

УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ
СДВИГОВ И ОБЖАТИЯ¹⁾

Киракосян Р.М.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի հիմնական հավասարումները ընդլայնական սահբերի և սեղմման հաշվառմամբ

Առաջարկվում է միջին խորություն նկատմամբ սխևարիկ փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի հավասարումների մի տարրերակ, որը հաշվի է առնում յնչպես ընդլայնական սահբերի, այնպես էլ ընդլայնական սեղմման ազդեցությունը հաշվային մեծությունների վրա: Բերվում է հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության տակ գտնվող գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-գուսու ծնման խնդրի լուծումը եզրերի հողակալորեն հենման դեպքում: Կատարվում է ստացված արդյունքների վերլուծություն:

R.M. Kirakosyan

Fundamental Equations of Orthotropic Plates of Variable Thickness Taking into Account the Transversal Shears and Normal Compression

Вопросы учета поперечных сдвигов и обжатия для пластин постоянной толщины достаточно обстоятельно и полно рассмотрены в [1]. Аналогичные вопросы для многослойных оболочек переменной жесткости обсуждены в [2] и [3]. В [4] предложен один вариант учета поперечных сдвигов для ортотропных пластин переменной толщины. В настоящей работе делается попытка учитывать влияние как поперечных сдвигов, так и обжатия на напряженно-деформированное состояние ортотропных пластин переменной толщины.

1. Рассмотрим прямоугольную пластину переменной толщины h из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Лицевые поверхности пластины симметричны относительно срединной плоскости. Пластину отнесем к системе декартовых координат x, y, z , оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Пусть на пластину действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивностей которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют X^z, Y^z, Z^z . Знаками "+" и "-" будем отмечать величины, относящиеся к поверхностям пластины $z = +h/2$ и $z = -h/2$ соответственно. Условия опирания и нагружения краев пластины произвольны.

Попытаемся получить основные уравнения, способные учитывать влияние поперечных сдвигов и обжатия на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой пластины.

Будем считать, что поперечные касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластины изменяются по законам квадратных трехчленов

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \quad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3 \quad (1.1)$$

¹⁾ Работа доложена на международной конференции "ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equations and related topics, September 17-21, 2002, Yerevan, Armenia"

где Φ_i, Ψ_i — неизвестные функции координат x, y .

Из условия обеспечения корректности дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды следует, что при (1.1) основные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ должны иметь линейное, а нормальное напряжение σ_z — кубическое распределение по толщине пластины. Проинтегрировав третье дифференциальное уравнение равновесия сплошной среды с учетом (1.1) и соответствующих поверхностных условий пластины, находим:

$$\sigma_z = Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \frac{h^2 - 4z^2}{8} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{z^3}{3} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right), \quad Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2} \quad (1.2)$$

Из обобщенного закона Гука ортотропного тела [1] для основных напряжений получается:

$$\sigma_x = B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y - A_1\sigma_z, \quad \sigma_y = B_{12}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y - A_2\sigma_z, \quad \tau_{xy} = B_{66}\gamma_{xy} \quad (1.3)$$

Здесь

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}, \quad A_2 = a_{23}B_{22} + a_{13}B_{12} \quad (1.4)$$

B_{ij} — параметры, которые выражаются через упругие постоянные материала a_{ij} по известным формулам [1].

Поскольку распределение напряжений σ_x и σ_y по толщине должно быть линейным, то в (1.3) для σ_z вместо (1.2) следует брать его первые три члена, то есть сохранить только главные вклады плоской задачи и задачи изгиба —

$$\sigma_z = Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Этому соответствует линейное распределение деформации ϵ_x , а следовательно, квадратичное распределение нормального перемещения u_z —

$$u_z = w + zw_1 + z^2w_2 \quad (1.6)$$

Здесь w — прогиб срединной плоскости пластины, а w_1 и w_2 — функции координат x, y , подлежащие определению.

Поскольку тангенциальные перемещения по толщине пластины должны иметь линейное распределение, то с использованием (1.1), геометрических соотношений и обобщенного закона Гука [1] для них получим

$$u_x = u - z \left(\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1 \right), \quad u_y = v - z \left(\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\psi_1 \right) \quad (1.7)$$

Здесь u, v — перемещения срединной плоскости по осям x, y . Они представляют главный вклад плоской задачи, а члены с множителем z — главный вклад задачи изгиба пластины.

Важно отметить, что выражения (1.7) отнюдь не означают принятие гипотезы о линейном распределении тангенциальных перемещений по

толщине пластины. Они только означают, что с целью построения простейшей теории для перемещений u и v , следует брать только первые члены выражений τ_x, τ_y . Разумеется, что в рамках этой же теории для других величин необходимо будет брать другое количество членов. Забегая вперед, отметим, что в выражениях напряжений σ_x и σ_y участвуют функции φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 , фигурирующие в первых двух членах τ_x, τ_y . В выражениях же поперечных сдвигов γ_x, γ_y , которые получаются из соответствующих соотношений закона Гука, участвуют уже все три члена (1.1)

Учитывая (1.5) и (1.7), из (1.3) находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - A_1 \left[Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \\ &- z \left[B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{33} B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{11} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ \sigma_y &= B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - A_2 \left[Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \\ &- z \left[B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{33} B_{12} + A_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ \tau_{xy} &= B_{66} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{35} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Имея в виду (1.5) и (1.8), путем интегрирования соответствующего соотношения закона Гука, с учетом (1.6) для функций w_1 и w_2 , получим

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial v}{\partial y} - \Delta_1 \left[Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \\ w_2 &= -\frac{1}{2} \left(A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{13} A_1 + a_{23} A_2 - a_{11}, \quad \Delta_2 = a_{13} (a_{33} B_{11} + A_1) - a_{23} (a_{33} B_{12} + A_2) - a_{13} \\ \Delta_3 &= a_{13} (a_{44} B_{12} + A_1) + a_{23} (a_{44} B_{22} + A_2) - a_{11} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Члены выражения (1.6) $z w_1$ и $z^2 w_2$ характеризуют изменение нормального перемещения u по толщине пластины, обусловленное учетом обжатия. Судя по формулам (1.9), нетрудно убедиться в том, что член $z w_1$ относится к плоской задаче пластины и в значение u он вносит поправку порядка h^2/l^4 , где l — характерный размер пластины в плане. Член же $z^2 w_2$ относится к задаче изгиба и его поправка имеет порядок

h^2/l^2 . Поэтому с целью построения простейшей теории изгиба следует пренебречь членом Zh_1 и для u_2 взять

$$u_2 = w - \frac{z^2}{2} \left(A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \quad (1.11)$$

Из поверхностных условий [4], с учетом (1.1) и (1.8), получим:

$$\begin{aligned} h\varphi_2 = & \frac{1}{4 + A_1(\partial h / \partial x)^2 + A_2(\partial h / \partial y)^2} \left[\left[4 + A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] X_2 - A_1 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} Y_2 - 4A_1 \frac{\partial h}{\partial x} Z_1 + \right. \\ & + \left[4B_{11} + B_{11}A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - B_{12}A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{66} \left[4 + A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + \left[4B_{12} + B_{12}A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - B_{22}A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \Big] \\ h\psi_2 = & \frac{1}{4 + A_1(\partial h / \partial x)^2 + A_2(\partial h / \partial y)^2} \left[\left[4 + A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] Y_2 - A_2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} X_2 - 4A_2 \frac{\partial h}{\partial y} Z_1 + \right. \\ & + \left[4B_{22} + B_{22}A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - B_{12}A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left[4 + A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left[4B_{12} + B_{12}A_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - B_{11}A_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \Big] \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} h^2\varphi_3 = & 4(X_1 - \varphi_1) - h \left\{ \left[B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (a_{44}B_{12} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial x} + B_{66} \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] \frac{\partial h}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2\psi_3 = & 4(Y_1 - \psi_1) - h \left\{ \left[B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{12} + A_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (a_{44}B_{22} + A_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial y} + B_{66} \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

Здесь

$$X_1 = (X^+ - X^-) / 2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-) / 2,$$

$$X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (1.13)$$

С учетом (1.8) для усилий и моментов пластины имеем

$$\begin{aligned}
T_x &= h \left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha_4 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] \\
T_y &= h \left[\beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta_4 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] \\
S_{xy} &= B_{66} h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
N_x &= \frac{1}{3h} \left[h^2 (2\varphi_1 + X_1) + 3 \left(M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \\
N_y &= \frac{1}{3h} \left[h^2 (2\psi_1 + Y_1) + 3 \left(M_y \frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \\
M_x &= -\frac{h^3}{12} \left[B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{12} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\
M_y &= -\frac{h^3}{12} \left[B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{12} + A_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\
M_{xy} &= -\frac{h^3}{12} B_{66} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= B_{11} - \alpha_4 \left[B_{11} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{12} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \beta_1 = B_{12} - \beta_4 \left[B_{11} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{12} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\alpha_2 &= B_{12} - \alpha_4 \left[B_{12} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{22} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \beta_2 = B_{22} - \beta_4 \left[B_{12} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{22} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\alpha_3 &= -2B_{66} \alpha_4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \beta_3 = -2B_{66} \beta_4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \\
\alpha_4 &= \frac{A_1}{4 + A_1 (\partial h / \partial x)^2 + A_2 (\partial h / \partial y)^2}, \quad \beta_4 = \frac{A_2}{4 + A_1 (\partial h / \partial x)^2 + A_2 (\partial h / \partial y)^2}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Подставляя выражения внутренних усилий и моментов (1.14) в уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластины, после некоторых преобразований приходим к следующим системам разрешающих дифференциальных уравнений:

а) Система плоской задачи

$$\begin{aligned}
 & h \left[\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + (\alpha_2 + B_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial(\alpha_1 h)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \\
 & + \left[\alpha_2 \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\alpha_1 h)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \\
 & = -X_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_1 h \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & h \left[\beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\beta_1 + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial(\beta_1 h)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\
 & + \left[\beta_2 \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial \beta_1}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\beta_1 h)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \\
 & = -Y_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_1 h \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

б) Система задачи изгиба

$$\begin{aligned}
 & h^2 \left[B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
 & - h \left[8 + h \left(a_{55} B_{11} + A_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (a_{55} B_{12} + A_2) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + \left[8 + h \left(a_{44} B_{12} + A_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \\
 & - 2B_{66} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - 16 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \psi_1 \right) = \\
 & = 4 \left[3Z_2 + h \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) - X_1 \frac{\partial h}{\partial x} - Y_1 \frac{\partial h}{\partial y} \right] \\
 & h^2 \left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + 2h \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
 & - h^2 \left[(a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + B_{66} a_{55} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + (a_{44} B_{12} + a_{44} B_{66} + A_1) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] - \\
 & - 2h \left[(a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{66} a_{55} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + (a_{44} B_{21} + A_1) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \right. \\
 & \left. + B_{66} a_{44} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] + 8\varphi_1 = 8X_1 \quad (1.17)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& h^2 \left[B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2h \left[B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial h}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - h^2 \left[(a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + B_{66} a_{44} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + (a_{55} B_{12} + a_{55} B_{66} + A_2) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] - \\
& - 2h \left[(a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + B_{66} a_{44} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + (a_{55} B_{12} + A_2) \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \right. \\
& \left. + B_{66} a_{55} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] + \delta \psi_1 = \delta Y_1
\end{aligned}$$

Имея в виду (1.14) из (1.1) для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{xy} , получим:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= \frac{12z^2 - h^2}{2h^2} X_1 + \frac{z}{h} X_2 + \frac{z}{h^2} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} + S_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{SN_x}{J} + \\
& + \frac{h}{4J} \left(1 - \frac{sh}{J} \right) \left(M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\
\tau_{xy} &= \frac{12z^2 - h^2}{2h^2} Y_1 + \frac{z}{h} Y_2 + \frac{z}{h^2} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} + S_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{SN_y}{J} + \\
& + \frac{h}{4J} \left(1 - \frac{sh}{J} \right) \left(M_y \frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad s = \frac{h^2 - 4z^2}{8}, \quad J = \frac{h^3}{12}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами, соответствующими классической теории пластин переменной толщины. Учет поперечных сдвигов и обжатия сказывается только на значениях внутренних усилий и моментов. Выражения же поперечных касательных напряжений через силовые факторы пластины остаются без изменений.

2 Система уравнений плоской задачи (1.16) имеет четвертый порядок, а система уравнений задачи изгиба (1.17) — шестой. В соответствии с этим на каждой стороне края пластины необходимо ставить по два условия для плоской задачи, по три — для задачи изгиба. Эти условия можно сформулировать традиционно [4], используя выражения усилий и моментов (1.14) и перемещений (1.7), (1.11).

Ради простоты рассмотрим только один из возможных вариантов условий шарнирного опирания края $x = \text{const}$.

а) Условия плоской задачи

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha_3 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) = 0, \quad (T_x = 0) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (S_{xy} = 0)$$

б) Условия задачи изгиба

$$B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{12} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad (M_x = 0)$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{35} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad (M_{xx} = 0) \quad (2.2)$$

$$w - \frac{z_0^2}{2} \left(A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = 0, \quad \left(u_z \Big|_{z=z_0} = 0 \right)$$

Здесь $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$ — линия опирания края пластины.

Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния ортотропной пластины переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия сводится к нахождению пяти функций w, φ_1, ψ_1 , для чего необходимо проинтегрировать уравнения плоской задачи (1.16) и задачи изгиба (1.17) при соответствующих краевых условиях.

Нетрудно заметить, что поправки от поперечных сдвигов и от нормального напряжения σ_z имеют одинаковый порядок h^2/l^2 . В том, что эти поправки должны иметь одинаковый порядок, можно убедиться из того факта, что члены с a_{44}, a_{55} , представляющие влияние поперечных сдвигов и члены с A_1, A_2 , представляющие влияние напряжения σ_z , как в разрешающих уравнениях, так и в краевых условиях задачи фигурируют одинаково, как отдельные слагаемые. А то, что поправка от поперечных сдвигов имеет порядок h^2/l^2 , общеизвестно.

Полагая $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, получим случай, при котором влияние обжатия пренебрегается и учитывается только влияние поперечных сдвигов.

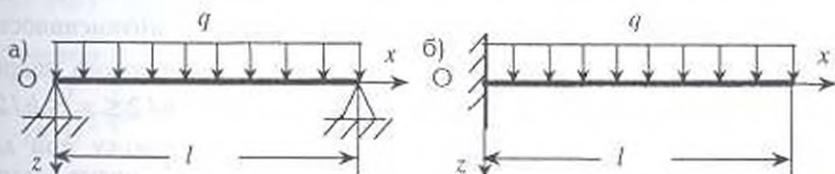


Таблица 1

По предлагаемой теории	а) $\frac{5ql^4}{32B_{11}h^3} \left[1 + 2 \frac{6}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} - \nu \frac{6}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$
По теории [1]	а) $\frac{5ql^4}{32B_{11}h^3} \left[1 + 2 \frac{24}{25(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} - \nu \frac{24}{25(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$
По предлагаемой теории	б) $\frac{3ql^4}{2B_{11}h^3} \left[1 + 2 \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} + \nu \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$
По теории [1]	б) $\frac{3ql^4}{2B_{11}h^3} \left[1 + 3 \frac{2}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} + \nu \frac{2}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$

3. В табл. 1 представлены значения максимальных прогибов срединной плоскости изотропной пластины — полосы постоянной толщины для двух случаев. Эти значения подсчитаны на основе предлагаемой теории при $z_0 = 0$ и по теории [1].

Внутри больших скобок фигурируют три слагаемые. Первая из них, т.е. "1", относится к классической теории пластин, вторая слагаемая представляет вклад поперечного сдвига, а последняя слагаемая — вклад нормального напряжения σ_z . Данные таблицы приводят к следующим заключениям.

1. Для каждой задачи качественный характер поправки от σ_z по обеим теориям одинаков. Причем, для шарнирно-опертой полосы (случай а)) учет σ_z приводит к уменьшению, а для консольной полосы (случай б)) — к увеличению максимального прогиба.

2. По обеим теориям поправки от поперечного сдвига в несколько раз превосходят поправки от σ_z .

3. Отношение величин поправок от поперечного сдвига к величине поправок от σ_z по предложенной теории в обоих случаях составляет $2/\nu$. По теории же [1] это отношение равно в случае а) $2/\nu$, а в случае б) $3/\nu$.

Таким образом, в рассмотренных случаях значения поправок от σ_z , по обеим теориям как по характеру, так и по величине мало отличаются друг от друга. Несмотря на это, естественно ожидать, что в общем случае картина может существенно измениться в зависимости от типа задачи, характера анизотропии и изменения толщины пластины.

4. В качестве приложения рассмотрим пластину — полосу шириной l , толщина которой изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 x, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.1)$$

Здесь h_0 и h_1 — заданные постоянные. Пусть пластина — полоса несет равномерно распределенную нормальную нагрузку интенсивности q , приложенную на поверхности $z = -h/2$. Пластина — полоса шарнирно оперта вдоль линий $x = 0, z = z_0$ и $x = l, z = z_0$, где $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$.

Ограничимся рассмотрением задачи изгиба, поскольку при данной нагрузке и краевых условиях деформирование носит характер доминирующего изгиба. Примем обезразмеривающие обозначения

$$x = \bar{x}, \quad z = h_0 \bar{z}, \quad h_0/l = s, \quad h_1/s = \gamma, \quad H = h_0 H, \quad \bar{H} = 1 + \gamma \bar{x}, \quad w = h_0 \bar{w} \quad (4.2)$$

$$u_z = h_0 \bar{u}_z, \quad q = B_{11} \bar{q}, \quad a_{55} B_{11} = \chi, \quad \bar{\Delta}_z = B_{11} \bar{\Delta}_z, \quad \varphi_1 = B_{11} \bar{\varphi}_1, \quad \beta = 1 + \gamma$$

Третье дифференциальное уравнение системы (1.17) удовлетворяется тождественно, а ее первые два уравнения в обозначениях (4.2) принимают вид:

$$H \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} + 2\gamma \bar{\varphi}_1 = -\frac{3\bar{q}}{2s} \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left\{ H \left[s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - (\chi + A_1) \right] \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right\} + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^2} = 0$$

Краевые условия будут

$$\left[s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - (\chi + A_1) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right] \Big|_{\bar{x}=1}^{\bar{x}=0} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0 \right) \quad (4.4)$$

$$\left[2\bar{w} - s\bar{z}_0^2 \left(A_1 s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \bar{\Delta}_2 \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) \right] \Big|_{\bar{x}=1}^{\bar{x}=0} = 0, \quad \left(u_z \Big|_{\bar{x}=1, \bar{z}=\bar{z}_0}^{\bar{x}=0, \bar{z}=\bar{z}_0} = 0 \right)$$

Общее решение системы (4.3) имеет вид:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{C_1}{H^2} - \frac{3\bar{q}}{4\gamma s} \quad (4.5)$$

$$\bar{w} = \frac{6\bar{q}}{h_1^4} \left[(1+H) \ln H - \gamma \bar{x} \right] + C_1 \frac{4 - (\chi + A_1) h_1^2}{h_1^3 H} - C_2 \frac{s}{h_1^2} \ln H + C_3 \bar{x} + C_4$$

Удовлетворив краевым условиям (4.4), для постоянных интегрирования C_i находим:

$$C_1 = \frac{3\bar{q}\beta}{4h_1}, \quad C_2 = -\frac{6\bar{q}\beta}{sh_1^2}$$

$$C_3 = \frac{C_1}{h_1^3} \left\{ 4 - (\chi + A_1) h_1^2 \left[A_1 h_1 \bar{z}_0^2 - 1 \right] + h_1^4 \bar{\Delta}_2 \bar{z}_0^2 \right\} + \frac{A_1 s \bar{z}_0^2 C_2}{2}$$

$$C_4 = \frac{3A_1 \bar{z}_0^2}{h_1 s \beta^2} \bar{q} + \frac{6\bar{q}}{h_1^4} \left[\gamma - (1+\beta) \ln \beta \right] - \frac{C_1}{h_1^3 \beta^3} \left\{ 4 - (\chi + A_1) h_1^2 \left[\beta^2 - A_1 h_1^2 \bar{z}_0^2 \right] - h_1^4 \bar{\Delta}_2 \bar{z}_0^2 \right\} + \frac{C_2 s}{2h_1^2 \beta^2} \left(A_1 h_1^2 \bar{z}_0^2 + 2\beta^2 \ln \beta \right) - C_3 \quad (4.6)$$

С учетом (1.11), (4.2) и (4.5) для нормального перемещения получим:

$$\bar{u}_z = -\frac{3\bar{q}}{sh_1^4 H^2} \left\{ 2sH^2 \left[\gamma \bar{x} - (1+H) \ln H \right] + A_1 h_1^3 \bar{x} \bar{z}^2 \right\} + C_3 \bar{x} + C_4 + \frac{C_1}{h_1^3 H^3} \left\{ H^2 - A_1 h_1^3 \bar{x} \bar{z}^2 \right\} \left[4 - (\chi + A_1) h_1^2 \right] - h_1^4 \bar{\Delta}_2 \bar{z}^2 \left\} - \frac{C_2 s}{2h_1^2 H^2} \left(2H^2 \ln H + A_1 h_1^2 \bar{z}^2 \right) \quad (4.7)$$

5. Рассмотрим численный пример для изотропной и ортотропной полос линейно-переменной толщины. В табл. 2 и 3 представлены значения безразмерной координаты сечения максимального прогиба срединной плоскости полосы \bar{x}_m . Представлены также значения относительного нормального перемещения u_z как для точек срединной плоскости ($\bar{z} = 0$), так и для крайних точек сечения \bar{x}_m ($\bar{z} = \pm 0.5$). Рассмотрены случаи как пренебрежения, так и учета поперечного сдвига и обжатия при двух положениях линии шарнирного опирания краев полосы. В одном случае линия опирания находится на срединной плоскости ($\bar{z}_0 = 0$), а в другом — на одной из лицевых поверхностей ($\bar{z}_0 = \pm 0.5$). Результаты, полученные без учета поперечного сдвига, помещены в столбцах $\chi = 0$.

Табл. 2 относится к случаю изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$, при котором $A_1 = -0.5$, $\bar{\Delta}_2 = -2.25$, $\chi = 3$. Табл. 3 относится к случаю ортотропного материала, модуль Юнга которого в

поперечном направлении в 3 раза меньше, чем в направлении оси x . Для этого материала $A_1 = -1$, $\Delta_1 = -5$, $\chi = 5$. В обоих случаях геометрические параметры полосы одинаковы: относительная толщина на тонком краю равна $1/6$, а на толстом $-1/4$ ($s = 1/6$, $h_1 = 1/12$, $\gamma = 1/2$). Для иллюстрационного примера выбор такой, достаточно толстой пластины — полосы оправдывается тем, что в этом случае поправки от поперечного сдвига и обжатия окажутся существенно ощутимыми, что позволяет судить об их качественном и количественном влияниях. Приведенные в таблицах результаты соответствуют нагрузке $\bar{q} = 5 \cdot 10^{-3}$, что не важно, поскольку значения \bar{x}_m не зависят от \bar{q} , а значения \bar{w} прямо пропорциональны ей.

Таблица 2

			$\bar{z}_0 = 0$		$\bar{z}_0 = \pm 0.5$	
			$\chi = 0$	$\chi = 3$	$\chi = 0$	$\chi = 3$
$\bar{w}_c \cdot 10^2$	\bar{x}_m	Без обжатия	0.4646	0.4629	0.4646	0.4629
		С обжатием	0.4649	0.4632	0.4654	0.4633
	$\bar{z} = 0$	Без обжатия	53.700	61.877	53.700	61.877
		С обжатием	52.338	60.513	52.102	60.419
	$\bar{z} = \pm 0.5$	Без обжатия	53.700	61.877	53.700	61.877
		С обжатием	51.628	59.690	51.392	59.596

Таблица 3

			$\bar{z}_0 = 0$		$\bar{z}_0 = \pm 0.5$	
			$\chi = 0$	$\chi = 5$	$\chi = 0$	$\chi = 5$
$\bar{w}_c \cdot 10^2$	\bar{x}_m	Без обжатия	0.4646	0.4620	0.4646	0.4620
		С обжатием	0.4653	0.4624	0.4665	0.4626
	$\bar{z} = 0$	Без обжатия	53.700	67.328	53.700	67.328
		С обжатием	50.976	64.602	50.408	64.507
	$\bar{z} = \pm 0.5$	Без обжатия	53.700	67.328	53.700	67.328
		С обжатием	49.632	62.879	49.067	62.784

Анализ результатов таблиц показывает, что влияние анизотропии материала проявляется только количественно. Для случаев изотропной и анизотропной полос приходим к следующим, качественно одинаковым, заключениям:

1. Учет поперечного сдвига приводит к незначительному смещению сечения \bar{x}_m в сторону тонкого края пластины, а учет обжатия, наоборот — к незначительному смещению этого сечения в сторону толстого края.
2. Учет поперечного сдвига увеличивает максимальное значение \bar{w}_c в случае изотропного материала примерно на 15%, а в случае ортотропного материала — примерно на 25%. Учет обжатия, наоборот, уменьшает значение \bar{w}_c . Причем, это уменьшение для всех \bar{z} не превосходит в случае изотропного материала 4.2%, а в случае ортотропного — 8.5%. Интересно отметить, что в случае изотропной полосы отношение поправок, вносимых в значения максимального прогиба срединной плоскости от поперечного сдвига и обжатия,

совпадает с отношением этих поправок, соответствующих полосе постоянной толщины. На самом деле, при $\bar{z} = 0$ отмеченная поправка только от поперечного сдвига составляет 15.23%, а только от обжатия – 2.54%, т.е. в $2/\nu = 6$ раза меньше.

3. При учете обжатия изменение месторасположения линии опирания краев слабо влияет на значение \bar{u}_z . В случае изотропного материала это влияние составляет 0.5%, а для ортотропного – 1.2%. Причем большее значение \bar{u}_z получается, когда $\bar{z}_0 = 0$, т.е. при нахождении линии опирания на срединной плоскости.
4. При учете обжатия значение \bar{u}_z с удалением от срединной плоскости уменьшается. В случае изотропного материала это уменьшение не превосходит 1.4%, а в случае ортотропного – 2.4%.

В заключение отметим, что как влияние обжатия, так и обусловленное им влияние месторасположения линии опирания полосы могут существенно возрастать при уменьшении относительного модуля Юнга материала в поперечном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова Думка, 1981. 544с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: 2002. С.155 – 166.
4. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА, 2000. 122с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.09.2002