0 \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

Область $G(x, C)$ (1.2) представляет собой круг с центром в точке $x'(t) \in D' \subset D$ и с радиусом $\rho' = C\,|x''|$, где $|x''|$ – расстояние объекта X до подмножества D', а $C > 0$ – такое число, при котором имеет место включение $G(x', \rho'_{\max}) \subset D'$, $\rho'_{\max} = C \max\limits_{x'' \in D''} |x''|$ хотя бы для одной точки $x' \in D'$.

Пусть управляемый процесс начинается в момент $t = t_0$ из начальной точки $x^0 = (x'^0, x''^0) \in D$ и заканчивается в момент $t = T$, когда выполняется условие

$$x(T) = x^1,\quad x^1 = (x'^1, x''^1),\quad x'^1 = y,\quad x''^1 = 0 \tag{1.3}$$

Цель объекта X – выполнение условия (1.3) за минимальное время T.

Разобьем процесс управляемого движения объекта X на два этапа – этапы поиска и приведения в искомую точку y. В связи с этим допустимыми будем считать комбинированные управляющие функции вида [2]

$$u = \begin{cases} u_0(x^0; t), & t_0 \le t \le t_*, \\ u_1(x^*, t_*, x^1; t), & t_* \le t \le T \end{cases} \tag{1.4}$$

принимающие значения из области U. Здесь величины x^0, x^*, x^1, t_*, T являются параметрами, $x^0, x^*, x^1 \in D$, $T \ge t_* \ge t_0$. Управлению u_0 соответствует этап поиска, а управлению u_1 – этап приведения на искомую точку.

Движение системы (1.1) при управлении вида (1.4) строится следующим образом. На интервале $[t_0, t_*]$ используется управление поиска u_0, а затем после момента наблюдения t_*, когда вектор x^1 становится известным, на интервале $|t_*,T|$ используется управление u_1, приводящее систему из точки x^* в точку x^1. Вопрос существования конечного момента $t_* \ge t_0$ является основным в задаче поиска и ее решение зависит от способа управления объектом X.

Пусть $\Delta = \{D'\}$ - некоторое множество областей D' таких, что $\cap\{D'\} \ne \varnothing$ и $x''^0 \in (\cap\{D'\})$. Пусть начальная координата x''^0 задана. Тогда каждому значению координаты x''^0 и каждому допустимому управлению $u = \{u_0, u_1\}$ соответствует некоторое время гарантированного поиска и приведения $T = T(D', x''^0, u)$.

Задача. Найти минимальное суммарное время гарантированного поиска и приведения $T^*(D)$, управление $u^* = \{u_0^*, u_1^*\}$ и начальную координату $(x''^0)^*$, доставляющие минимум

$$T^*(D') = \min_{0 \le x''^0 \le C^{-1} l_{max}} \ \min_{u=\{u_0,u_1\}} T(D', x''^0, u), \qquad D' \in \Delta \tag{1.5}$$

В (1.5) второй минимум по компоненту u_1 является задачей оптимального по быстродействию управления по заданным краевым точкам x^* и x^1.

2. Пусть область D в (1.1) задается в виде параллелепипеда

$$D = \{(x_1, x_2, x'') \in R^3 : \ 0 \le x_1 \le a, \ 0 \le x_2 \le b, \quad 0 \le x'' \le c, \quad a,b,c > 0\} \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что рассматриваемый параллелепипед принадлежит заданному множеству параллелепипедов

$$\Delta = \{D(a,b,c): \ h_0 \le a \le d, \ h_0 \le b \le d, \quad 0 \le c \le d' = C^{-1} h_0 / 2\} \tag{2.2}$$

Здесь h_0, d — заданные положительные числа, определяемые ниже.

Таким образом, Δ представляет собой множество всевозможных параллелепипедов $D(a,b,c)$ (2.2), расположенных в подпространстве с положительными полуосями декартовой системы координат Ox_1x_2x'', имеющих общую вершину в начале координат $(0,0,0)$ и содержащихся в заданном параллелепипеде $D = \{(x_1, x_2, x'') \in R^3 : 0 \le x_1, x_2 \le d, \ 0 \le x'' \le d'\}$. Задавая параметры a, b, c, мы тем самым задаем параллелепипед $D(a,b,c)$.

Пусть для заданного параллелепипеда $D \in \Delta$ (2.2) стороны a и b его прямоугольного основания D' удовлетворяют соотношениям:

$$0 \le [a/h] = k(a,h), \qquad 0 \le [b/h] = p(b,h)$$

$$0 < h \le h_0 \le a, b \le d, \quad h_0 = 2l_0, \ l_0 = C \max_{0 \le x'' \le d'} x'' = Cd' \tag{2.3}$$

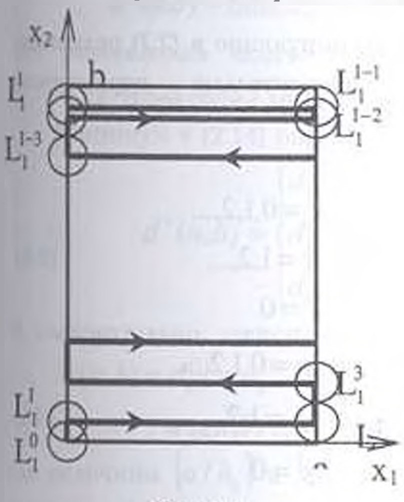
$$hN \le d < h(N+1), \quad N = N(d,h), \ 0 \le k, p \le N$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа.

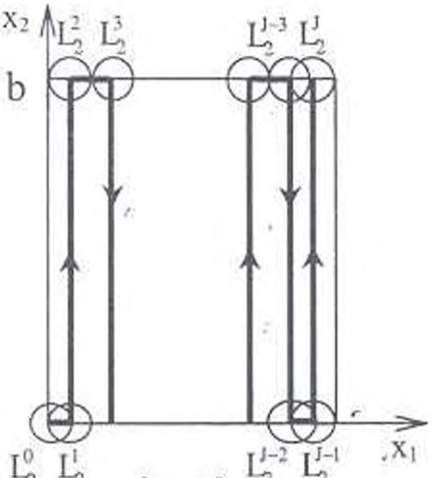
Предположим, что управляемый процесс начинается из точки $x_0 = (0,0,x_0'')$, $0 < x_0'' \le d'$. Рассмотрим исходящие из начальной точки две траектории, проекции L_1, L_2 которых на прямоугольную область D'

плоскости Ox_1x_2 изображены на рис. 1.1, 1.2 соответственно. Движение объекта X по каждому участку траектории L_1 и L_2 происходит с максимальной скоростью U' и с постоянным радиусом обнаружения $l = h/2 = C \cdot x^{*\phi}$. В [1] доказано, что траектории L_1 и L_2 — покрывающие, т.е движение объекта X по этим траекториям при соответствующих управлениях обеспечивает обнаружение искомой точки за конечное время. Там же, на основе исходных — двух простых — покрывающих траекторий L_1 и L_2, построено целое множество покрывающих прямоугольную область с заданной точностью траекторий и доказано, что в зависимости от параметров прямоугольника поиска, в построенном множестве оптимальным в смысле минимальной длины является одна из исходных траекторий.

Гарантированное время $t_*^{(i)}$, $i = 1,2$ поиска ("просмотра" D') при про-



Фиг. 1.1



Фиг. 1.2

хождении объекта X по траектории L_i, $i = 1,2$ равно:

$$t_*^{(i)}(a,b,h) = d_i(a,b,h)/U', \qquad i = 1,2 \tag{2.4}$$

где

$$d_1(a,b,h) = [b/h]a + a\,\mathrm{sgn}(b/h - [b/h]) + b - h/2, \quad b/h \geq [b/h], \quad 0 < h \leq h_0 \tag{2.5}$$

$$d_2(a,b,h) = [a/h]b + b\,\mathrm{sgn}(a/h - [a/h]) + a - h/2, \quad a/h \geq [a/h], \quad 0 < h \leq h_0 \tag{2.6}$$

Здесь d_1, d_2 — длины рассматриваемых траекторий L_1 и L_2, зависящих от параметров a, b, h.

В данной работе, в отличие от [3], рассматривается случай, когда на этапе приведения оптимальное время $T'(h/2)$ перемещения из точки обнаружения в целевую точку по координате x', соответствующего управлению $u_1'^{*}$, больше оптимального времени $T''(|x''^{0}|)$ вертикального перемещения по координате x'', соответствующего управлению $u_1''^{*}$ - $\max(T',T'') = T'$, т.е. $U' < CU''$. Тогда для суммарного времени гарантированного поиска и приведения будем иметь

$$T^{(1)}(a,b,h) = t_*^{(1)} + t_1^{(1)} = d^{(1)} / U'$$
$$d^{(1)} = ([b/h] + \mathrm{sgn}(b/h - [b/h]))a + b$$
$$T^{(2)}(a,b,h) = t_*^{(2)} + t_1^{(2)} = d^{(2)} / U'$$
$$d^{(2)} = [a/h]b + b\,\mathrm{sgn}(a/h - [a/h]) + a \tag{2.7}$$

где $d^{(1)}, d^{(2)}$ – длины траекторий $L_1 + h/2$, $L_2 + h/2$ соответственно (фиг. 1.1,1.2).

С учетом (2.7) задача (1.5) сводится к следующей задаче минимума:

$$T^*(a,b) = \min_{0<h\le h_0} (T^{(1)}(a,b,h), \quad T^{(2)}(a,b,h)) = \min(\min_{0<h\le h_0} T^{(1)}(a,b,h)$$
$$\min_{0<h\le h_0} T^{(2)}(a,b,h)) = \min(\min_{0<h\le h_0} d^{(1)}(a,b,h) \tag{2.8}$$
$$\min_{0<h\le h_0} d^{(2)}(a,b,h))/U' = d^*(a,b)/U', \qquad h_0 \le a,b \le d$$

Для фиксированных значений a и b, фигурирующие в (2.7) величины $[a/h]$, $[b/h]$ – ступенчатые функции относительно переменной $h = 2l : 0 < h \le h_0$

$$[a/h] = \begin{cases} & h_{k+1}(a) < h \le h_k(a), \quad k = 0,1,2,..., \\ [a/h_0] + k, & h_k(a) = a/([a/h_0] + k), \quad k = 1,2,... \\ & h_k(a) = h_0, \quad k = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$[b/h] = \begin{cases} & h_{p+1}(b) < h \le h_p(a), \quad p = 0,1,2.... \\ [b/h_0] + p, & h_p(b) = b/([b/h_0] + p), \quad p = 1,2,... \\ & h_p(b) = h_0, \quad p = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

претерпевающие разрыв первого рода справа в точках $h_p(b), p = 1,...$ и $h_k(a), k = 1,...$ соответственно. Учитывая (2.9), (2.10), функции $d^{(1)}$, $d^{(2)}$ (2.7) можно представить следующим образом:

$$d^{(1)}(a,b,h) = \begin{cases} & h_{p+1}(b) < h \le h_p(b), \quad p = 0,1,2,... \\ ([b/h_0] + p + 1)a + b, & h_p(b) = b/([b/h_0] + p), \quad p = 1,2,... \\ & h_{p+1}(b) \le h \le h_p(b), \quad p = 0, \\ & h_p(b) = h_0, \quad p = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$d^{(2)}(a,b,h) = \begin{cases} & h_{k+1}(a) < h \le h_k(a), \quad k = 0,1,2,... \\ ([a/h_0] + k + 1)b + a, & h_k(a) = a/([a/h_0] + k), \quad k = 1,2,... \\ & h_{k+1}(a) \le h \le h_k(a), \quad k = 0, \\ & h_k(a) = h_0, \quad k = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Функции $d^{(1)}, d^{(2)}$ в (2.11), (2.12) – монотонно убывающие ступенчатые функции относительно параметра h и, следовательно, минимальные значения принимают при всех $h \in [h_1(a), h_0]$ и $h \in [h_1(b), h_0]$ соответственно, в частности, при $h = h_0$

$$
\begin{aligned}
&\min_{0<h\le h_0} d^{(1)}(a,b,h) = d_0^{(1)}(a,b) = ([b/h_0] + \operatorname{sgn}(b/h_0 - [b/h_0]))a + b \\
&\min_{0<h\le h_0} d^{(2)}(a,b,h) = d_0^{(2)}(a,b) = ([a/h_0] + \operatorname{sgn}(a/h_0 - [a/h_0]))b + a
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Это означает, как и предполагалось, что оптимальный поиск нужно осуществить с максимальным и постоянным радиусом обнаружения

$$h_0 = 2l_0 = C \cdot \max_{0<x^{*0}\le d'} x^{*0} = C \cdot d'$$

соответствующего максимальному значению d' начальной координаты x^{*0} – расстояния объекта X до плоскости прямоугольника D'.

Таким образом, с учетом (2.13), из (2.8) получаем

$$d^*(a,b) = \min(d_0^{(1)}(a,b), d_0^{(2)}(a,b)), \quad h_0 \le a, b \le d \tag{2.14}$$

что равносильна задаче определения из двух траекторий $L_1 + h/2$ и $L_2 + h/2$ траектории минимальной длины.

Минимум в (2.14) определяется следующим образом:

$$
d^*(a,b) = \begin{cases}
d_0^{(2)}(a,b), & F(a,b) > 0 \\
d_0^{(1)}(a,b) = d_0^{(2)}(a,b), & F(a,b) = 0 \\
d_0^{(1)}(a,b), & F(a,b) < 0
\end{cases}
\tag{2.15}
$$

и, следовательно, зависит от знака функции

$$
\begin{aligned}
F(a,b) = d_0^{(1)} - d_0^{(2)} &= [b/h_0]a - [a/h_0]b + \\
&+ a\operatorname{sgn}(b/h_0 - [b/h_0]) - b\operatorname{sgn}(a/h_0 - [a/h_0]) + b - a
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

где величины $[a/h_0]$ и $[b/h_0]$, при фиксированном h_0, определяются следующим образом

$$
[b/h_0] = \begin{cases}
 & d_p = hp \le a < h(p+1) = d_{p+1}, \quad p = 1,2,\dots,N-1 \\
p, & d_p = hp \le a \le d < d_{p+1}, \qquad p = N \\
 & hN \le d < h(N+1)
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

$$
[a/h_0] = \begin{cases}
 & d_k = hk \le a < h(k+1) = d_{k+1}, \quad k = 1,2,\dots,N-1, \\
k, & d_k = hk \le a \le d < d_{k+1}, \qquad k = N, \\
 & hN \le d < h(N+1)
\end{cases}
\tag{2.18}
$$

При заданных параметрах h_0, d и фиксированном значении переменного b, $h_0 \le b \le d$, функция F представляет собой функцию одного только переменного a, изменяющегося на отрезке $h_0 \le a \le d$, подробно исследованой в [1].

Здесь ограничимся приведением окончательных результатов.

Знак функции F в (2.15) и, следовательно, решение задачи (2.8) определяется таким образом:

$$T^*, d^* = T_0^{(2)}, d_0^{(2)}, \text{ если } F > 0 \iff \tag{2.19}$$

(1) $b = d_p = hp,\ p = 3,\dots,N,$

$d_k = hk < d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < h(k+1) = d_{k+1},$

$k = 1,\dots,p-2$

(2) $d_p = hp < b < h(p+1) = d_{p+1},$

$p = 1,\dots,N-1,$

$d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < d_{k+1},$

$k = 1,\dots,p;\ p = 1,\dots,N-1$

(3) $d_p = hp < b < hp(k+1)/k < h(p+1) = d_{p+1},$

$p = 1,\dots,N-2,$

$d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < d_{k+1},$

$k = p+1,\dots,N-1;\ p = 1,\dots,N-2$

(4) $d_p = hp < b < dp/N,$

$p = 1,\dots,N,$

$d_k = hk < a \le d, \quad k = N$

$$T^*, d^* = T_0^{(2)}, d_0^{(2)} = T_0^{(1)}, d_0^{(1)},\ \text{если}\ F = 0 \Leftrightarrow \tag{2.20}$$

(1) $b = d_p = hp, \quad p = 2,\dots,N,$

$a = d_k^*(p,b), \quad k = 1,\dots,N-1,$

$k = 1,\dots,p-1; \quad p = 2,\dots,N$

(2) $d_p = hp < b < hp(k+1)/k < h(p+1) = d_{p+1},$

$k = p+1,\dots,N-1; \quad p = 1,\dots,N-2.$

$a = d_k^*(p,b) = bk/(p-1),$

$k = p+1,\dots,N-1; \quad p = 1,\dots,N-2$

(3) $d_p = hp < b = dp/N \le d, \quad p = 1,\dots,N,$

$a = d_k^*(p,b) = dp/k, \quad k = N;\ p = 1,\dots,N$

$$T^*, d^* = T_0^{(1)}, d_0^{(1)},\ \text{если}\ F < 0 \Leftrightarrow \tag{2.21}$$

(1) $b = d_p = hp, \quad p = 1,$

$d_k < a \le d_{k+1}, \quad k = 1,\dots,N-1,$

$d_k < a \le d, \quad k = N$

(2) $b = d_p = hp, \quad p = 2,\dots,N,$

$d_k < a < d_k^*(p,b),\ k = 1,\dots,p-1.$

$d_k < a \le d_{k+1}, \quad k = p,\dots,N-1;\ p = 2,\dots,N-1,$

$d_k < a \le d, \quad k = p,\dots,N;\ p = N$

(3) $d_p = hp < b < hp(k+1)/k < h(p+1) = d_{p+1},$

$p = 1,\dots,N-2,$

$d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < d_{k+1},$

$k = p+1,\dots,N-1;\ p = 1,\dots,N-2$

(4) $d_p = hp < dp/N < b \le d,$

$p = 1,\dots,N,$

$d_k = hk < a < d_k^*(p,b) = dp/N \le d,$

$k = N$

Формулы (2.19)-(2.21) позволяют по заданным параметрам задачи h_0, a, b и начальной точки процесса поиска определить оптимальную, в смысле минимальной длины, ломаную из двух исходных траекторий L_1 и L_2.

Предложенные в данной работе способы движения (фиг.1.1, 1.2) могут быть использованы для поисковых движений манипуляционных роботов в случае, когда их динамика описывается уравнением вида (1.1), а рабочая зона поиска представляет собой прямоугольник.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 62-69.
2. Аветисян В.В. О задаче оптимального гарантированного приведения динамической системы в целевую точку в ограниченной области при неполной информации. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. № 3. С.65-71.
3. Avetisyan V.V. The problem of optimal guaranted search and capture of immobile object in rectangular domain. // 10-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Saint Petersburg, Russia. 2002. p. 65-68.

Иститут Механики
НАН РА

Поступила в редакцию
04.04.2002