ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика

УДК 539.3

К ВОПРОСУ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНКИ

Белубекян М.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան
Ըստ հաստության անհամասեռ սալի տատանումների խնդրի վերաբերյալ

Ենթադրվում է, որ սալի անհամասեռությունը ըստ հաստության ոչ սիմետրիկ է և տեղի ունի Կիրխոֆի վարկածը: Որոշվում են ձգման, սահքի և ծռման կոշտության արդյունավետ մոդուլները: Հաստատվում է սալի նախապես ծռված վիճակի անկայունության հնարավորությունը, որը էապես կախված է Պուասոնի գործակցի ըստ հաստության փոփոխության վարքից:

M.V. Belubekyan
On the Problem of Vibrations of the Plate with Nonhomogeneouty along Thickness.

Впервые задача исследования пластин, симметрично неоднородных по толщине, была поставлена С.Г. Лехницким [1,2]. В работе [3] рассмотрена задача колебаний пластины неоднородной по толщине при условии постоянства коэффициента Пуассона и с учетом поперечных сдвигов.

В настоящей работе исследуются задачи несимметрично неоднородных по толщине пластин на основе гипотезы Кирхгофа и без условия постоянства коэффициента Пуассона.

Несимметричность понимается в смысле, что если функции механических характеристик материала пластинки непрерывны по толщинной координате, то они несимметричны относительно срединной плоскости. Если же они кусочно-непрерывны (слоистые пластинки), то задача несимметрична относительно любой плоскости раздела слоев и срединной поверхности.

Вводится преобразование относительно функций планарных перемещений, позволяющее установить классы задач, для которых отделяются задачи определения обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба. Устанавливается возможность потери устойчивости пластинки при действии по краям изгибающих моментов и при действии нормальной нагрузки.

1. Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x,y,z) занимает область $0<x<a$, $0\le y\le b$, $-h_2\le z\le h_1$. Модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν и плотность материала пластинки ρ являются функциями координаты z. Принимаются допущения гипотезы Кирхгофа:

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right),\ \sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}\right),\ \sigma_{12}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \tag{1.1}$$

$$u_x=u-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_y=v-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_z=w,\quad u,v,w\sim(x,y,t) \tag{1.2}$$

$$\int_{-h_2}^{h_1}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\right)dz=0,\ (i=1,2,3),\ \int_{-h_2}^{h_1}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\right)z\,dz=0\ (i=1,2) \tag{1.3}$$

и пренебрегаются моменты инерции вращения.

Выражения для усилий и моментов, согласно (1.1), (1.2) получаются в виде

$$
\begin{aligned}
T_1 &= C\frac{\partial u}{\partial x} + (C - 2B_0)\frac{\partial v}{\partial y} - \left[K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (K - 2B_1)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \\
T_2 &= C\frac{\partial v}{\partial y} + (C - 2B_0)\frac{\partial u}{\partial x} - \left[K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (K - 2B_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \\
S &= B_0\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2B_1\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
M_1 &= K\frac{\partial u}{\partial x} + (K - 2B_1)\frac{\partial v}{\partial y} - \left[D_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_0 - 2B_2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \\
M_2 &= K\frac{\partial v}{\partial y} + (K - 2B_1)\frac{\partial u}{\partial x} - \left[D_0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_0 - 2B_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \\
H &= B_1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2B_2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$C = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2} dz$$

$$K = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{zE}{1-\nu^2} dz, \quad D_0 = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz, \quad B_k = \frac{1}{2}\int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^k E}{1+\nu} dz, k = 0,1,2 \qquad (1.5)$$

Подстановка (1.4) в осредненные уравнения движения (1.3) приводит к уравнениям относительно перемещений u, v, w

$$
\begin{aligned}
&B_0 \Delta u + (C - B_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - K\frac{\partial}{\partial x}\Delta w = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \\
&B_0 \Delta v + (C - B_0)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - K\frac{\partial}{\partial y}\Delta w = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - p\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} \qquad (1.6) \\
&D_0 \Delta^2 w - r\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + p\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = q
\end{aligned}
$$

где q – нормальная нагрузка.

$$m = \int_{-h_2}^{h_1} \rho dz, \; p = \int_{-h_2}^{h_1} \rho z dz, \; r = \int_{-h_2}^{h_1} \rho z^2 dz \qquad (1.7)$$

Условия $K = 0$, $p = 0$ являются достаточными для отделения уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба. Можно показать, что члены уравнения (1.6) с множителем p имеют порядок моментов инерции вращения, поэтому они в дальнейшем пренебрегаются в согласии с теорией пластин Кирхгофа.

2. Для системы уравнений (1.6) вводится следующее преобразование [4]:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{K}{C}\frac{\partial w}{\partial x},\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{K}{C}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.1}$$

При помощи (2.1) система уравнений с учетом $p = 0$ приводится к виду

$$C\Delta\varphi = m\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{mK}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad B_0\Delta\psi = m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$D\Delta^2 w - r\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta^2\varphi = q \tag{2.3}$$

$$D = D_0 - C^{-1}K^2 \tag{2.4}$$

Преобразование (2.1) аналогично введению функций Ламе для частного случая задачи плоской деформации. И здесь очевидно, что решения системы (2.2) (2.3) удовлетворяют уравнениям (1.6). Однако обратное утверждение требует доказательства, аналогичное доказательству полноты функций Ламе [5].

Уравнение относительно ψ отделяется от системы уравнений относительно φ и w. Однако, в общем случае, они связаны граничными условиями на кромках пластины.

В случае статических задач для каждой из искомых функций φ, ψ, w получаются автономные уравнения. Поэтому можно условно считать, что формула (2.4) определяет эффективную жесткость пластинки на изгиб. В этом же смысле C будет эффективной жесткостью на растяжение (сжатие), B_0 – эффективной жесткостью на сдвиг, m – приведенной массой.

Анализ задачи собственных колебаний бесконечной пластинки на основе системы уравнений (2.2), (2.3) показывает, что члены с коэффициентами mKC^{-1}, r имеют тот же порядок, что и моменты инерции вращения. Поэтому для задач колебаний тонких пластин, в согласии с теорией Кирхгофа, предлагается вместо ситемы (2.2),(2.3) использовать следующую систему:

$$\begin{gathered} C\Delta\varphi = m\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ B_0\Delta\psi = m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \\ D\Delta^2 w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta^2\varphi = q \end{gathered} \tag{2.5}$$

Необходимо отметить, что эффективная жесткость D всегда положительна.

Если ввести обозначения

$$f(z) = \frac{z^2 E}{1-\nu^2} > 0,\quad g(z) = \frac{E}{1-\nu^2} > 0$$

то условие $D > 0$ согласно (2.4) приводится к неравенству Коши-Буняконского

$$\left(\int_{-h_2}^{h_1} f\,dz\right)\left(\int_{-h_2}^{h_1} g\,dz\right) > \left(\int_{-h_2}^{h_1}\sqrt{f}\,\sqrt{g}\,dz\right)^2$$

Граничные условия относительно функций φ, ψ, w на кромках пластинки получаются обычным способом осреднения и использования преобразования

(2.1) Для частных случаев указанные граничные условия для кромки $x = \mathrm{const}$ приводятся ниже

Жесткая заделка –

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \ w=0,\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.6}$$

Шарнирное закрепление –

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0,\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ w=0,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{2.7}$$

Скользящий контакт –

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0\\ \frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \ D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-K\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

3. Для задач статики, при действии поперечной нагрузки $q\,(x,y)$ на нижней поверхности пластинки, функции φ и ψ, согласно (2.5) должны удовлетворять однородным уравнениям Лапласа и однородным граничным условиям вида (2.6)-(2.8). Отсюда следует, что в этом случае $\varphi\equiv 0,\ \psi\equiv 0$. Тогда для определения прогиба w получается обычная задача теории изгиба пластин с эффективной жесткостью D определяемой по формуле (2.4). При этом перемещения u, v определяются согласно (2.1) следующим образом:

$$u=\frac{K}{C}\frac{\partial w}{\partial x},\quad v=\frac{K}{C}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.1}$$

Подстановка (3.1) в (1.4) приводит к определению усилий и моментов через функцию прогиба w

$$\begin{gathered}T_1=A_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ T_2=A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ S=-A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\ M_1=-D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\left(D-A_2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \ M_2=-D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(D-A_2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ H=-A_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\ \ N_1=-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w,\ \ N_2=-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$A_1=2\left(B_1-B_0KC^{-1}\right),\ \ A_2=2\left(B_2-B_1KC^{-1}\right) \tag{3.3}$$

Легко проверить, что $A_1=0$ при $v=\mathrm{const}$ и, следовательно,

$$\mathrm{T}_1=\mathrm{T}_2=\mathrm{S}=0 \tag{3.4}$$

В общем случае $A_1\neq 0$. В частности, для двухслойной пластинки [4,6]

$$A_1 = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \frac{h_1 h_2 (h_1 + h_2) E_1 E_2}{E_1 h_1 (1 - \nu_2^2) + E_2 h_2 (1 - \nu_1^2)} \qquad (3.5)$$

Знак коэффициента A_1 определяет, являются ли усилия T_1, T_2 растягивающими или сжимающими.

Очевидно, что в случае, когда T_1, T_2 сжимающие, возможна постановка вопроса устойчивости пластинки под действием поперечной нагрузки.

Пусть пластинка-полоса (цилиндрический изгиб) с жестко заделанными краями $x = 0, a$ изгибается при действии поперечной нагрузки $q = q_0 = const$.

Усилия и моменты согласно (3.2) определяются следующим образом:

$$T_1 = 0, T_2 = \frac{q_0 a^2}{2D} A_1 f(x), S = 0, M_1 = -\frac{q_0 a^2}{2} f(x)$$
$$M_2 = -\left(1 - \frac{A_2}{D}\right) \frac{q_0 a^2}{2} f(x), N_1 = -\frac{q_0 a^2}{2} f'(x), N_2 = 0 \qquad (3.6)$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}, \xi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \xi_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$f(x) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \qquad (3.7)$$

Функция $f(x)$ - знакопеременная. Она отрицательна в интервале $(\xi_1 \xi_2)$ и положительна вне этого интервала. Отсюда следует,что усилие T_2 также является знакопеременной функцией от x и его знак определяется знаком коэффициента A_1 и знаком функции $f(x)$. Поскольку всегда существует интервал, для которого T_2 является отрицательной функцией (сжимающее усилие), то возможна потеря устойчивости рассматриваемой пластинки [7,8].

4. На основе полученных уравнений (2.5) и граничных условий (2.6)-(2.8) рассмотрены частные задачи свободных колебаний пластин. Для прямоугольной пластинки с четырьмя шарнирно закрепленными краями решение имеет вид:

$$\psi = \sum_{p,s=1}^{\infty} \psi_{ps} e^{i\zeta_{ps} t} \sin \mu_p x \sin \lambda_s y, \ \varphi = \sum_{p,s=1}^{\infty} \varphi_{ps} e^{i\omega_{ps} t} \sin \mu_p x \sin \lambda_s y$$
$$w = \sum_{p,s=1}^{\infty} \left(w_{ps} e^{i\Omega_{ps} t} + A_{ps} e^{i\omega_{ps} t}\right) \sin \mu_p x \sin \lambda_s y \qquad (4.1)$$

где

$$\omega_{ps}^2 = m^{-1} C (\mu_p^2 + \lambda_s^2), \zeta_{ps} = m^{-1} B_0 (\mu_p^2 + \lambda_s^2), \Omega_{ps}^2 = m^{-1} D (\mu_p^2 + \lambda_s^2)$$
$$\mu_p = \frac{p\pi}{a}, \lambda_s = \frac{s\pi}{b}, \quad A_{ps} = m^{-1} K (\mu_p^2 + \lambda_s^2)^2 (\Omega_{ps}^2 - \omega_{ps}^2)^{-1} \varphi_{ps} \qquad (4.2)$$

В случае свободных колебаний пластинки-полосы с шарнирно закрепленным краем $x = 0$ и скользящим краем $x = a$ получаются следующие результаты:

$$w=\sum_{p=1}^{\infty}\left(w_p e^{\Omega_p t}+A_p e^{\omega_p t}\right)\sin\chi_p x,\varphi=\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_p e^{\omega_p t}\sin\chi_p x \tag{4.3}$$

где

$$A_p=\frac{K\chi_p^{\ 2}}{\Omega_p^{\ 2}-\omega_p^{\ 2}}\varphi_p\ ,\chi_K=\frac{(2p-1)\pi}{2a},\ \omega_p^{\ 2}=\frac{c}{m}\chi_p^{\ 2},\ \Omega_K^{\ 2}=\frac{D}{m}\chi_p^{\ 2} \tag{4.4}$$

Наконец для задачи свободных колебаний пластинки с граничными условиями шарнирного закрепления краев $x=0,a$, и скользящего контакта краев $y=0,b$

$$\varphi=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_{ps}e^{\omega_{ps}t}\ \sin\mu_p x\cos\lambda_s y,\ \psi=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\psi_{ps}e^{\Omega_{ps}t}\cos\mu_p x\sin\lambda_s y$$

$$w=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left(w_{ps}e^{\Omega_{ps}t}+A_{ps}e^{\omega_{ps}t}\right)\sin\mu_p x\cos\lambda_s y \tag{4.5}$$

Принятые здесь обозначения совпадают с обозначениями (4.2)

5. Рассмотрим напряженно деформированное состояние неоднородной пластинки при действии изгибающих моментов на краях. Пусть по шарнирно-закрепленным краям пластинки $x=0,a$ приложены нагрузки $\sigma_{11}=\sigma_0(z)$ такие, что

$$T_1=\int_{-h_1}^{h_2}\sigma_0(z)dz\equiv 0,\ \ M_1=\int_{-h_1}^{h_2}z\sigma_0(z)dz=M_0 \tag{5.1}$$

В этом случае граничные условия шарнирного закрепления имеют вид

$$T_1=0,\ v=0,\ w=0,\ M_1=M_0\quad \text{при}\ \ x=0,a \tag{5.2}$$

или же в перемещениях

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{KM_0}{CD},\ v=0,\ \ w=0,\ \ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{M_0}{D} \tag{5.3}$$

Принимается, что на краях пластинки $y=0,b$ имеют место условия скользящего контакта, анологичные (2.8). После введения преобразования (2.1) указанные граничные условия приведутся к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \ w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{M_0}{D}\quad \text{при}\ \ x=0,a \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0,\ \ \frac{\partial w}{\partial y}=0\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\frac{\partial w}{\partial y}-K\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]=0\end{gathered}\quad \text{при}\ \ y=0,b \tag{5.5}$$

Для приведенной задачи пластинка изгибается по цилиндрической поверхности и искомые функции определяются следующим образом:

$$w_0=M_0a^2(2CD)^{-1}\xi(1-\xi)\ ,\ \ \varphi=\psi=0 \tag{5.6}$$

$$u_k = \frac{M_0 Ka}{2CD}(1-2\xi),\ T_2 = -\frac{A_1 M_0}{D},\ T_1 = S = 0 \tag{5.7}$$

При изгибе моментами появляется усилие T_2, знак которого зависит от знака коэффицента A_1. Условие $A_1 > 0$ для двухслойной пластинки (3.5) означает, что $\nu_2 > \nu_1$ и усилие T_2 будет сжимающим. Поэтому возможна потеря устойчивости пластинки. Если начальному состоянию пластинки, определяемому по выражениям (5.6), (5.7), придать возмущение $w = w(x, y)$, то задача устойчивости приведется к решению уравнения

$$D\Delta^2 w - T_2 \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \tag{5.8}$$

с граничными условиями

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, a,\quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \text{ при } y = 0, b \tag{5.9}$$

Представление решения задачи в виде

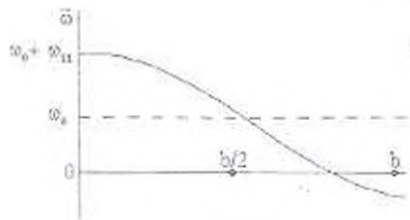
$$w = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} w_{ps} \sin\mu_p x \cos\lambda_s y \tag{5.10}$$

приводит к определению критического значения изгибающего момента из равенства

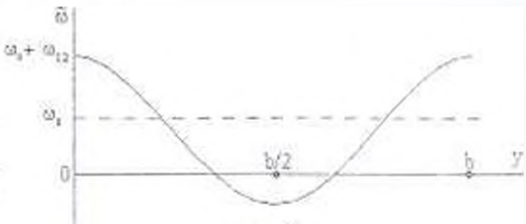
$$A_1 D^{-1} M_0 = \lambda_s^{-2}\left(\mu_p^2 + \lambda_s^2\right)^2 D \tag{5.11}$$

Из (5.11) следует, что минимальное критическое значение изгибающего момента M_*, при котором имеет место неустойчивость, достигается при $p = 1$, $s = E(b/a) = k$, где $E(b/a)$ означает целую часть отношения b/a плюс единица

$$M_* = A_1^{-2}\lambda_k^{-2}\left(\mu_1^2 + \lambda_k^2\right)^2 D^2 \tag{5.12}$$



Фиг.1



Фиг.2

В частности, для квадратной пластинки

$$M_* = ^2 A_1^{-1} a^{-2} 4\pi^2 D^2 \tag{5.13}$$

На фиг. 1 приводится форма потери устойчивости квадратной пластинки для сечения $x = a/2$

На фиг. 2 приводится форма потери устойчивости прямоугольной пластинки с размерами $b = 2a$ для сечения $x = a/2$

Автор благодарит Р.М.Киракосяна за содержательное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Изгиб неоднородных анизотропных плит симметричного строения// ПММ. 1941. T.V. Вып 1.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат, 1957. 464с.
3. Мовсисян Л.А. К свободным колебаниям неоднородных пластин//Изв НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №3-4.С.42-48.
4. Амбарцумян С.А. Белубекян М.В. Об одном подходе к определению эффективных модулей несимметрично собранных многослойных пластин.// Проблемы прочности и пластичности. Межвуз сб. Нижегородский ун-т. 2000. вып.61, с. 26-30.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975.872с.
6. Белубекян М.В. Неустойчивость двухслойной пластинки при действии изгибающего момента// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54 №1.С 26-31.
7. Гнуни В.Ц., Микаелян Н.З. Выпучивание длинной эксцентрично закрепленной пластинки под действием поперечной нагрузки.// Докл АН Арм.ССР. 1970.Т. L1. №3. С. 140-143.
8. Гнуни В.Ц. Микаелян Н.З. Выпучивание длинных слоистых пластин и цилиндрических панелей// Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1971. Т.24 №2. С.39-45.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.04.2002