ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539-3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С НЕСЖИМАЕМЫМ СРЕДНИМ СЛОЕМ

Вирабян Е.Г.

Ե.Գ. Վիրաբյան

Անսեղմելի միջին շերտով եռաշերտ շրջանային օղակաձև սալերի առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Ելնելով առաձգականության տեսության գլանային կոորդինատներով գրված հավասարումներից ասիմպտոտիկ եղանակով արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր սեղմելի և անսեղմելի նյութերից պատրաստված իզոտրոպ բարակապատ կլոր մարմինների լարումների և տեղափոխումների դաշտերի բաղադրիչների որոշման համար: Որոշված են անսեղմելի միջին շերտերով եռաշերտ շրջանային օղակաձև սալերի լարվածադեֆորմացիոն վիճակները, երբ նրանց դիմային մակերևույթների վրա տրված են կինեմատիկական կամ խառը եզրային պայմաններ: Բերված են ռետինամետաղական սեյսմամեկուսիչների աշխատանքը մոդելավորող օրինակներ

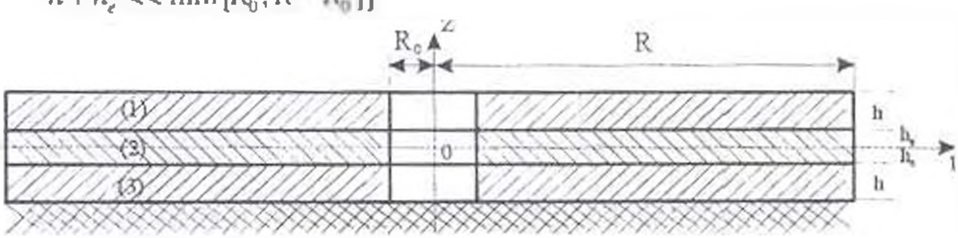
Ye.G. Virabyan

Asymptotic solutions of boundary problems of elasticity theory for three layered round circular plates with incompressible medial layer

Исходя из уравнений теории упругости, в цилиндрических координатах асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы для определения компонентов полей напряжений и перемещений изотропных тонких, круглых тел из сжимаемых и несжимаемых материалов. Определено напряженно-деформированное состояние трехслойных круговых кольцевых пластин с несжимаемым средним слоем, когда на их лицевых поверхностях заданы кинематические и смешанные условия. Приведены примеры, моделирующие работу резинометаллических сейсмоизоляторов.

1. Имеем трехслойную, тонкую круглую кольцевую пластину, отнесенную к цилиндрическим координатам (фиг. 1.).

$$\Omega = \{r, \varphi, z : R_0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, -(h + h_e) \le z \le h + h_e,$$
$$h + h_e << \min\{R_0, R - R_0\}\}$$



Фиг. 1

Считается, что слои (1) и (3) $(h_e \le |z| \le h_e + h)$ из сжимаемого материала $(\vartheta < 1/2)$, а слой $-h_e \le z \le h_e$ – из несжимаемого материала $(\vartheta = 1/2)$.

На лицевых поверхностях пластины заданы кинематические

$$u_j(r, \varphi, z = \pm(h + h_e)) = u_j^{\pm} \qquad j = r, \varphi, z \tag{1.1}$$

или смешанные условия

$$u_j(r,\varphi,z=-h-h_e)=u_j^- \qquad j=r,\varphi,z$$

$$\sigma_{jz}(r,\varphi,z=h+h_e)=\sigma_{jz}^+ \qquad j=r,\varphi,z \tag{1.2}$$

а между слоями выполняются условия полного контакта

$$u_j^{(1)}(r,\varphi,z=h_e)=u_j^{(e)}(r,\varphi,z=h_e),\ u_j^{(3)}(r,\varphi,z=-h_e)=u_j^{(e)}(r,\varphi,z=-h_e)$$

$$\sigma_{jz}^{(1)}(r,\varphi,z=h_e)=\sigma_{jz}^{(e)}(r,\varphi,z=h_e),\sigma_{jz}^{(3)}(r,\varphi,z=-h_e)=\sigma_{jz}^{(e)}(r,\varphi,z=-h_e) \tag{1.3}$$

(Величинам несжимаемого слоя приписан индекс "e").

Граничные условия на торцах $r=R_0$, $r=R$ не приводим, поскольку здесь решается внутренняя задача.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой кольцевой пластины.

Для решения поставленных краевых задач в уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах для сжимаемых и несжимаемых тел [1] переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям и вводим геометрический малый параметр по формулам

$$\xi=r/l,\quad \eta=\varphi,\quad \zeta=z/h_1=\varepsilon^{-1}z/l,\quad u=u_r/l,\quad v=u_\varphi/l,\quad w=u_z/l$$

$$\varepsilon=h_1/l,\quad l=\min\{R_0,R-R_0\},\qquad h_1=h+h_e. \tag{1.4}$$

Получаем две системы сингулярно-возмущенных уравнений, решения которых ищем в виде асимптотических разложений [2-5]

$$Q=\varepsilon^{\chi}\sum_{S=0}^{N}\varepsilon^{S}Q^{(S)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.5}$$

где

$$\chi_{\sigma}=-1,\qquad \chi_u=0 \tag{1.6}$$

для всех напряжений и перемещений слоев из сжимаемого материала и

$$\begin{gathered}\chi_{\sigma_{rr}}=\chi_{\sigma_{\varphi\varphi}}=\chi_{\sigma_{zz}}=-3\\ \chi_{\sigma_{rz}}=\chi_{\sigma_{\varphi z}}=\chi_{\sigma_{r\varphi}}=-2\\ \chi_u=\chi_v=-1,\ \chi_w=0\end{gathered} \tag{1.7}$$

для величин слоя из несжимаемого материала. Подставив (1.5)-(1.7) в сингулярно-возмущенные системы уранений и, методом Пуанкаре, приравняв коэффициенты при ε^S в левых и правых частях, получим непротиворечивые системы уравнений для коэффициентов разложения (1.5). Решив эти системы уравнений и возвратившись к размерным координатам и перемещениям, получим рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжения и вектора перемещения в слоях из сжимаемого материала [4]

$$Q(r,\varphi,z)=\sum_{S=0}^{N}Q^{(S)}(r,\varphi,z)$$

$$\sigma_{jz}^{(S)}=\sigma_{jz0}^{(S)}(r,\varphi)+\sigma_{jz*}^{(S)}(r,\varphi,z) \qquad j=r,\varphi,z$$

$$\sigma_{rr}^{(S)}=\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sigma_{zz0}^{(S)}+\frac{1}{1-\vartheta^2}P_1^{(S)} \qquad (r,\varphi;P_1,P_2)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(S)} = G\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial\varphi} + G\frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial z} - G\frac{u_\varphi^{(S-1)}}{z}$$

$$u_r^{(S)} = u_{r0}^{(S)} + z\frac{1}{G}\sigma_{rz0}^{(S)} + u_{r*}^{(S)}(r,\varphi,z) \quad (r,\varphi)$$

$$u_z^{(S)} = u_{z0}^{(S)}(r,\varphi) + z\frac{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}{E(1-\vartheta)}\sigma_{zz0}^{(S)} + u_{z*}^{(S)}(r,\varphi,z)$$

$$\sigma_{rz*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{\partial\sigma_{rr}^{(S-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^{(S-1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(S-1)}) + F_r^{(S)}\right]dz$$

$$\sigma_{\varphi z*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}^{(S-1)}}{\partial\varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{r} + F_\varphi^{(S)}\right]dz$$

$$\sigma_{zz*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{\partial\sigma_{rz}^{(S-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}^{(S-1)}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(S-1)} + F_z^{(S)}\right]dz \qquad (1.8)$$

$$P_1^{(S)} = 2(1+\vartheta)G\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial r} + 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial\varphi} + 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{1}{r}u_r^{(S-1)} + \vartheta(1+\vartheta)\sigma_{zz*}^{(S-1)}$$

$$P_2^{(S)} = 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial r} + 2(1+\vartheta)G\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial\varphi} + 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{1}{r}u_r^{(S-1)} + \vartheta(1+\vartheta)\sigma_{zz*}^{(S-1)}$$

$$u_{r*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{1}{G}\sigma_{rz*}^{(S)} - \frac{\partial u_z^{(S-1)}}{\partial r}\right]dz, \quad u_{\varphi*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{1}{G}\sigma_{\varphi z*}^{(S)} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(S-1)}}{\partial\varphi}\right]dz$$

$$u_{z*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{1}{2(1+\vartheta)G}\sigma_{zz*}^{(S)} - \frac{\vartheta}{2G(1+\vartheta)(1-\vartheta^2)}(P_1^{(S)} + P_2^{(S)})\right]dz$$

и в слое из несжимаемого материала [5] пластины

$$\sigma_{zz}^{(S)} = \sigma_{zz0}^{(S)} + \sigma_{zz*}^{(S)} \quad (r,\varphi,z), \quad \sigma_{rr0}^{(S)} = \sigma_{\varphi\varphi0}^{(S)} = \sigma_{zz0}^{(S)}$$

$$\sigma_{rz}^{(S)} = \sigma_{rz0}^{(S)} - z\frac{\partial\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial r} + \sigma_{rz*}^{(S)}, \quad \sigma_{\varphi z}^{(S)} = \sigma_{\varphi z0}^{(S)} - \frac{z}{r}\frac{\partial\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial\varphi} + \sigma_{\varphi z*}^{(S)}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(S)} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi^{(S-1)}\right)$$

$$u_r^{(S)} = u_{r0}^{(S)} + \frac{1}{2G}\left(2z\sigma_{rz0}^{(S)} - z^2\frac{\partial\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial r}\right) + u_{r*}^{(S)}$$

$$u_\varphi^{(S)} = u_{\varphi0}^{(S)} + \frac{1}{2G}\left(2z\sigma_{\varphi z0}^{(S)} - \frac{z^2}{r}\frac{\partial\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial\varphi}\right) + u_{\varphi*}^{(S)}$$

$$u_z^{(S)} = u_{z0}^{(S)} + u_{z*}^{(S)} - z\left(\frac{\partial u_{r0}^{(S)}}{\partial r} + \frac{1}{r}u_{r0}^{(S)} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{\varphi0}^{(S)}}{\partial\varphi}\right) -$$

$$
-\frac{z^2}{2G}\left(\frac{\partial\sigma^{(S)}_{rz0}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma^{(S)}_{rz0}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(S)}_{\varphi z0}}{\partial\varphi}-\frac{z}{3}\frac{\partial^2\sigma^{(S)}_{zz0}}{\partial r^2}-\frac{z}{3r}\frac{\partial\sigma^{(S)}_{zz0}}{\partial r}-\frac{z}{3r^2}\frac{\partial^2\sigma^{(S)}_{zz0}}{\partial\varphi^2}\right) \tag{1.9}
$$

$$
\sigma^{(S)}_{zz*}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma^{(S-2)}_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(S-2)}_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\sigma^{(S-2)}_{rz}\right)dz
$$

$$
\sigma^{(S)}_{rr*}=\sigma^{(S)}_{zz*}+4G\frac{\partial u^{(S-2)}_{r}}{\partial r}+\frac{2G}{r}\left(\frac{\partial u^{(S-2)}_{\varphi}}{\partial\varphi}+u^{(S-2)}_{r}\right)
$$

$$
\sigma^{(S)}_{\varphi\varphi*}=\sigma^{(S)}_{zz*}+\frac{4G}{r}\left(\frac{\partial u^{(S-2)}_{\varphi}}{\partial\varphi}+u^{(S-2)}_{r}\right)+2G\frac{\partial u^{(S-2)}_{r}}{\partial r}
$$

$$
\sigma^{(S)}_{rz*}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma^{(S)}_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(S-1)}_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\left(\sigma^{(S)}_{rr}-\sigma^{(S)}_{\varphi\varphi}\right)\right)dz
$$

$$
\sigma^{(S)}_{\varphi z*}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma^{(S-1)}_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(S)}_{\varphi\varphi*}}{\partial\varphi}+\frac{2\sigma^{(S-1)}_{r\varphi}}{r}\right)dz
$$

$$
u^{(S)}_{r*}=\int_0^z\left(\frac{1}{G}\sigma^{(S)}_{rz*}-\frac{\partial u^{(S-2)}_{z}}{\partial r}\right)dz\,,\;u^{(S)}_{\varphi*}=\int_0^z\left(\frac{1}{G}\sigma^{(S)}_{\varphi z*}-\frac{1}{r}\frac{\partial u^{(S-2)}_{z}}{\partial\varphi}\right)dz
$$

$$
u^{(S)}_{z*}=\int_0^z\left(3\alpha\theta-\frac{\partial u^{(S)}_{r*}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u^{(S)}_{\varphi*}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}u^{(S)}_{r*}\right)dz
$$

Общий интеграл поставленных краевых задач, представленный асимптотическим разложением и рекуррентными формулами (1.7),(1.8),(1.9) содержит необходимое количество (18 штук) неизвестных пока функций интегрирования, которые должны определиться из граничных условий и условий контакта слоев (1.1)-(1.3).

2. Применение полученных рекуррентных формул проиллюстрируем на конкретных прикладных задачах.

а) Пусть одна лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а противоположной лицевой поверхности сообщено постоянное нормально сжимающее перемещение

$$
\begin{aligned}
&u_j(r,\varphi,z=-h_e-h)=u_j^-=0\,, && j=r,\varphi,z\\
&u_z(r,\varphi,z=h+h_e)=u_z^+=-\Delta && \\
&u_j(r,\varphi,z=h+h_e)=u_j^+=0\,, && j=r,\varphi
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

После двух шагов итерации для компонентов полей напряжений и перемещений получаем для первого сжимаемого слоя $h_e\le z\le h_e+h$

$$
\sigma^{(1)}_{zz}=\sigma\,,\;\sigma^{(1)}_{rr}=\sigma^{(1)}_{\varphi\varphi}=\frac{\theta}{1-\theta}\sigma\,,\;\sigma^{(1)}_{r\varphi}=\sigma^{(1)}_{\varphi z}=0
$$

$$
\sigma^{(1)}_{rz}=\left[h_e(2\theta-1)-z\theta\right]\frac{1}{1-\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\,,\;u^{(1)}_{\varphi}=0 \tag{2.2}
$$

$$u_r^{(1)} = \left[\frac{(h+h_e)^2 - z^2}{4G(1-\vartheta)} - \frac{(h+h_e-z)(h-h_e)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$u_z^{(1)} = -\Delta + \frac{(z-h-h_e)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)} \sigma$$

для среднего (несжимаемого) слоя $-h_e \le z \le h_e$

$$\sigma_{zz}^e = \sigma_{rr}^e = \sigma_{\varphi\varphi}^e = \sigma, \ \sigma_{r\varphi}^e = \sigma_{\varphi z}^e = 0, \ \sigma_{rz}^e = -z \frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$u_r^e = \frac{h_e^2 - z^2}{2G_e} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{4hh_e(1-\vartheta) + h^2(4\vartheta - 1)}{4G(1-\vartheta)} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \tag{2.3}$$

$$u_z^e = -\frac{1}{2}\Delta + \left[\frac{z(z^2 - 3h_e^2)}{6G_e} - z\frac{4hh_e(1-\vartheta) + h^2(4\vartheta - 1)}{4G(1-\vartheta)} \right] \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)$$

для третьего (сжимаемого) слоя $-h-h_e \le z \le -h_e$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma, \ \sigma_{rr}^{(3)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sigma, \ \sigma_{r\varphi}^{(3)} = \sigma_{\varphi z}^{(3)} = 0, \ u_\varphi^{(3)} = 0$$

$$\sigma_{rz}^{(3)} = -\frac{\vartheta z - h_e(1-2\vartheta)}{1-\vartheta} \frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$u_r^{(3)} = \left[\frac{(h+h_e)^2 - z^2}{4G(1-\vartheta)} - \frac{(h+h_e+z)(h-h_e)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial r} \tag{2.4}$$

$$u_z^{(3)} = \frac{(z+h+h_e)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)} \sigma$$

$$\sigma = -\frac{\Delta G(1-\vartheta)}{(1-2\vartheta)h} + AI_0(r\sqrt{\alpha}) + BK_0(r\sqrt{\alpha})$$

$$A = \frac{\Delta G(1-\vartheta)}{(1-2\vartheta)hD} \left(K_0(R\sqrt{\alpha}) - K_0(R_0\sqrt{\alpha}) \right) \tag{2.5}$$

$$B = \frac{\Delta G(1-\vartheta)}{(1-2\vartheta)hD} \left(I_0(R_0\sqrt{\alpha}) - I_0(R\sqrt{\alpha}) \right)$$

$$D = I_0(R_0\sqrt{\alpha})K_0(R\sqrt{\alpha}) - I_0(R\sqrt{\alpha})K_0(R_0\sqrt{\alpha})$$

$$\alpha = \frac{(1-2\vartheta)h}{G(1-\vartheta)} \left[\frac{h_e h(4(1-\vartheta)h_e - (1-4\vartheta)h)}{2G(1-\vartheta)} + \frac{2h_e^3}{3G_e} \right]^{-1}$$

где $I_0(x) = J_0(ix)$ - бесселева цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого индекса, $K_0(x)$ -соответствующая функция Макдональда [7].

б) Одна лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а противоположной лицевой поверхности сообщено крутящее тангенциальное перемещение

$$u_j(r, \varphi, z = -h - h_e) = u_j^- = 0, \qquad j = r, \varphi, z$$

$$u_\varphi(r, \varphi, z = h + h_e) = u_\varphi^+ = v_\varphi \tag{2.6}$$

$$u_j(r,\varphi,z=h+h_e)=u_j^*=0 \qquad j=r,z.$$

После двух шагов итерации получаем:

для всех слоев $-h-h_e \le z \le h+h_e$

$$\sigma_{zz}=\sigma_{rr}=\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{rz}=\sigma_{r\varphi}=u_z=u_r=0,\ \sigma_{\varphi z}=\frac{GG_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.7}$$

для первого (сжимаемого) слоя $h_e \le z \le h+h_e$

$$u_\varphi^{(1)}=v_*+\frac{(z-h-h_e)G_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.8}$$

для среднего (несжимаемого) слоя $-h_e \le z \le h_e$

$$u_\varphi^{(0)}=\frac{(z+h_e)G+hG_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.9}$$

для третьего (сжимаемого) слоя $-h-h_e \le z \le -h_e$

$$u_\varphi^{(3)}=\frac{(z+h+h_e)G_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.10}$$

Эти результаты могут быть применены в расчетах резинометаллических сейсмоизоляторов [8].

Автор выражает признательность Р.С.Геворкяну за внимание, оказанное при решении задачи и оформлении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Теория упругости. М. ОНТИ, 1937.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В кн. Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В. Об асимптотическом решении краевых задач для полос из несжимаемых материалов.// Докл.НАН Армении 1997. Т.97. N3. С.13-18.
4. Вирабян Е.Г., Геворкян Р.С. Асимптотические решения для краевых задач для круговых кольцевых пластин.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. N2. С.42-49.
5. Геворкян Р.С., Вирабян Е.Г. Асимптотические решения краевых задач теории упругости для круговой кольцевой пластины из несжимаемого материала. // Докл. НАН Армении. 2001. Т.101. N3. С.237-244.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В. К асимптотическому решению пространственной задачи теории упругости для пластин из несжимаемых материалов. // ПММ. 2002. Т.66. Вып.2. С.293-305.
7. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в Бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 459с.
8. Kelly J.M. -Report N$_0$ UCB/EERC-94/03 Mach. 1994, p.59.

Институт меаники
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.09.2002