ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика

УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ НЕПОЛНЫХ СОСТАВНЫХ КОНУСОВ

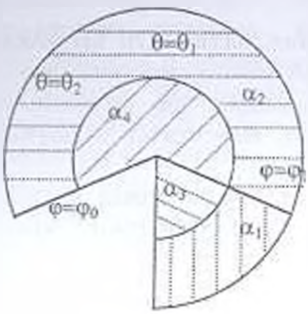
Аванян М. В., Баблоян А. А., Макарян В. С.

Մ. Վ. Ավանյան, Ա. Հ. Բաբլոյան, Վ. Ս. Մակարյան
Բաղադրյալ ոչ լրիվ կոների համար պոտենցիալի տեսության հիմնական խնդիրները

Ստացված են վերջավոր չափերով բաղադրյալ, ոչ լրիվ շրջանային կոների համար Դիրիխլեի և Նեյմանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները, երբ կոնական մարմինը կազմող չորս տարբեր նյութերն իրարից բաժանված են կոնական մակերևույթով և կիսահարթություններով: Հետազոտվում է հարմոնիկ ֆունկցիայի վարքը բաղադրյալ, ոչ լրիվ կոնի գագաթի շրջակայքում կախված բաղադրյալ մարմնի երկրաչափական, ֆիզիկական պարամետրերից և եզրային պայմաններից:

M. V. Avanyan, A.A. Babloyan, V.S. Makaryan
The Basic Problems of the Potential Theory for Incomplete Compound Cones

Получены точные решения задач Дирихле и Неймана для круговых составных неполных конусов конечных размеров, когда четыре составляющих различных материала разделены друг от друга конической поверхностью и полуплоскостью. Исследуется поведение гармонических функций в окрестности вершин неполных составных конусов.



Фиг. 1

В работе приводятся точные решения некоторых основных задач теории потенциала для области, ограниченной конической и сферической поверхностями, а также двумя полуплоскостями, проходящими через ось конуса (на фиг. 1 приведено сечение конуса, перпендикулярное к его оси). Рассматриваемое тело состоит из четырех различных материалов с различными физическими характеристиками α_k $(k=1\div4)$. Четыре различных материала разделены друг от друга конической поверхностью $\theta=\theta_1$ и полуплоскостью $\varphi=\varphi_1$. Задачи решаются в предположении $\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3=0$. Основная цель работы — изучение поведения гармонических функций при наличии источников в окрестности вершины неполных составных конусов в зависимости от свойств материалов, типа граничных условий и геометрических параметров.

Аналогичные вопросы для однородных неполных конусов исследовались в работах [1 – 5].

Пусть требуется решить трехмерную задачу Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=F(\rho,\theta,\varphi)$$

$$u(\rho,\theta,\varphi)\Big|_{\Gamma}=u_0(\rho,\theta,\varphi),\quad (0\le\rho\le R,\ 0\le\theta\le\theta_0,\quad 0\le\varphi\le\varphi_0) \qquad (1)$$

когда на поверхностях раздела четырех материалов $(\theta=\theta_1,\ \varphi=\varphi_1)$ соблюдаются условия сопряжения $(\alpha_1\alpha_4=\alpha_2\alpha_3)$

$$u(\rho,\theta_1-0,\varphi)=u(\rho,\theta_1+0,\varphi),\quad u(\rho,\theta_1,\varphi_1-0)=u(\rho,\theta_1,\varphi_1+0)$$

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_1-0}=\alpha_2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_1+0},\ \alpha_1\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_1+0}=\alpha_2\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_1-0} \qquad (2)$$

где (r,θ,φ) – сферические координаты, причем $0<\theta_1<\theta_0,\ 0<\varphi_1<\varphi_0,$ $\varphi_1+\varphi_2=\varphi_0$.

Сначала приведем решения следующих двух задач Штурм-Лиувилля с разрывами:

Задача 1.

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\ \Phi(0)=\Phi(\varphi_0)=0,\ \Phi(\varphi_1-0)=\Phi(\varphi_1+0)$$

$$\alpha_1\Phi'(\varphi_1-0)=\alpha_2\Phi'(\varphi_1+0) \qquad (3)$$

Нормированные собственные функции задачи (3) при условии $\sin\mu_p\varphi_1\ne0$ (или $\sin\mu_p\varphi_1\ne0$) имеют вид:

$$\varepsilon_p\Phi_p(\varphi)=\begin{cases}\sin\mu_p\varphi_2\sin\mu_p\varphi & (0\le\varphi\le\varphi_1)\\ \sin\mu_p\varphi_1\sin\mu_p(\varphi_0-\varphi) & (0\le\varphi\le\varphi_0)\end{cases}$$

$$2\varepsilon_p^2=\beta_1\varphi_1\sin^2\mu_p\varphi_2+\varphi_2\sin^2\mu_p\varphi_1;\quad \beta_1=\alpha_1/\alpha_2 \qquad (4)$$

а собственные числа μ_p в случае задачи Дирихле являются корнями уравнения

$$\sin\mu_p\varphi_1\cos\mu_p\varphi_2+\beta_1\sin\mu_p\varphi_2\cos\mu_p\varphi_1=0,\quad \mu_p>0 \qquad (5)$$

Для задачи Неймана в уравнении (5) нужно заменить $\beta_1\to\beta_1^{-1}$, а в формулах (4) – $\sin\gamma$ заменить на $\cos\gamma$.

В случае $\cos\mu_p\varphi_1\ne0,\ \cos\mu_p\varphi_2\ne0$ функции $\Phi_p(\varphi)$ имеют вид

$$\varepsilon_p\Phi_p(\varphi)=\begin{cases}\beta_1^{-1}\cos\mu_p\varphi_2\sin\mu_p\varphi & (0\le\varphi\le\varphi_1)\\ \cos\mu_p\varphi_1\sin\mu_p(\varphi_0-\varphi) & (0\le\varphi\le\varphi_0)\end{cases}$$

$$2\varepsilon_p^2=\beta_1^{-1}\varphi_1\cos^2\mu_p\varphi_2+\varphi_2\cos^2\mu_p\varphi_1 \qquad (6)$$

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,5\varphi_0$, функции $\Phi_p(\varphi)$ определяются простыми формулами

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} G_1^{-1}(\varphi)\sin\mu_p\varphi, \ \mu_p\varphi_0 = 2\pi p, \ 2\varepsilon_p^2 = \beta_1^{-1}\varphi_1 + \varphi_2 \\ \sin\mu_p\varphi, \ \mu_p\varphi_0 = (2p-1)\pi, \ 2\varepsilon_p^2 = \beta_1\varphi_1 + \varphi_2 \end{cases} \tag{7}$$

Задача 2.

$$\left[\sin\theta T'(\theta)\right]' + \left[\nu(\nu+1) - \mu_p^2 \sin^{-2}\theta\right] T(\theta)\sin\theta = 0 \tag{8}$$

$$|T(\theta)| < \infty, \ T(\theta_0) = 0, \ T(\theta_1 - 0) = T(\theta_1 + 0), \ \alpha_1 T'(\theta_1 - 0) = \alpha_1 T'(\theta_1 + 0)$$

Собственными функциями задачи (8) будут

$$T_{kp}(\theta) = \begin{cases} y_1(\theta), & (0 \le \theta \le \theta_1) \\ y_1(\theta) + \dfrac{(\beta_2 - 1)y_1'(\theta_1)}{y_0'(\theta_1)} y_0(\theta), & (\theta_1 \le \theta \le \theta_0) \end{cases} \tag{9}$$

где использованы обозначения

$$y_1(\theta) = P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta), \quad y_2(\theta) = Q_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)$$

$$y_0(\theta) = y_1(\theta)y_2(\theta_1) - y_1(\theta_1)y_2(\theta), \quad \beta_2 = \alpha_1 / \alpha_1 \tag{10}$$

Здесь $P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(x)$, $Q_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(x)$ – присоединенные функции Лежандра, μ_p – корень уравнения (5). Собственные числа ν_{kp} будем определять из уравнения

$$T_{kp}(\theta_0) = 0 \ \text{(для задачи Дирихле)}$$

$$T_{kp}'(\theta_0) = 0 \ \text{(для задачи Неймана)} \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что уравнения (5) и (11) имеют простые действительные корни.

Отметим, что системы функций $\{\Phi_p(\varphi)\}_{p=1}^{\infty}$ и $\{T_{kp}(\theta)\}_{k,p=1}^{\infty}$ ортогональны с кусочно-постоянными весами $G_1(\varphi)$ и $G_2(\theta)$ соответственно

$$G_1(\varphi) = \begin{cases} \beta_1 & (0 \le \varphi < \varphi_1) \\ 1 & (\varphi_1 < \varphi \le \varphi_0) \end{cases}, \quad G_2(\theta) = \begin{cases} \beta_2 & (0 \le \theta < \theta_1) \\ 1 & (\theta_1 < \theta \le \theta_0) \end{cases} \tag{12}$$

то есть

$$\int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi)\Phi_k(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi = \delta_{kp}, \quad \int_0^{\theta_0} G_2(\theta)T_{kp}(\theta)T_{mp}(\theta)d\theta = \delta_{km}\omega_{kp} \tag{13}$$

где δ_{kp} – символ Кронекера.

$$\omega_{kp}=\frac{\sin\theta_0}{2\nu_{kp}+1}\left[\dot{T}_{kp}(\theta_0)T'_{kp}(\theta_0)-T_{kp}(\theta_0)\dot{T}'_{kp}(\theta_0)\right]$$

$$\dot{T}_{kp}(\theta)=\frac{dT_{kp}(\theta)}{d\nu},\quad T'_{kp}(\theta)=\frac{dT_{kp}(\theta)}{d\theta} \tag{14}$$

При вычислении ω_{kp} необходимо учесть условие (11).

Решение задачи Дирихле (1) представим в виде двойного ряда Фурье

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{k,p=1}^{\infty}\omega_{kp}^{-1}X_{kp}(\rho)T_{kp}(\theta)\Phi_p(\varphi) \tag{15}$$

обращение которого в силу (13) будет

$$X_{kp}(\rho)=\int_0^{\theta_0}\int_0^{\varphi_0}u(\rho,\theta,\varphi)G_1(\varphi)G_2(\theta)T_{kp}(\theta)\Phi_p(\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{16}$$

Применяя метод Гринберга к уравнению (1), для определения неизвестных функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение

$$\left[\rho^2X'_{kp}(\rho)\right]'-\nu_{kp}(\nu_{kp}+1)X_{kp}(\rho)=f_{kp}(\rho),\quad \left|X_{kp}(0)\right|<\infty,\quad X_{kp}(R)=A_{kp} \tag{17}$$

В силу граничного условия (1) $f_{kp}(\rho)$ и A_{kp} можно считать известными.

Решение уравнения (17), полученное методом вариации постоянных и дальнейшим предельным переходом, имеет вид:

$$X_{kp}(\rho)=A_{kp}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}-\int_0^R\frac{K_{kp}(x,\rho)}{(2\nu_{kp}+1)R}f_{kp}(x)dx$$

$$K_{kp}(x,\rho)=\begin{cases}x_0^{\nu_{kp}}\left(\rho_0^{-\nu_{kp}-1}-\rho_0^{\nu_{kp}}\right) & (x\le\rho)\\ \rho_0^{\nu_{kp}}\left(x_0^{-\nu_{kp}-1}-x_0^{\nu_{kp}}\right) & (x\ge\rho)\end{cases},\quad x_0=\frac{x}{R},\quad \rho_0=\frac{\rho}{R} \tag{18}$$

Подставляя найденные функции $X_{kp}(\rho)$ из (18) в (15), получим окончательное решение задачи Дирихле (1). При этом ряд (15) будет сходиться абсолютно и равномерно со своими первыми производными в замкнутой области неполного составного конуса, если граничная функция удовлетворяет условиям: а) непрерывна, б) имеет непрерывные первые производные везде, кроме точек линий пересечений раздела материалов с граничной поверхностью, в) на этих линиях $u_0(\rho,\theta,\varphi)$ удовлетворяет условиям (2).

В частном случае, когда

$$f_{kp}(\rho)=B_{kp}\rho_0^{\alpha},\quad (\alpha+\nu_{11}>-1,\ \alpha\neq\nu_{kp}) \tag{19}$$

для $X_{kp}(\rho)$ из (18) получим следующее выражение:

$$X_{kp}(\rho) = A_{kp}\rho_0^{\nu_{kp}} - \frac{B_{kp}(\rho_0^{\nu_{kp}} - \rho_0^{\alpha})}{(\alpha - \nu_{kp})(\alpha + \nu_{kp} + 1)} \qquad (20)$$

Асимптотика функции $u(r,\theta,\varphi)$ в малой окрестности вершины неполного конуса ($\rho << R$) определяется первым членом ряда (15).

Из (20) следует, что асимптотика гармонической функции в малой окрестности вершины составного неполного конуса, при $\rho << R$ будет иметь вид:

а) $u(\rho,\theta,\varphi) \approx 2(A_{11} + \widetilde{B}_{11})\omega_{11}^{-1}\rho_0^{\nu_{11}} Z(\theta,\varphi) \qquad (\nu_{11} < \alpha)$

б) $u(\rho,\theta,\varphi) \approx -\widetilde{B}_{11}\omega_{11}^{-1}\rho_0^{\alpha} Z(\theta,\varphi) \qquad (\alpha < \nu_{11})$

в) $u(\rho,\theta,\varphi) \approx (A_{11} + \dfrac{B_{11}\ln\rho_0}{2\nu_{11}+1})\omega_{11}^{-1}\rho_0^{\alpha} Z(\theta,\varphi) \qquad (\alpha = \nu_{11}) \qquad (21)$

где $\quad B_{11} = \widetilde{B}_{11}(\alpha - \nu_{11})(\alpha + \nu_{11} + 1), \qquad Z(\theta,\varphi) = T_{11}(\theta)\Phi(\varphi)$.

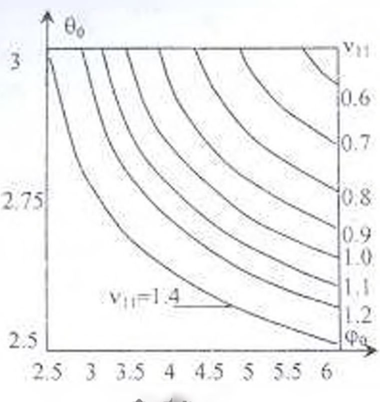
Путем дифференцирования из (21) можно получить асимптотические формулы для всех производных гармонических функций.

На фиг. 2 приведены графики функции $\nu_{11}(\varphi_0,\theta_0) = C$, полученные из первого уравнения (11) (задача Дирихле) при следующих значениях параметров:

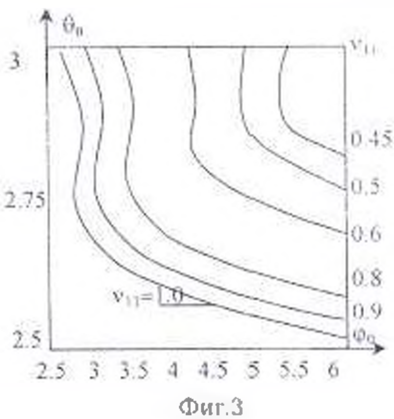
$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = 6,\ \varphi_2 = 0{,}3\varphi_1,\ \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0,\ \theta_2 = 20,$

$2{,}5 \le \varphi_0 \le 6{,}28\ \ 2{,}5 \le \theta_0 \le 3{,}14.\ \ \nu_{11} = \text{const} = 0{,}45 \div 1{,}4$

На фиг. 3 приведены аналогичные графики, полученные из второго уравнения (11) (задача Неймана) при тех же значениях параметров.



Фиг.2



Фиг.3

Отметим, что как в задаче Дирихле, так и в задаче Неймана, функции $\nu = \nu(\varphi_0,\theta_0)$, определяемые из (11), в общем случае являются неоднозначными. На фиг. 2, 3 приведены графики только первых ветвей функций $\nu = \nu_{11}(\varphi_0, \theta_0)$.

Задача 3. Задача Дирихле для составного полного кругового конуса конечной длины.

Пусть круговой полный конус состоит из двух различных материалов (с физическими параметрами α_1 и α_2), которые разделены друг от друга двумя полуплоскостями ($\varphi = \pm\varphi_1$, $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le \theta_0$). Требуется решить неоднородное уравнение Лапласа (1) для составного конуса ($0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le \theta_0$, $-\pi \le \varphi \le \pi$) конечной длины при граничных условиях первого рода

$$u(\rho, \theta_0, \varphi) = u_1(\rho, \varphi), \quad u(R, \theta, \varphi) = u_2(\theta, \varphi) \tag{22}$$

Для простоты рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1) и функции (22)четные относительно полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. При этом задачу будем решать только для области $0 \le \varphi \le \pi$, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$\frac{\partial u(\rho, \theta, 0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial u(\rho, \theta, \pi)}{\partial \varphi} = 0 \tag{23}$$

и условиям сопряжений двух различных материалов

$$u(\rho, \theta, \varphi_1 - 0) = u(\rho, \theta, \varphi_1 + 0), \quad \alpha_1 \frac{\partial u(\rho, \theta, \varphi_1 - 0)}{\partial \varphi} = \alpha_2 \frac{\partial u(\rho, \theta, \varphi_1 + 0)}{\partial \varphi} \tag{24}$$

Решение задачи Дирихле для полного составного конуса ищем в виде двойного ряда Фурье

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X_{kp}(\rho)}{\omega_{kp}} \cdot P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta) \Phi_p(\varphi) \tag{25}$$

где μ_p и ν_{kp} являются неотрицательными корнями уравнений ($\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$)

$$\alpha_0 \sin\mu_p\varphi_1 \cdot \cos\mu_p\varphi_2 + \sin\mu_p\varphi_2 \cdot \cos\mu_p\varphi_1 = 0, \quad P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0) = 0 \tag{26}$$

а функции $\Phi_p(\varphi)$ имеют вид (при $\cos\mu_p\varphi_k \ne 0$, $k = 1, 2$)

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos\mu_p\varphi_1 \cdot \cos\mu_p\varphi, & (0 \le \varphi \le \varphi_1) \\ \cos\mu_p\varphi_2 \cdot \cos\mu_p(\pi - \varphi) & (\varphi_1 \le \varphi \le \pi) \end{cases} \tag{27}$$

$$2\varepsilon_p^2 = \alpha_1\varphi_1 \cos^2\mu_p\varphi_2 + \alpha_2\varphi_2 \cos^2\mu_p\varphi_1 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\omega_{kp} = \int_0^{\theta_0} \left(P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\right)^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{\sin\theta_0}{2\nu_{kp} + 1} \cdot \dot{P}_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0) \cdot \frac{dP_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)}{d\theta}$$

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0.5\pi$, для функций $\Phi_p(\varphi)$ будем иметь

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos\mu_p\varphi, & (\mu_p = 2p) \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,\rho_0^{-1}(\varphi)\cos\mu_p\varphi & (\mu_p = 2p-1) \end{cases}, \quad 4\varepsilon_p^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\pi \tag{28}$$

Функции $\Phi_p(\varphi)$ ортогональны на интервале $[0,\pi]$ с весом $\rho_0(\varphi)$

$$\int_0^\pi \rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)\Phi_k(\varphi)\,d\varphi = \delta_{kp}, \quad \rho(\varphi) = \begin{cases} \alpha_1 & (0 \le \varphi < \varphi_1) \\ \alpha_2 & (\varphi_1 < \varphi \le \pi) \end{cases} \tag{29}$$

Аналогичным образом для определения функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение (17), где

$$f_{kp}(\rho) = g_{kp}(\rho) + \sin\theta_0 \cdot \frac{dP_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)}{d\theta_0} \int_0^\pi u_1(\rho,\varphi)\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)\,d\varphi$$

$$g_{kp}(\rho) = \int_0^{\theta_0}\int_0^\pi G(\rho,\theta,\varphi)\cdot P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\cdot\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)\,d\theta\,d\varphi \tag{30}$$

$$A_{kp} = \int_0^{\theta_0}\int_0^\pi u_2(\theta,\varphi)\cdot P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\cdot\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

Решение уравнения (17) при обозначениях (30) дается формулой (18). Окончательное решение задачи Дирихле определяется формулами (25), (17) и (30).

Литература

1. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 258с.
2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262с.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задачах с коническими точками// Math.Nachr., 1977. V.76.
5. Геворкян Г. З., Макарян В. С. Контактная задача для шарового сектора // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. №1. С. 51-60.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
6.03.2002