

УДК 537.2 : 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ  
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИ-  
ЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА КЛАССА 222 И ВАКУУМА

Багдасарյան Գ.Ե., Берберյան Ա.Խ., Դանոյան Յ.Ն.

Գ.Ե. Բաղդասարյան, Ա.Խ. Բերբերյան, Յ.Ն. Դանոյան

Մասերի էլեկտրատառձգական ալիքի անդրադարձումը շեղանկյուն սլեզոկելեկտրիկ 222 դասի բյուրեղի և վակուումի բաժանման սահմանից

Պատարկված է սառի էլեկտրատառձգական խարք ալիքի անցյալայությունը շեղանկյուն սլեզոկելեկտրիկ 222 դասի բյուրեղի և վակուումի բաժանման սահմանից: Գտնվում են ալիքային դաշտից ալեզոկելեկտրիկ բյուրեղում և վակուումում, որովհետև նմանապես ալիքների լայնությունը գործակիցները հնույց և տրված, ոչ բացի անկյան որոշ դեպքերից, բյուրեղում առաջանում է ուղեկցող մակերևութային ալիք, որի սլառոնառով անդրադարձումը ունի ցլիվ ներքին անդրադարձման բնույթ

G. Y. Bagdasaryan, A. Kh. Berberyan, Z. N. Danoyan

Reflection of an electroelastic shear wave at the interface between a piezoelectric rhombic crystal of 222 class and vacuum

Рассмотрено отражение плоской электроупругой сдвиговой волны от границы раздела пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222 и вакуума. Найдены волновые поля в пьезоэлектрическом кристалле и в вакууме, определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что, кроме некоторых случаев падения, в кристалле возникает сопутствующая поверхностная волна, вследствие чего отражение имеет характер полного внутреннего отражения.

Введение. Как известно [1-4], наличие пьезоэлектрических свойств у кристалла может существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи для известных пьезокристаллов мал по сравнению с единицей. Такая ситуация возникает, например, при отражении электроупругих волн от свободной границы пьезоэлектрика. В работе [5] для пьезокристаллов кубической симметрии показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний, которые не являются собственными колебаниями кристалла и возникают только в присутствии падающей на границу раздела электроупругой волны. Такое колебание локализуется у границы кристалла и называется сопутствующим поверхностным колебанием (СПК) или сопутствующей поверхностной волной (СПВ) [1,5]. Вследствие возникновения СПВ отражение электроупругой волны имеет характер полного внутреннего отражения (за исключением некоторых углов падения).

В настоящей работе рассматривается задача отражения сдвиговой электроупругой волны от свободной границы пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222.

1. Постановка задачи. Пусть пьезоэлектрический ромбический кристалл класса 222 в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2$  занимает полубесконечную область  $x_1 > 0$  и граничит с вакуумом вдоль плоскости  $x_2 = 0$ . Координатные оси совпадают с главными осями

зеркальной  $\bar{L}_z$ . Далее, пусть кристалл находится в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в среде и электрическое поле в вакууме имеют вид:

$$\begin{aligned} x_2 > 0: \quad \bar{u} &= \{0, 0, u_3(x_1, x_2, t)\}; \quad \varphi = \Phi(x_1, x_2, t) \\ x_2 < 0: \quad \varphi &= \Phi_0(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\bar{u}$  - вектор упругого перемещения точек среды,  $\varphi$  и  $\Phi_0$  - потенциалы электрических полей в среде и в вакууме. Предположим, что граница среды свободна от механических напряжений.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [14]:

1. в области  $x_2 > 0$ :

$$\begin{aligned} c_{44} \left( \alpha \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{22} \left( \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2 в области  $x_2 < 0$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия при  $x_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 0 \\ \beta e_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varphi = \varphi_0$$

Здесь приняты обозначения:

$$\alpha = \frac{c_{11}}{c_{44}}, \quad \beta = \frac{e_{21}}{e_{14}}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \quad (1.5)$$

В (1.2) - (1.4):  $c_{44}$ ,  $c_{55}$  - упругие постоянные,  $e_{14}$ ,  $e_{21}$  - пьезоэлектрические модули,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  - диэлектрические проницаемости,  $\rho$  - плотность пьезокристалла,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0$  - электрическая постоянная. В работе используется система международных единиц СИ.

Для простоты в дальнейшем примем следующие обозначения

$$u_3 = u, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad c_{44} = c, \quad e_{14} = e, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon \quad (1.6)$$

2 Однородные и неоднородные плоские волны. Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны.

$$u = Ue^{i(\rho x + qy - \omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{i(\rho x + qy - \omega t)} \quad (2.1)$$

где  $U$  и  $\Phi$  — амплитуды перемещения и потенциала в волне,  $p$  и  $q$  — продольное и поперечное волновые числа относительно оси  $Ox$ ,  $\omega$  — частота колебаний. Подставляя решение (2.1) в систему уравнений (1.3), из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа  $q$  и соотношение между амплитудами смещения  $U$  и потенциала  $\Phi$ .

$$(\gamma p^2 + q^2)(\alpha p^2 + q^2 - S_0^2 \omega^2) + 4\chi^2 p^2 q^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$[c(\alpha p^2 + q^2) - \rho \omega^2]U + (1 + \beta)\epsilon p q \Phi = 0 \quad (2.3)$$

или  $(1 + \beta)\epsilon p q U - \epsilon(\gamma p^2 + q^2)\Phi = 0 \quad (2.4)$

где  $S_0^2 = \frac{c}{\rho}$ ,  $\chi^2 = \frac{(1 + \beta)^2 e^2}{4\epsilon \epsilon}$  (2.5)

Здесь  $S_0$  — скорость объемной упругой волны в направлении оси  $Oy$ ,  $\chi$  — коэффициент электромеханической связи.

Как известно [7], при вещественных  $p$  и  $q$  волны (2.1) называются однородными, а при комплексных — неоднородными.

Для однородных волн  $p$  и  $q$  можно представить в виде (фиг. 1):

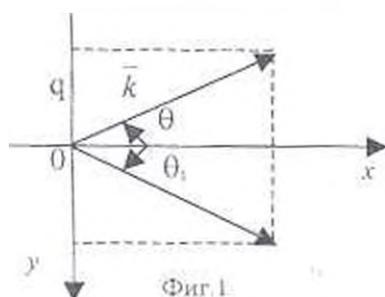
$$p = k \cos \theta, \quad q = -k \sin \theta \quad (2.6)$$

где  $\theta$  — угол скольжения, т.е. угол между волновым вектором  $\vec{k} = \{p, q\}$  и положительным направлением оси  $Ox$ , причем

$$k^2 = p^2 + q^2, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{q}{p} \quad (2.7)$$

При обозначениях (2.6) и (2.7) дисперсионное уравнение (2.2) принимает форму [6]:

$$k = \omega / S_0 \sqrt{1 + (\alpha - 1) \cos^2 \theta + \frac{\chi^2 \sin^2 2\theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}} \quad (2.8)$$



Фиг. 1

Отметим, что  $k$  принимает действительные значения для любого  $\theta$ . Этот факт следует из того, что средняя во времени потенциальная энергия волны положительна [1,2]. Отсюда следует, что плоская однородная волна распространяется в любом направлении, заданном волновым вектором  $\vec{k}$ .

Из (2.8) находим фазовую скорость волны в зависимости от угла скольжения  $\theta$ .

$$v^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = S_0^2 \left[1 + (\alpha - 1) \cos^2 \theta + \frac{\chi^2 \sin^2 2\theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}\right] \quad (2.9)$$

В частности, когда  $\theta = 0$  и  $\theta = -\pi/2$ , получаем (согласно (1.5), (2.5))

$$v_1^2 = S_0^2 \alpha = \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{c_{55}}{c_{44}} = \frac{c_{55}}{\rho}, \quad v_2^2 = S_0^2 = \frac{c_{44}}{\rho} \quad (2.10)$$

ге. по направлениям осей  $Ox$  и  $Oy$  скорость волны не зависит от пьезо-симметрического эффекта. Таким образом, дисперсионное уравнение (2.2) при любом вещественном значении  $p = k \cos \theta$ , где  $k$  определяется по (2.8), имеет пару вещественных корней для  $q$ , которые определяются формулами:

$$q_1 = \pm q_0, \quad q_0 = k \sin \theta = p \operatorname{tg} \theta \quad (2.11)$$

и отвечают зеркально-симметричным волнам относительно оси  $Ox$  (на фиг.1  $\theta_1 = -\theta$ ). Другую пару корней уравнения (2.2) можно определить, используя теорему Виета. Получим  $q_2 = \pm ir$ , где

$$r = \frac{\omega \sqrt{\gamma} |\cos \theta| \sqrt{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}}{S_0 \sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 2\theta} + [(\alpha\gamma - 1) \cos^2 \theta + (\alpha + \gamma - 2) \sin^2 \theta] \cdot \cos^2 \theta} \quad (2.12)$$

Для  $r$  можно получить также выражение:

$$r = k \sqrt{\gamma} |\cos \theta| \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}} \quad (2.13)$$

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2) имеют решения вида (2.1), представляющие неоднородные плоские волны:

$$\begin{aligned} u &= U e^{i(x + (p - iq)y - \omega t)} \\ \varphi &= \Phi e^{i(x - (p - iq)y - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

которые распространяются в направлении оси  $Ox$  и убывают в направлении оси  $Oy$  (при знаке "+") или  $-Oy$  (при знаке "-"). Ясно, что для безграничного кристалла они не имеют физического смысла и могут описывать физический процесс только в ограниченных кристаллах.

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в вакууме

Ищем решение в виде:

$$\varphi_0 = \Phi_0 e^{i(p \cdot x + q \cdot y - \omega t)} \quad (2.15)$$

В этом случае получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \quad (2.16)$$

откуда следует  $q = \pm i|p|$ .

Следовательно, получаем решения в виде неоднородных плоских волн:

$$\varphi_0 = \Phi_0 e^{i(p \cdot x + (p - iq) \cdot y - \omega t)} \quad (2.17)$$

3. Решение задачи. Пусть из пьезокристалла на границу раздела падает плоская сдвиговая электроупругая волна вида (2.1) с амплитудами  $U_0$ ,  $\Phi_0$ , частотой  $\omega$ , волновым числом  $k$ , продольными и поперечными волновыми числами  $p = k \cos \theta$ ,  $q = -k \sin \theta = -q_0$ , углом скольжения  $\theta$  (фиг. 1). Вследствие взаимодействия падающей волны с границей раздела возникают отраженные электроупругие плоские волны в пьезоэлектрике, неоднородные плоские электрические волны в вакууме, сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны в пьезоэлектрике.

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту  $\omega$  и продольное волновое число  $p$  (т. е. волны вдоль границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающую с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, сопутствующая поверхностная и электрическая волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k \sin \theta, \quad q = ir, \quad q = i|p| \quad (3.1)$$

где  $r$  определяется по (2.12) или (2.13).

Связь между амплитудами упругого перемещения и электрического потенциала дается по (2.3) или (2.4).

Таким образом, волновые поля в пьезоэлектрике и в вакууме будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u &= [U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB \Phi_2 e^{-q_2 y}] e^{i(pz - \omega t)} \\ \varphi &= [-U_0 A e^{-iq_0 y} + A U_1 e^{iq_0 y} + \Phi_2 e^{-q_2 y}] e^{i(pz - \omega t)} \\ \varphi_1 &= \Phi_1 e^{i p x} e^{i(pz - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{где } A = \frac{(1 + \beta) e \sin 2\theta}{2\epsilon [1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta]}, \quad B = \frac{\gamma(1 + \beta) e p \cos^2 \theta}{c p [1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta]} \quad (3.3)$$

Здесь  $U_0, U_1$  — амплитуды смещения падающей и отраженной волн,  $\Phi_2$  — амплитуда потенциала СПВ,  $\Phi_1$  — амплитуда электрической волны в вакууме. Заметим, что амплитуда смещения СПВ  $U_2$  выражена через амплитуду потенциала  $\Phi_2$ , подчеркивая тот факт, что при  $e = 0$  СПВ имеет чисто электрический характер.

Подставляя решения (3.2) в граничные условия (1.4), после некоторых, но громоздких вычислений найдем неизвестные амплитуды  $U_1, \Phi_2, \Phi_1$ .

$$U_1 = R_1 U_0, \quad \Phi_2 = Q_2 U_0, \quad \Phi_1 = Q_1 U_0, \quad R_1 = \frac{M \sin \theta - i \chi^2 N |\cos \theta|}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|}$$

$$Q_2 = \frac{\pm 2i \sin \theta (1 + c) e_1 r_1 P_1}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|}, \quad Q_1 = \frac{\pm 2i (1 + \beta)^2 e r_1 \sin \theta P_1}{[1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta] [M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|]}$$

$$M = \epsilon_1 (1 + \beta)^2 r_1 \{ [M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|]^2 + 4\gamma \chi^2 \cos^2 \theta \} + \epsilon_1 [1 + \beta + \{ (1 - \beta)(\gamma - 1) + 4\chi^2 \} \cos^2 \theta]$$

$$N = 4\epsilon_1 r_1 [1 - (1 + \gamma\beta) \cos^2 \theta]^2$$

$$P_1 = \{ 1 + \beta + \{ (1 + \beta)(\gamma - 1) + 4\chi^2 \} \cos^2 \theta \} [1 - (1 + \gamma\beta) \cos^2 \theta]$$

$$P_2 = \{ [1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta]^2 + 4\gamma \chi^2 \cos^2 \theta \} [1 - (1 + \gamma\beta) \cos^2 \theta]$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}}, \quad r = k |\cos \theta| r_1 \quad (3.4)$$

В случае кубических кристаллов, полагая  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , получаем:

$$U_1 = R_1 U_0, \quad \Phi_2 = Q_2 U_0, \quad \Phi_1 = Q_1 U_0$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{M \sin \theta - i \chi^2 N |\cos \theta|}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|}, & Q_1 &= \frac{\pm 4 i \epsilon_r \sin \theta P_1}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|} \\
 Q_2 &= \frac{\pm 8 i \epsilon_r \sin \theta P_2}{[M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|]}, & M &= 4 \epsilon_r r_1 \{1 + \chi^2 \cos^2 \theta\} + 4 \epsilon_r \{1 - 2 \chi^2 \cos^2 \theta\}^2 \\
 P_1 &= 4 \epsilon_r \cos^2 2\theta, & P_2 &= -2(1 + 2 \chi^2 \cos^2 \theta) \cos 2\theta. \\
 P_3 &= -(1 + 4 \chi^2 \cos^2 \theta) \cos 2\theta, & r_1 &= \sqrt{1 + 4 \chi^2 \cos^2 \theta}, \quad r = k |\cos \theta| r_1. \\
 k &= \frac{\omega}{S_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 2\theta}}, & \chi^2 &= \frac{e^2}{c \epsilon}, \quad S_0 = \frac{c}{\rho}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Сравнивая полученные выражения с результатами работы [1], видим, что в выражение ФВ (стр.47 формула (1.15)) в числителе участвует лишний множитель  $-2 \cos \theta$ , а в выражении  $B_1$  во второй круглой скобке должно быть  $\cos^4 \theta$  вместо  $\cos^2 \theta$ .

Как видно из (3.4), амплитуда отраженной волны  $U_1$  комплексна и ее модуль равен единице. Как известно [1,2,7], такая ситуация соответствует полному внутреннему отражению, возникающему при определенных углах и определенных соотношениях между параметрами граничных сред. В нашей задаче, как и при кубических кристаллах, отражение электроупругой волны, вследствие возникновения СПВ, имеет характер полного внутреннего отражения при любом угле скольжения, за исключением случаев нормального падения ( $\theta = \pi/2$ ) и скольжения под углом, которые определяются из уравнения:

$$1 - (1 + \gamma \beta) \cos^2 \theta = 0 \tag{3.6}$$

В случае кубических кристаллов уравнение (3.6) сводится к уравнению  $\cos 2\chi = 0$ , которое дает корни  $\theta = \pi/4$  и  $\theta = 3\pi/4$ . В случае падения под указанными углами, когда СПВ не возникает, имеет место обычное отражение сдвиговых волн с  $R_1 = 1$ .

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если  $\chi \ll \chi^*$ , то  $\Phi_2 \rightarrow 0$  и  $U_1 \rightarrow -U_0$ , т.е. сдвиговые электроупругие волны полностью поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии не распространяются. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при  $\chi^2 = 0$ ,  $R_1 = 1$ ). Такая особенность характерна полному внутреннему отражению. Далее, при  $\theta \sim \chi^2$  амплитуда потенциала СПВ существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны, что может приводить к эффективному взаимодействию падающих электроупругих волн с плазмой полупроводника, расположенного вблизи поверхности пьезоэлектрика [1,2].

В заключение приведем численные данные поля для пьезокристалла  $\alpha\text{-NiO}_2$  (подповатая кислота), которые принадлежат классу 222 с инверсионной симметрией [8].

$$\rho = 4629 \text{ кг/м}^3, \quad c_{44} = 1,835 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{55} = 1,106 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

$$\epsilon_{14} = 29,36 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^2, \epsilon_{23} = 22,26 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^2, \epsilon_{11} = 66,375 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2, \\ \epsilon_{33} = 109,74 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2, \epsilon_1 = \epsilon_3 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2.$$

**Заключение.** Рассмотрено отражение плоской электроупругой сдвиговой волны от свободной границы раздела ромбического кристалла класса 222 и вакуума.

Определены волновые поля в пьезокристалле и в вакууме. Показано, что электрическое поле падающей волны частично просачивается в вакуум, вследствие чего в вакууме около границы раздела возникает волна электрического поля, распространяющаяся вдоль границы с той же фазовой скоростью, что и электроупругие волны. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в пьезокристалле, а следовательно, и сопутствующую ей упругую волну. Формально этот результат следует из существования двух независимых граничных условий для электрического потенциала, тогда как потенциал поля в вакууме дает одну новую постоянную. Существование сопутствующей электроупругой поверхностной волны приводит к тому, что отражение приобретает характер полного внутреннего отражения. Отметим, что, в отличие от обычно рассматриваемых случаев, сопутствующая поверхностная волна, возникающая при полном внутреннем отражении, распространяется в той же среде, что и падающая и отраженная волны. Далее, сдвиговые волны, параллельно поверхности кристалла (при малых углах скольжения  $0 < \chi \ll 1$ ) не могут распространяться. А при падении  $\theta \sim \chi^2$ , отражение может привести к эффективному взаимодействию электроупругих волн с плазмой близлежащего полупроводника.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, сибирское отделение, 1982. 240 с.
2. Дьелосан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лива в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. // В кн. "Актуальные проблемы неоднородной механики". Материалы Всесоюзного научного семинара. Ереван, 1991. 23–26 июня. С. 49–54.
4. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика, 1994. Т. 47. №3–4. С. 78–82.
5. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл-вакуум // ФТТ, 1969. Т. 11. Вып. 4. С. 1027–1029.
6. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1985. Т. 38. №1. С. 12–19.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
8. Акустические кристаллы. Справочник под ред. М.П. Шаскольской, М.: Наука, 1982. 632 с. (с. 361–365).