ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика

УДК 621.38

КИНЕМАТИКА МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМ ПОСЛЕДНИМ ЗВЕНОМ

Гукасян А. А.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Վերջին առաձգական օղակով բազմօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկան

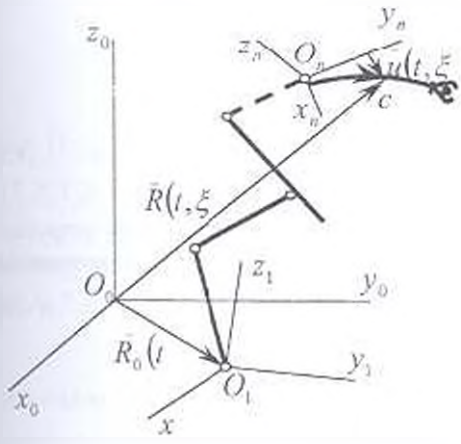
Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում ուսումնասիրվում է բազմօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկան. Ստացված են կինեմատիկական առնչություններ վերջին առաձգական օղակի ազդեցությունները

A. A .Ghukasyan

The Kinematics of Multilink Manipulator with a Flexible Last Link

Методом линейной теории упругости нерастяжимых стержней исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора. Определено влияние упругости последнего звена на кинематику движения.

Исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора, последнее звено которого моделируется как упругий нерастяжимый стержень (фиг.1). В конце упругого звена расположен схват с грузом. Не ограничивая общность, предполагается, что манипулятор находится на подвижном основании и все соединительные шарниры идеально-цилиндрические. Система координат $O_0X_0Y_0Z_0$ является инерциальной, $O_1X_1Y_1Z_1$ связана с основанием и $O_nX_nY_nZ_n$ – с последним упругим звеном. Ось O_nY_n совпадает с недеформированным состоянием упругого звена.



Фиг.1

Кинематика движения манипулятора с абсолютно твердыми звеньями и идеальными цилиндрическими шарнирами достаточно подробно исследована[1,2]. Считая, что в пространстве известно движение основания последнего упругого звена манипулятора, для определенности исследуется влияние упругой податливости последнего звена на кинематику движения манипулятора.

1. Положение точек упругого звена. Радиус-вектор произвольной точки упругого звена манипулятора в инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{R}(t,\xi)=\mathbf{R}_0(t)+\mathbf{R}_1(t)+\mathbf{R}_2(t,\xi) \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{R}_0(t)=(x_0(t),y_0(t),z_0(t))^T$ – радиус-вектор точки O_1 (основания) относительно начала координат инерциальной системы $O_0X_0Y_0Z_0$, $\mathbf{R}_1(t)=(x_1(t),y_1(t),z_1(t))^T$ – радиус-вектор основания упругого звена (точки O_1) относительно точки O_1 системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, $\mathbf{R}_2(t,\xi)$ – радиус-вектор точки С нейтральной линии упругого звена в момент времени t $(\xi\in[0,l])$ относительно точки O_1 в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$, l – длина упругого звена.

Обозначая через $\mathbf{u}(t,\xi)$ вектор упругой деформации нейтральной линии звена манипулятора в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$, $\mathbf{R}_2(t,\xi)$ можно представить в виде

$$\mathbf{R}_2(t,\xi)=(u_1(t,\xi),\xi+u_2(t,\xi),u_3(t,\xi))^T \qquad (1.2)$$

Условие нерастяжимости упругого звена манипулятора приводит к некоторому соотношению между функциями $u_1(t,\xi),u_2(t,\xi),u_3(t,\xi)$, представляющими здесь уравнение связи [3]. Эту связь мы получим, предполагая, что длина $d\xi$ элемента упругого звена остается неизменной после деформации.

$$(d\xi)'=\sqrt{\left[\frac{\partial u_1(t,\xi)}{\partial\xi}\right]^2+\left[1+\frac{\partial u_2(t,\xi)}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial u_3(t,\xi)}{\partial\xi}\right]^2}\,d\xi \qquad (1.3)$$

Так как $(d\xi)'=d\xi$, то

$$\left[\frac{\partial u_1(t,\xi)}{\partial\xi}\right]^2+\left[1+\frac{\partial u_2(t,\xi)}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial u_3(t,\xi)}{\partial\xi}\right]^2=1$$

или

$$\frac{\partial u_2(t,\xi)}{\partial\xi}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_2(t,\xi)}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1(t,\xi)}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3(t,\xi)}{\partial\xi}\right)^2\right] \qquad (1.4)$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых отклонений упругого звена от недеформированного состояния, будем считать, что компоненты вектора упругой деформации $\mathbf{u}(t,\xi)=(u_1(t,\xi),u_2(t,\xi),u_3(t,\xi))^T$ и их производные по ξ и по t – малые величины.

Считая $u_1(t,\xi),u_3(t,\xi),u_1'(t,\xi),\dot{u}_1(t,\xi),u_3'(t,\xi),\dot{u}_3(t,\xi)$ малыми величинами первого порядка относительно длины упругого звена

$$u_i(t,\xi)\sim\varepsilon,\quad u_i'(t,\xi)\sim\varepsilon,\quad \dot{u}_i(t,\xi)\sim\varepsilon\quad(\varepsilon<<1)\quad(i=1,3) \qquad (1.5)$$

следует на основании (1.4) принять, что $u_2(t,\xi),u_2'(t,\xi)$ и $\dot{u}_2(t,\xi)$ имеют второй порядок малости

$$u_2(t,\xi)\sim\varepsilon^2,\quad u_2'(t,\xi)\sim\varepsilon^2,\quad \dot{u}_2(t,\xi)\sim\varepsilon^2 \qquad (1.6)$$

Следовательно, пренебрегая величиной $(u_1'(t,\xi))^2$, как четвертого порядка малости (ε^4), можно условия нерастяжимости (1.4) записать в

виде

$$u_2'(t,\xi) = -\frac{1}{2}\left[(u_1'(t,\xi))^2 + (u_3'(t,\xi))^2\right] \tag{1.7}$$

(производные по ξ обозначены штрихом, а по t - точкой)

Оставляя в выражениях (1.1), (1.2) величины, порядок которых не превышает ε, вектор $\mathbf{R}_2(t,\xi)$ в системе координат $O_nX_nY_nZ_n$ можно представить в виде

$$\mathbf{R}_2(t,\xi) = (u_1(t,\xi), \xi, u_3(t,\xi))^T \tag{1.8}$$

то есть вектор упругой деформации $\mathbf{u}(t,\xi)$ перпендикулярен к недеформированному состоянию последнего звена [4].

Направляющие косинусы углов между осями систем координат $O_nX_nY_nZ_n$ и $O_1X_1Y_1Z_1$ зададим при помощи табл. 1.

Таблица 1

	x_1	y_1	z_1
x_n	$\alpha_{11}^{(1)}$	$\alpha_{12}^{(1)}$	$\alpha_{13}^{(1)}$
y_n	$\alpha_{21}^{(1)}$	$\alpha_{22}^{(1)}$	$\alpha_{23}^{(1)}$
z_n	$\alpha_{31}^{(1)}$	$\alpha_{32}^{(1)}$	$\alpha_{33}^{(1)}$

Здесь через $\alpha_{ij}^{(1)}$ $(i, j = 1,2,3)$ обозначены

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{(1)} &= \cos(O_nX_n, O_1X_1) = (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_n) \\
\alpha_{12}^{(1)} &= \cos(O_nX_n, O_1Y_1) = (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_n) \\
\alpha_{13}^{(1)} &= \cos(O_nX_n, O_1Z_1) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{33}^{(1)} &= \cos(O_nZ_n, O_1Z_1) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_n)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ и $(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n)$ – единичные векторы осей системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_nX_nY_nZ_n$, соответственно.

В соответствии с (1.1) и (1.9), положение точек упругого звена манипулятора относительно связанной с основанием системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ $(\mathbf{R}_1(t,\xi) = \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_2(t,\xi))$, можно представить в виде

$$\mathbf{R}_1(t,\xi) = \Gamma_{(1)}^T \mathbf{R}_2(t,\xi) + \mathbf{R}_1(t) \tag{1.10}$$

где

$$\Gamma_{(1)}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{31}^{(1)} \\ \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{32}^{(1)} \\ \alpha_{13}^{(1)} & \alpha_{23}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

В однородных координатах преобразование (1.10) имеет вид [5]

$$\mathbf{R}_1(t,\xi) = \mathbf{T}_{(1)}\mathbf{R}_2(t,\xi) \tag{1.12}$$

где матрица $\mathbf{T}_{(1)}$ размера (4x4) имеет следующую структуру:

$$\mathbf{T}_{(1)} = \begin{pmatrix} \Gamma^T_{(1)} & \vdots & \mathbf{R}_1(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Для определения положения точек упругого звена относительно инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, составим таблицу направляющих косинусов углов между осями координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_0X_0Y_0Z_0$.

Таблица 2

	x_0	y_0	z_0
x_1	$\alpha^{(2)}_{11}$	$\alpha^{(2)}_{12}$	$\alpha^{(2)}_{13}$
y_1	$\alpha^{(2)}_{21}$	$\alpha^{(2)}_{22}$	$\alpha^{(2)}_{23}$
z_1	$\alpha^{(2)}_{31}$	$\alpha^{(2)}_{32}$	$\alpha^{(2)}_{33}$

где

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)}_{11} &= \cos(O_1X_1, O_0X_0) = (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0) \\ \alpha^{(2)}_{12} &= \cos(O_1X_1, O_0Y_0) = (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0) \\ \alpha^{(2)}_{13} &= \cos(O_1X_1, O_0Z_0) = (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha^{(2)}_{33} &= \cos(O_1Z_1, O_0Z_0) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0) \end{aligned} \tag{1.14}$$

$(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ – единичные векторы осей системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ соответственно.

Вектор $\mathbf{R}_1(t,\xi)$ (1.10) в системе $O_0X_0Y_0Z_0$ имеет вид

$$\mathbf{R}(t,\xi) = \Gamma^T_{(2)}\mathbf{R}_1(t,\xi) + \mathbf{R}_0(t) \tag{1.15}$$

где

$$\Gamma^T_{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(2)}_{11} & \alpha^{(2)}_{21} & \alpha^{(2)}_{31} \\ \alpha^{(2)}_{12} & \alpha^{(2)}_{22} & \alpha^{(2)}_{32} \\ \alpha^{(2)}_{13} & \alpha^{(2)}_{23} & \alpha^{(2)}_{33} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Подставляя (1.12) в (1.15), получим

$$\mathbf{R}(t,\xi) = \Gamma^T_{(2)}\Gamma^T_{(1)}\mathbf{R}_2(t,\xi) + \Gamma^T_{(2)}\mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_0(t) \tag{1.17}$$

или в однородных координатах

$$\mathbf{R}(t,\xi) = \mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{T}_{(1)}\mathbf{R}_2(t,\xi) \tag{1.18}$$

Здесь

$$\mathbf{T}_{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma^T_{(2)} & \vdots & \mathbf{R}_0(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}_{(1)} = \begin{pmatrix} \Gamma^T_{(1)} & \vdots & \mathbf{R}_1(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(t,\xi)=(x(t,\xi),y(t,\xi),z(t,\xi),1)^T$$
$$\mathbf{R}_2(t,\xi)=(u_1(t,\xi),\xi,u_3(t,\xi),1)^T$$

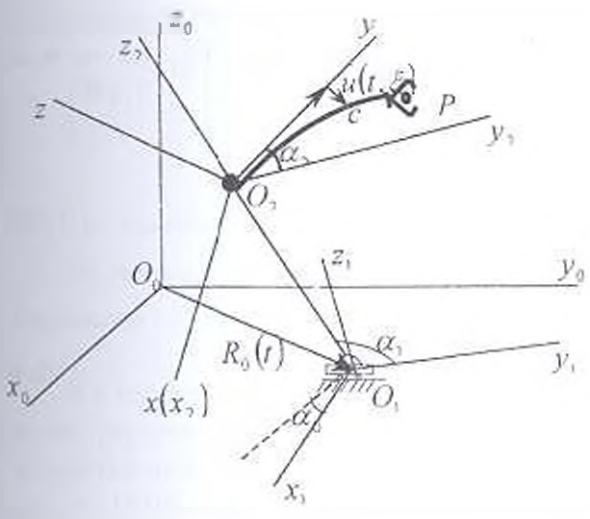
Поскольку в линейной теории упругости $\mathbf{R}_2(t,\xi)$ определяется согласно (1.8) то выражения (1.17) или (1.18), позволяют положение точек упругого звена манипулятора в инерциальной системе координат представить в рамках жесткой модели, путем добавления малых величин порядка ε $(\varepsilon << 1)$, то есть

$$\mathbf{R}(t,\xi)=\mathbf{\Gamma}^1_{(2)}\cdot\mathbf{\Gamma}^T_{(1)}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{\Gamma}^T_{(2)}\mathbf{R}_1(t)+\mathbf{R}_0+\mathbf{\Gamma}^T_{(2)}\cdot\mathbf{\Gamma}^T_{(1)}\cdot\begin{pmatrix}u_1(t,\xi)\\ 0\\ u_3(t,\xi)\end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

или

$$\begin{pmatrix}\mathbf{R}(t,\xi)\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Gamma}^T_{(2)} & \vdots & \mathbf{R}_c(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{\Gamma}^T_{(1)} & \vdots & \mathbf{R}_1(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\ \xi\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1(t,\xi)\\ 0\\ u_3(t,\xi)\end{pmatrix}\right] \qquad (1.20)$$

2. Моделирование движений двухзвенного упругого манипулятора на подвижном основании. Механическая модель манипулятора состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг.2). Рука состоит из двух звеньев, соединенных шарниром O_2. Первое звено соединено шарниром с платформой и является абсолютно твердым телом. Второе звено манипулятора является упругим нерастяжимым стержнем, на конце которого расположен схват с грузом. Соединительные шарниры – идеально цилиндрические. Основания механической руки может перемещаться в горизонтальной плоскости $O_0X_0Y_0$.



Фиг 2.

Манипулятор имеет пять степеней свободы, движение по которым осуществляется посредством электромеханических приводов [6].

Для описания движений манипулятора введем инерциальную $O_0X_0Y_0Z_0$ и неинерциальные $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ системы координат. Введем обозначения: l_1 – длина первого звена; l_2 – длина второго звена; $\mathbf{R}(t)=(x_0(t),y_0(t),0)^T$ – радиус-вектор основания относительно системы

координат $O_0X_0Y_0Z_0$; α_0 – угол между осями O_0X_0 и O_1X_1 (α_0 – угол поворота манипулятора относительно оси O_0Z_0); α_1 – угол поворота первого звена относительно платформы; α_2 – угол поворота второго упругого звена относительно оси O_2Y_2 (α_2 – угол между касательной O_2X к упругому звену O_2P в точке O_2 и осью O_2Y_2); $\mathbf{u}(t,\xi)$ – вектор упругой деформации второго звена в системе $O_2X_2Y_2Z_2$; $\mathbf{R}_1(t,\xi)$ – радиус-вектор точки нейтральной линии второго звена с координатой ξ $(0 \le \xi \le l_2)$ в момент времени t относительно точки O_1 в системе $O_1X_1Y_1Z_1$; а $\mathbf{R}(t,\xi)$ – радиус-вектор той же точки относительно точки O_0 в инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

$$\mathbf{R}(t,\xi) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{R}_1(t,\xi) \tag{2.1}$$

Предполагается, что вектор упругих смещений второго звена мал по сравнению с его длиной $|\mathbf{u}(t,\xi)|/l_2 = o(\varepsilon)$, $\varepsilon << 1$ и перпендикулярно к недеформированному состоянию.

Радиус-вектор точки C ($\mathbf{R}_c(t,\xi)$) в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$ имеет вид

$$\mathbf{R}_c(t,\xi) = \Gamma_{(1)}^{T}\mathbf{R}_2(t,\xi) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{R}_2(t,\xi) = (u_1(t,\xi), \xi, u_3(t,\xi))^T$, а матрица перехода $\Gamma_{(1)}^{T}$ от системы O_1XYZ к системе $O_1X_1Y_1Z_1$ является

$$\Gamma_{(1)}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{R}_c(t,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t,\xi) \\ \xi \\ u_3(t,\xi) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_c(t,\xi))_{x_2} &= u_1(t,\xi) \\ (\mathbf{R}_c(t,\xi))_{y_2} &= \xi\cos\alpha_2 - u_3(t,\xi)\sin\alpha_2 \\ (\mathbf{R}_c(t,\xi))_{z_2} &= \xi\sin\alpha_2 + u_3(t,\xi)\cos\alpha_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Поскольку оси систем координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_1X_1Y_1Z_1$ параллельны, то радиус-вектор точки C относительно точки O_1 имеет вид

$$\mathbf{R}_1(t,\xi) = \begin{pmatrix} u_1(t,\xi) \\ l_1\cos\alpha_1 + \xi\cos\alpha_2 - u_3(t,\xi)\sin\alpha_2 \\ l_1\sin\alpha_1 + \xi\sin\alpha_2 + u_3(t,\xi)\cos\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Проекции радиус-вектора $\mathbf{R}(t,\xi)$ точки C в инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяются выражением

$$\mathbf{R}(t,\xi)=\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1(t,\xi)+\mathbf{R}_0(t) \tag{2.7}$$

где $\mathbf{R}_1(t,\xi)$ определяется из (2.5), а матрица поворота $\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}}$ имеет вид

$$\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 & 0\\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(t,\xi)=\begin{pmatrix}x_0(t)\\ y_0(t)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 & 0\\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t,\xi)\\ l_1\cos\alpha_1+\xi\cos\alpha_2-u_3\sin\alpha_2\\ l_1\sin\alpha_1+\xi\sin\alpha_2+u_3\cos\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}X(t,\xi)&=x_0(t)+u_1(t,\xi)\cos\alpha_0-\left[l_1\cos\alpha_1+\xi\cos\alpha_2-u_3(t,\xi)\sin\alpha_2\right]\sin\alpha_0\\ Y(t,\xi)&=y_0(t)+u_1(t,\xi)\sin\alpha_0+\left[l_1\cos\alpha_1+\xi\cos\alpha_2-u_3(t,\xi)\sin\alpha_2\right]\cos\alpha_0\\ Z(t,\xi)&=l_1\sin\alpha_1+\xi\sin\alpha_2+u_3(t,\xi)\cos\alpha_2\end{aligned} \tag{2.8}$$

В однородных координатах положение точек упругого звена манипулятора в инерциальной системе координат определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{R}(t,\xi)\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}} & \vdots & \mathbf{R}_0(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}} & \vdots & \mathbf{R}_0(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}_2(t,\xi)\\ 1\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$\mathbf{R}_0(t)$ – радиус-вектор основания упругого звена относительно точки O_1

Из приведенных выражений (2.8), (2.9) следует, что все слагаемые, зависящие от упругих смещений, имеют порядок ε $(\varepsilon<<1)$

3. Скорость и ускорения движения упругого манипулятора. Движение точек упругого последнего звена манипулятора и схвата (фиг.1) имеет колебательный характер относительно движения абсолютно жесткой модели (1.19), (1.20). Вычисляя производные по времени радиуса-вектора $\mathbf{R}(t,\xi)$ (1.19), определяем скорость и ускорения движения произвольной точки упругого звена манипулятора и схвата. Для удобства записи в (1.19), (1.20) введем обозначения

$$\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}}\Gamma_{(1)}^{\mathrm{T}}=\Gamma_{(21)}^{\mathrm{T}};\quad T_{(2)}T_{(1)}=T_{(21)} \tag{3.1}$$

и радиус-вектор $\mathbf{R}(t,\xi)$ представим в виде

$$\mathbf{R}(t,\xi)=\Gamma_{(21)}^{\mathrm{T}}\xi+\Gamma_{(2)}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_0+\Gamma_{(21)}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}(t,\xi) \tag{3.2}$$

или

$$\mathbf{R}(t,\xi) = \mathbf{T}_{(21)}\xi + \mathbf{T}_{(21)}\mathbf{u}(t,\xi) \tag{3.3}$$

где $\xi = (0,\xi,0)^t$.

Вектор скорости и ускорения произвольной точки упругого звена определяются выражением

$$\mathbf{v}(t,\xi) = \frac{d}{dt}\mathbf{R}(t,\xi)$$

$$\mathbf{w}(t,\xi) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t,\xi) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{R}(t,\xi) \tag{3.4}$$

где

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t,\xi) = \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(21)}\xi + \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(2)}\mathbf{R}_2(t) + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{(2)}\dot{\mathbf{R}}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_0(t) + \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(21)}\mathbf{u}(t,\xi) + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{(21)}\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)$$

или

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t,\xi) = \dot{\mathbf{T}}_{(21)}\xi + \dot{\mathbf{T}}_{(21)}\mathbf{u}(t,\xi) + \mathbf{T}_{(21)}\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)$$

Из определения производных следует, что вектор скорости движения можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых определяет скорость движения абсолютно жесткой модели, а второе зависит от упругости последнего звена

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t,\mathbf{u}(t,\xi),\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)) \tag{3.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1(t) &= \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(21)}\xi + \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(2)}\mathbf{R}_2(t) + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{(2)}\dot{\mathbf{R}}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_0(t)\\ \mathbf{v}_2(t,\mathbf{u}(t,\xi),\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)) &= \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(21)}\mathbf{u}(t,\xi) + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{(21)}\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)\end{aligned} \tag{3.6}$$

или в однородных координатах

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1(t) &= \dot{\mathbf{T}}_{(21)}\xi\\ \mathbf{v}_2(t,\mathbf{u}(t,\xi),\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)) &= \dot{\mathbf{T}}_{(21)}\mathbf{u}(t,\xi) + \mathbf{T}_{(21)}\dot{\mathbf{u}}(t,\xi)\end{aligned} \tag{3.7}$$

Выведенные в (1.5), (1.6) порядки величин позволяют оценить также вектор скорости $\mathbf{v}_2(t,\mathbf{u}(t,\xi),\dot{\mathbf{u}}(t,\xi))$. Поскольку $u_1(t,\xi)$, $u_2(t,\xi)$, $\dot{u}_1(t,\xi)$ и $\dot{u}_2(t,\xi)$ имеют порядок ε, то, как следует из (3.6) и (3.7), дополнительный вектор скорости $\mathbf{v}_2$, зависящий от упругости второго звена, также имеет порядок ε. В (3.7) производные по времени от $\mathbf{T}_{(21)}$ определяются следующим образом

$$\mathbf{T}_{(21)} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(2)} & \vdots & \dot{\mathbf{R}}_0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{(1)} & \vdots & \mathbf{R}_1 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{(2)} & \vdots & \mathbf{R}_0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{(2)} & \vdots & \dot{\mathbf{R}}_1 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Аналогично определяя вторые производные по времени радиус-вектора $\mathbf{R}(t,\xi)$, определяем ускорение движения произвольной точки упругого звена манипулятора и схвата. Вектор ускорения $\mathbf{w}$ также представляется в виде суммы двух векторов ускорения

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(t) + \mathbf{w}_2(t, \mathbf{u}(t,\xi), \dot{\mathbf{u}}(t,\xi), \ddot{\mathbf{u}}(t,\xi)) , \qquad \text{где } \mathbf{w}_2 \sim \varepsilon \quad (\varepsilon << 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. 1.Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Болотник Н. Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука. 1989.
2. Динамика управления роботами. / Под редакцией Е. И. Юревича, М. Наука, 1984.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
4. Акуленко А. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. // Изв. РАН. МТТ. № 5. С. 33-41. 1983.
5. Робототехника и гибкие автоматизированные производства / Под редакцией И. М. Макарова. М.: Высшая школа. 1986.
6. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
16.03.2002