ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика
УДК 539.3

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ЛУНОЧКИ С ТРЕЩИНАМИ НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

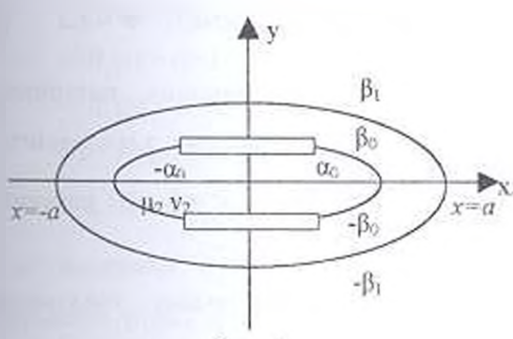
Агабекян П.В., Арутюнян Л.А.

Պ.Վ.Աղաբեկյան, Լ.Ա.Հարությունյան
Բաժանման ճակերևույթի վրա ճաքեր պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի կոնտակտային խնդիրը

Երկբևեռ կոորդինատային համակարգի և Ֆուրյեի ինտեգրալների օգնությամբ տրված է բաժանման ճակերևույթի վրա սիմետրիկ ճաքեր պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության կոնտակտային հարթ խնդրի լուծումը:

P.V.Aghabekyan, L.A. Harutjunyan
A plane contact problem of a compound moon with cracks on the line of division of materials

С помощью биполярных координат и интеграла Фурье дано решение плоской контактной задачи теории упругости для составной области с трещиной.



Фиг. 1

В данной работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение плоской контактной задачи теории упругости для двух областей, с упругими характеристиками μ_m, ν_m $(m = 1,2)$ (где μ_m – модули сдвига материалов, ν_m – коэффициенты Пуассона), образованных пересечением дуг окружностей с симметричной трещиной между материалами (фиг.1).

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат α, β, которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями [1]

$$qx = \operatorname{sh}\alpha, \quad qy = \sin\beta, \quad qa = \operatorname{ch}\alpha + \cos\beta \tag{1}$$

где a – параметр биполярных координат.

Каждая из функций напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)$ $(m = 1,2)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид [1-3]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right)(q\Phi_m(\alpha, \beta)) = 0, \quad m = 1,2 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями:

$$a\sigma_\alpha(\alpha,\beta)=\left((\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ch}\alpha\right)(q\Phi_m(\alpha,\beta))$$

$$a\sigma_\beta(\alpha,\beta)=\left((\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right)(q\Phi_m(\alpha,\beta))$$

$$a\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=-(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(q\Phi_m(\alpha,\beta)) \qquad (3)$$

$$U(\alpha,\beta)=\frac{q}{2\mu_m}\left((1-\upsilon_m)\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}-\frac{\partial\Psi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right)$$

$$V(\alpha,\beta)=\frac{q}{2\mu_m}\left((1-\upsilon_m)\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi_m(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right)\quad m=1,2$$

где $\Psi_m(\alpha,\beta)(m=1,2)$ – бигармоническая функция, связанная с $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ формулой

$$q\Psi_m(\alpha,\beta)=(1-\upsilon_m)\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)(q\Phi_m(\alpha,\beta))d\alpha d\beta,\quad m=1,2 \qquad (4)$$

В биполярных координатах одна из составляющих материалов занимает область $(\beta_0<|\beta|\leq\beta_1,\ -\infty<\alpha<\infty)$ с упругими характеристиками μ_1,υ_1, а вторая – область $(|\beta|<\beta_0,-\infty<\alpha<\infty)$ с упругими характеристиками μ_2,υ_2.

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1-3]:

$$(q\Phi_1(\alpha,\beta))\Big|_{|\beta|=\beta_1}=\varphi_1(\alpha),\quad \frac{\partial(q\Phi_1(\alpha,\beta))}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\beta_1}=\Psi_1(\alpha) \qquad (5)$$

Предполагается, что $\varphi_1(\alpha)$ и $\psi_1(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Условия симметрии

$$V_2(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=0,\quad \frac{\partial(q\Phi_2(\alpha,\beta))}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=0 \qquad (6)$$

На линии контакта имеем следующие условия:

$$\frac{\partial(q\Phi_m(\alpha,\beta))}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\beta_0}=0,\quad (q\Phi_1(\alpha,\beta))\Big|_{\beta=\beta_0}=(q\Phi_2(\alpha,\beta))\Big|_{\beta=\beta_0}\quad |\alpha|>\alpha_0 \qquad (7)$$

$$q(\Phi_m(\alpha,\beta))\Big|_{\beta=\beta_0}=0\quad |\alpha|<\alpha_0,\quad V_1(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_0}=V_2(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_0}\quad |\alpha|>\alpha_0$$

Учитывая симметрию, бигармоническую фунцию напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ удобно представить интегралом Фурье такого вида

$$q\Phi_m(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_m(\alpha,\beta)\cos t\alpha dt \quad (m=1,2) \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}f_1(t,\beta)=A_1(t)\operatorname{ch}t(\beta_1-\beta)\cos(\beta-\beta_0)+B_1(t)\operatorname{ch}t(\beta-\beta_0)\cos\beta(\beta_1-\beta)+\\+C_1(t)\operatorname{sh}t(\beta_1-\beta)\sin(\beta-\beta_0)+D_1(t)\operatorname{sh}t(\beta-\beta_0)\sin(\beta_1-\beta)\\ f_2(t,\beta)=A_2(t)\operatorname{ch}t(\beta_0-\beta)\cos\beta+B_2(t)\operatorname{ch}t\beta\cos(\beta_0-\beta)+\\+C_2(t)\operatorname{sh}t(\beta_0-\beta)\sin\beta+D_2(t)\operatorname{sh}t\beta\sin(\beta_0-\beta)\end{gathered} \tag{9}$$

удовлетворяя граничным условиям (5) и части контактных условий (7) и условиям симметрии (6), получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$\begin{aligned}&A_1(t)\cos(\beta_1-\beta_0)+B_1(t)\operatorname{ch}t(\beta_1-\beta_0)=\overline{\varphi_1}(t)\\&(tB_1(t)-D_1(t))\operatorname{sh}t(\beta_1-\beta_0)-(A_1(t)+tC_1(t))\sin(\beta_1-\beta_0)=\overline{\psi_1}(t)\\&(C_2(t)-tA_2(t))\operatorname{sh}t\beta_0+(B_2(t)+tD_2(t))\sin\beta_0=0\\&A_2(t)\operatorname{sh}t\beta_0-D_2(t)\sin\beta_0=0\\&(B_1(t)+tD_1(t))\sin(\beta_1-\beta_0)+(C_1(t)-tA_1(t))\operatorname{sh}t(\beta_1-\beta_0)=0\\&(A_2(t)+tC_2(t))\sin\beta_0+(D_2(t)-tB_2(t))\operatorname{sh}t\beta_0=0\\&A_1(t)\operatorname{ch}t(\beta_1-\beta_0)+B_1(t)\cos(\beta_1-\beta_0)=X(t)\\&A_2(t)\cos\beta_0+B_2(t)\operatorname{ch}t\beta_0=X(t)\end{aligned} \tag{10}$$

где величины $\overline{\varphi_1}(t)$ и $\overline{\psi_1}(t)$ являются преобразованиями Фурье от функции $\varphi_1(\alpha)$ и $\psi_1(\alpha)$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi_1}(t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi_1(\alpha)\cos t\alpha d\alpha\\ \overline{\psi_1}(t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\psi_1(\alpha)\cos t\alpha dt\end{aligned} \tag{11}$$

а $X(t)$ – пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (11), для неизвестных $A_m(t), B_m(t), C_m(t)$ и $D_m(t)$ $(m=1,2)$ найдем значения через неизвестную $X(t)$:

$$A_1(t)=\frac{1}{\delta(t)}(X(t)\operatorname{ch}t\gamma_1-\overline{\varphi}_1\cos\gamma_1)$$

$$B_1(t)=\frac{1}{\delta(t)}(\overline{\varphi}_1(t)\operatorname{ch}t\gamma_1-X(t)\cos\gamma_1)$$

$$C_1(t)=\frac{1}{\Delta_1(t)}[X(t)(t\,\mathrm{ch}t\gamma_1+\frac{t^2+1}{2\delta(t)}\mathrm{sh}t\gamma_1\sin 2\gamma_1)-$$
$$-\overline{\varphi}_1(t)(t\cos\gamma_1+\frac{1}{2\delta(t)}(t^2+1)\mathrm{sh}2t\gamma_1\sin\gamma_1)+\overline{\psi}_1(t)t\sin\gamma_1] \tag{12}$$

$$D_1(t)=\frac{1}{\Delta_1(t)}[-X(t)(t\cos\gamma_1-\frac{1}{2\delta(t)}(t^2+1)\mathrm{sh}2t\gamma_1\sin\gamma_1)+$$
$$+\overline{\varphi}_1(t)(t\,\mathrm{ch}t\gamma_1+\frac{1}{2\delta(t)}(t^2+1)\mathrm{sh}t\gamma_1\sin 2\gamma_1)-\overline{\psi}_1(t)\mathrm{sh}t\gamma_1]$$

$$A_2(t)=\frac{2tX(t)\sin\gamma_2}{\Delta_2(t)} \qquad C_2(t)=-\frac{A_2(t)}{t}$$

$$B_2(t)=\frac{2X(t)\mathrm{sh}t\gamma_2}{\Delta_2(t)} \qquad D_2(t)=tB_2(t)$$

где

$$\delta(t)=\mathrm{sh}^2t\gamma_1+\sin^2\gamma_1$$
$$\Delta_1(t)=\mathrm{sh}^2t\gamma_1-t^2\sin^2\gamma_1 \qquad \gamma_1=\beta_1-\beta_0 \tag{13}$$
$$\Delta_2(t)=\mathrm{sh}2t\gamma_2+t\sin 2\gamma_2 \qquad \gamma_2=\beta_0$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которые получаются из контактных условий [1]

$$\begin{cases}\int_0^\infty X(t)\cos t\alpha dt=0 & |\alpha|<\alpha_0\\ \int_0^\infty [M(t)X(t)+N(t)]\sin t\alpha dt=0 & |\alpha|>\alpha_0\end{cases} \tag{14}$$

где

$$N(t)=\frac{1}{\Delta_1(t)}[-\overline{\varphi}_1(t)(t\,\mathrm{ch}t\gamma_1\sin\gamma_1-\mathrm{sh}t\gamma_1\cos\gamma_1)+\overline{\psi}_1(t)\mathrm{sh}t\gamma_1\sin\gamma_1]$$

$$\Delta(t)=(\mathrm{sh}2t\gamma_1+t\sin 2\gamma_1)\Delta_2(t)+4h(\mathrm{sh}^2t\gamma_2-\sin^2\gamma_2)\Delta_1(t)$$

$$h=\frac{\mu_1(1-\upsilon_2)}{\mu_2(1-\upsilon_1)},\quad M(t)=\frac{\Delta(t)}{2\Delta_1(t)\Delta_2(t)} \tag{15}$$

В частном случае, при $\alpha_0=\infty$ из (14) получаем $X(t)=0$, а при $\alpha_0=0$ получаем $X(t)=-M(t)/N(t)$, в обоих случаях задача решается в замкнутом виде.

Учитывая интегральные представления функции Бесселя [4]

$$J_0(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\cos t\alpha d\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\ ; \qquad J_0(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_x^\infty\frac{\sin t\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \tag{16}$$

можно парные интегральные уравнения (14) представить в виде

$$\int_0^\infty (t^2+1)X(t)J_0(x,t)dt = 0 \text{ при } x<\alpha_0$$

$$\int_0^\infty (t^2+1)\left[M(t)X(t)+N(t)\right]J_0(x,t)dt = 0 \text{ при } x>\alpha_0 \qquad (17)$$

Применяя преобразование Ханкеля, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$M(t)X(t)+N(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2+1}\int_0^\infty (\tau^2+1)\left[(M(\tau)-1)X(\tau)+N(\tau)\right]K(t,\tau)d\tau \qquad (18)$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{1}{t^2-\tau^2}\left[tJ_1(\alpha_0 t)J_0(\alpha_0\tau)-\tau J_0(\alpha_0 t)J_1(\alpha_0\tau)\right] \qquad (19)$$

или

$$X(t)=\frac{\alpha_0 t}{t^2+1}\int_0^\infty (\tau^2+1)U(\tau)K(t,\tau)d\tau - H(t) \qquad (20)$$

где

$$U(\tau)=(M(\tau)-1)X(\tau)+N(\tau)$$

$$H(t)=\frac{\alpha_0 t(M(t)-1)}{(t^2+1)M(t)}\int_0^\infty (\tau^2+1)U(\tau)K(t,\tau)d\tau+\frac{N(t)}{M(t)} \qquad (21)$$

На линии контакта нормальное напряжение имеет вид

$$a\sigma_\beta^{(m)}(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[-t^2(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_0)\cos t\alpha+t\operatorname{sh}\alpha\sin t\alpha-\cos\beta_0\cos t\alpha\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha_0 t}{t^2+1}\int_0^\infty (\tau^2+1)U(\tau)K(t,\tau)d\tau - H(t)\right]dt \qquad (m=1,2) \qquad (22)$$

Выясним характер напряжений в точках $\alpha=\alpha_0$ и $\alpha=\infty$. Из (22) после некоторых преобразований получаем

$$a\sigma_\beta^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_0}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha_0^2(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_0)}{\sqrt{\alpha^2-\alpha_0^2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\alpha_0^2})}\times$$

$$\times\int_0^\infty(\tau^2+1)U(\tau)J_0(\alpha_0\tau)d\tau+H_1(\alpha) \qquad (23)$$

где

$$H_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha_0(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta_0)\int_0^{\infty}(\tau^2+1)U(\tau)J_0(\alpha_0\tau)d\tau\int_0^{\infty}\frac{J_1(\alpha_0 t)\cos t\alpha dt}{t^2+1}-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha_0(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta_0)\int_0^{\infty}(\tau^2+1)\tau U(\tau)d\tau\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{t^2(\tau J_1(\alpha_0 t)J_0(\alpha_0\tau)-tJ_0(\alpha_0 t)J_1(\alpha_0\tau))\cos t\alpha dt}{(t^2+1)(t^2-\tau^2)}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha_0\int_0^{\infty}(\tau^2+1)U(\tau)d\tau\int_0^{\infty}\frac{t}{t^2+1}(t\,\mathrm{sh}\alpha\sin t\alpha-\cos t\alpha\cos\beta_0)K(t,\tau)d\tau+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[t^2(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta_0)\cos t\alpha-t\,\mathrm{sh}\alpha\sin t\alpha+\cos\beta_0\cos t\alpha\right]H(t)dt \qquad (24)$$

При $\alpha=\alpha_0$ на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка 1/2. В представленном виде (24) член, содержащий особенность в точке $\alpha=\alpha_0$, разделен, а $H_1(\alpha)\to 0$ при $\alpha=\alpha_0$.
Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x=a(\alpha=\infty)$ нормальное напряжение представим в виде

$$\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=\beta_0}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[t^2(1+e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}\cos\beta_0)+it(1-e^{-2\alpha})+2e^{-\alpha}\cos\beta_0\right]\times$$

$$\times\frac{T(t)}{\Lambda(t)}e^{\alpha(1+it)}dt \qquad (25)$$

где

$$T(t)=\frac{t_0 t\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{t^2+1}\int_0^{\infty}(\tau^2+1)U(\tau)K(t,\tau)d\tau-N(t)\Delta_1(t)\Delta_2(t) \qquad (26)$$

Интеграл (25) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x<0$ или $\alpha<0$) или нижней (при $x>0$ или $\alpha>0$) полуокружностями радиуса $R\to\infty$ с центром в начале координат. Применяя теорему о вычетах, представим (25) в виде бесконечного ряда

$$\sigma_\beta^{m}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_0}=-i\sqrt{2\pi}\left[t_1^2(1+e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}\cos\beta_0)+it_1(1-e^{-2\alpha})+2e^{-\alpha}\cos\beta_0\right]\times$$

$$\times\frac{T(t_1)}{\Delta'(t_1)}e^{\alpha(1-\eta_1+i\zeta_1)}-i\sqrt{2\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\text{выч}\left[t_k^2(1+e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}\cos\beta_0)-it_k(1-e^{-2\alpha})+\right.$$

$$\left.+2e^{-\alpha}\cos\beta_0\right]\frac{T(t_k)}{\Delta'(t_k)}e^{\alpha(1-\eta_k)} \qquad (27)$$

где $t_k=\zeta_k-i\eta_k$ – корни уравнения $\Delta(t)=0$ $(\zeta_k>0,\ \eta_k>0)$.

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x = a$ $(\alpha = \infty)$ определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1 = \zeta_1 - i\eta_1$ уравнения $\Delta(t) = 0$. Если $\eta_1 > 1$, имеем нулевое напряженное состояние. Если $\eta_1 < 1$, имеем концентрации напряжений. В случае $\eta_1 = 1$ напряжения на краю поверхности контакта конечны.

Укажем условие, из которого можно найти зону контакта. Для определения указанной зоны контакта используется условие равенства нулю контактных напряжений на границах трещины:

$$\int_0^{\infty}(\tau^2 + 1)U(\tau)J_0(\alpha_0\tau)d\tau = 0 \qquad (28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1976. Т.29, №1.С. 51-66.
3. Арутюнян Л.А., Апикян М.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами. Инж.проблемы строительной механики., Ереван: ЕрПИ 1985.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд. иностр. лит., ч.1, 1949. 798с.

Иститут Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
08. 04. 2002 г.