

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ФЕРМ

Геворкян Г. А.

Գ. Ա. Գևորգյան

Ֆերմաների ծուխերի ճիգերի որոշման մեթոդ

Առաջարկվում է ֆերմաների ծուխերի ճիգերի որոշման նոր մեթոդ՝ ֆերման զարդ և լինել ինչպես ներքին, այնպես էլ արտաքին առանցքային անորոշ:

G. A. Gevorgyan

About a Method of Analysis of Strains in Trusses

Предлагается новый метод определения усилий в стержнях фермы. Ферма может быть как внешне, так и внутренне статически неопределимой.

1. Введение.

При использовании принципа наименьшей работы в практических расчетах ферм порядок действий следующий [2]. Выбирают основную систему и составляют общее выражение потенциальной энергии системы. Далее, взяв по неизвестным усилиям от потенциальной энергии частные производные, находят канонические уравнения. Как сказано в [2], такой прием расчета в практике распространения не имеет, так как вышеуказанный метод нахождения канонических уравнений сложен.

В данной работе, принимая во внимание, что потенциальная энергия деформации является однородной функцией второй степени усилий, и, исходя из принципа наименьшей работы [3], задачу об определении усилий в элементах статически неопределимой фермы сводим к задаче выпуклого квадратичного программирования. При таком подходе нахождения канонических уравнений не требуется, что облегчает решение задачи.

2. Задача об определении усилий в элементах статически неопределимой фермы.

Рассмотрим плоскую статически неопределимую ферму. Ферма имеет K узлов, $n \geq 2K - 3$ элементов (стержней) и $n_1 \geq 3$ связей. Очевидно, что ферма внешне статически определима, если $n_1 = 3$, и внутренне статически определима, если $n = 2K - 3$. Усилия в стержнях обозначим через S_1, S_2, \dots, S_n , а через R_1, R_2, \dots, R_n — опорные реакции. Из этих неизвестных величин составим векторы-столбцы $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)^T$ и $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$.

Выделим сечениями все K узлы и составим условия их равновесия под действием внешних нагрузок (опорных реакций) и усилий в рассеченных стержнях. Эти условия разделим на две части. Часть из них

составляют те условия, которые содержат опорные реакции, а другая не содержит опорных реакций. Первая из этих частей имеет следующий вид:

$$R = \bar{A}S \quad (1)$$

а другая соответственно:

$$AS = F \quad (2)$$

Здесь $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $\bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n)$ — матрицы, где $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$, $\bar{A}_j = (\bar{a}_{1j}, \bar{a}_{2j}, \dots, \bar{a}_{mj})^T$ и $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$ — векторы-столбцы, $j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, $j_1 \in N_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$, $m = 2K - n$.

Сжатые стержни могут потерять устойчивость, при которой они выбивают из работы непосредственно после возникновения в них критического напряжения. Исходя из этого, имеем

$$S \geq P \quad (3)$$

где $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$ — вектор критических сил стержней $j \in N$.

Составим выражение потенциальной энергии

$$\Omega = \sum_{j \in N} d_j S_j^2 / 2 \quad (4)$$

где d_j — податливость стержней $j \in N$.

Таким образом, если исходить из принципа наименьшей работы, рассматриваемая задача об определении усилий в элементах статически неопределимой фермы с учетом потерь устойчивости сжатых стержней сводится к следующей задаче выпуклого квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \sum_{j \in N} d_j S_j^2 / 2 \mid AS = F, S \geq P \right\} \quad (5)$$

Обозначим

$$X = S - P \quad (6)$$

тогда уравнение (2) и соотношение (3) соответственно переищутся в виде

$$AX = B \quad (7)$$

$$X \geq 0 \quad (8)$$

Здесь $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ и $B = F - AP$ (9)

Подставляя полученное из равенства (6) значение вектора S в выражение потенциальной энергии (4) и пренебрегая постоянным слагаемым, находим

$$\Omega = C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \quad (10)$$

где $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, D — диагональная матрица n -ого порядка с диагональными элементами d_j , $j \in N$. При этом имеем

$$c_j = d_j P_j, \quad d_j = d_j, \quad j \in N \quad (11)$$

С учетом соотношений (7), (8) и (10) задача (5) переищется в виде

$$\min \left\{ C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \mid AX = B, X \geq 0 \right\} \quad (12)$$

3. Алгоритм решения.

Для решения задачи (12) используем некоторую модификацию алгоритма, полученного на основе физической модели задач квадратичного программирования [1]. Рассмотрим его:

Нулевой шаг: принимаем

$$N^{(0)} = N; B^{(0)} = F \quad (13)$$

и находим обратную матрицу G_0^{-1} . Здесь, $G_0 = AD^{-1}A^T$.

Алгоритм определения обратной матрицы G_0^{-1} рассмотрим в пункте 4 данной работы.

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в k -ом шаге. На этом шаге предполагаются заданными множество $N^{(k)}$, матрица $G_k^{-1} = \|g_c^{(k)}\|$ и векторы $Z^{(k)}$, $B^{(k)}$, $X^{(k)}$ и $W^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})^T$. Обозначим количество элементов множества $N^{(k)}$ через $n^{(k)}$, в зависимости от значения которого рассмотрим два возможных варианта.

Вариант 1. Пусть, $n^{(k)} > 2K - 3$. Предположим, что имеют место следующие соотношения:

$$x_j^{(k)} = 0, j \in N \setminus N^{(k)}, w_j^{(k)} = 0, j \in N^{(k)} \quad (14)$$

Находим вектор $Z^{(k)}$ и ненулевые компоненты векторов $X^{(k)}$ и $W^{(k)}$ по формулам

$$Z^{(k)} = G_k^{-1} B^{(k)} \quad (15)$$

$$x_j^{(k)} = d_j^{-1} (A_j^T Z^{(k)} - c_j), j \in N^{(k)} \quad (16)$$

$$w_j^{(k)} = c_j - A_j^T Z^{(k)}, j \in N \setminus N^{(k)} \quad (17)$$

На основе этих величин составим множества

$$Q^{(k)} = \{j \in N^{(k)} \mid x_j^{(k)} < 0\} \quad (18)$$

$$R^{(k)} = \{j \in N \setminus N^{(k)} \mid w_j^{(k)} < 0\} \quad (19)$$

и рассмотрим следующие возможные случаи:

1.1'. $Q^{(k)} \in \emptyset$ и $R^{(k)} \in \emptyset$. Тогда вектор $X^{(k)}$ является решением задачи (12).

1.2'. $Q^{(k)} \notin \emptyset$ и $R^{(k)} \in \emptyset$. Находим элемент q по критерию

$$x_q^{(k)} = \min_{j \in Q^{(k)}} \{x_j^{(k)}\} \quad (20)$$

и формируем множество

$$N^{(k+1)} = N^{(k)} \setminus \{q\} \quad (21)$$

в соответствии с которым последовательно находим [1]:

$$\hat{A}_q = d_q^{-1} A_q, B^{(k+1)} = B^{(k)} - c_q \hat{A}_q \quad (22)$$

$$\hat{S}_q = G_k^{-1} \hat{A}_q \quad (23)$$

$$T_q = (d_q^{-1} - \hat{A}_q^T \hat{S}_q)^{-1} \quad (24)$$

$$g_i^{(k+1)} = g_i^{(k)} + T_q S_q^i S_q^j, i \in M, j \in M \quad (25)$$

1.3'. $R^{(k)} \notin \emptyset$. Находим элемент p по критерию

$$w_p^{(k)} = \min_{i \in N_p^{(k)}} \{w_i^{(k)}\} \quad (26)$$

и формируем множество

$$N_p^{(k+1)} = N^{(k)} \cup \{p\} \quad (27)$$

в соответствии с которым последовательно находим векторы $B_p^{(k+1)}$, S_p , число T_p и матрицу $G_{k,p}^{-1}$ по формулам [2]:

$$\hat{A}_p = d_p^{-1} A_p, B_p^{(k)} = B^{(k)} + c_p \hat{A}_p \quad (28)$$

$$S_p = G_k^{-1} \hat{A}_p \quad (29)$$

$$T_p = (d_p^{-1} - \hat{A}_p^T S_p)^{-1} \quad (30)$$

$$g_{ij}^{(k,p)} = g_{ij}^{(k)} - T_p S_p^i S_p^j, \quad i \in M, j \in M \quad (31)$$

По аналогичным формулам (15), (17) и (19) формируем множество $R_p^{(k)}$ и, если оно пусто, то переходим к $k+1$ -ому шагу, а в противном случае повторяем действия этого пункта. Как следует из соотношения (27), количество элементов множества $N \setminus N_p^{(k)}$ уменьшается, поэтому сделав не больше $n - n^{(k)} + 1$ шагов, приходим к случаю, когда множество $R_p^{(k)}$ становится пустым.

Таким образом, при переходе от k -го к $(k+1)$ -ому шагу или приходим к случаю 1.1^о, при котором получаем решение задачи (12), или приходим к варианту 2, при котором количество элементов множества $N^{(k)}$ становится равным $2K-3$ и $R^{(k)} \in \emptyset$.

Перейдем к рассмотрению этого варианта.

Вариант 2. Пусть $n^{(k)} = 2K-3$. Здесь возможны два случая:

2.1^о. Пусть $Q^{(k)} \in \emptyset$. Тогда вектор $X^{(k)}$ является решением задачи (12).

2.2^о. Пусть $Q^{(k)} \notin \emptyset$. Тогда задача (12) неразрешима.

4. Алгоритм определения обратной матрицы.

Алгоритм определения обратной матрицы G^{k-1} состоит из двух этапов [1].

Первый этап. Нулевой шаг: принимаем

$$G_0^{-1} = E, \quad p = 1 \quad (32)$$

где $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ — единичная матрица порядка m .

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в k -ом шаге. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению k -ого шага. Зафиксируем некоторый элемент $p \in N$, в соответствии с которым последовательно находим векторы $\hat{A}_p^{(k)}$, S_p , число T_p и матрицу $G_{k,p}^{-1}$ по формулам (28) — (31):

Эти вычисления повторяем n раз для всех векторов $\Lambda_j, j \in N$.

Второй этап. Нулевой шаг: принимаем

$$G_0^{-1} = G_a^{-1} \quad (33)$$

Перейдем непосредственно к рассмотрению k -ого шага. Зафиксируем некоторый элемент $q \in M$, в соответствии с которым последовательно находим векторы $\bar{A}_q^{(k)}$, S_q , число T_q и матрицу G_k^{-1} по формулам

$$\bar{A}_q = E_q, \quad B_q^{(k)} = B^{(k)} \quad (34)$$

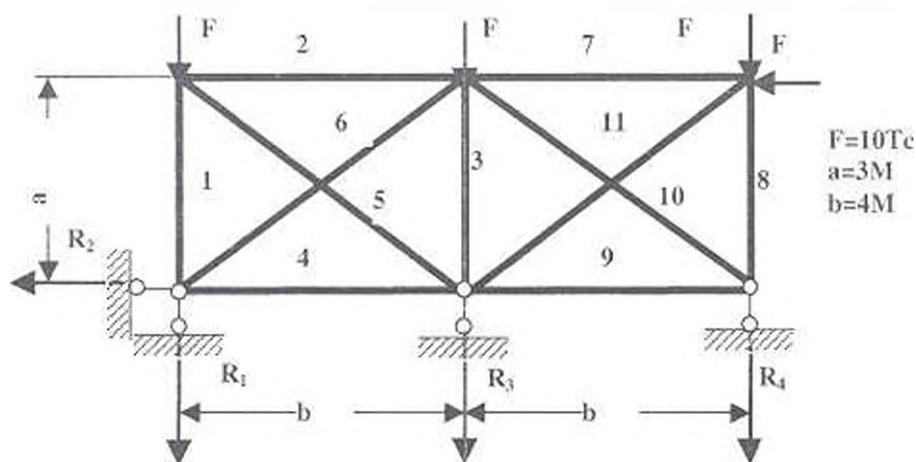
и формулам (23) - (25).

Эти вычисления повторяем m раз для всех векторов $E_i, i \in M$. При $q = m$ получим

$$G^{-1} = G_{k,m}^{-1} \quad (35)$$

5. Примеры.

Задача 1. Требуется найти опорные реакции и усилия в элементах, изображенной на фиг. 1, статически неопределимой фермы с учетом потерь устойчивости ее сжатых стержней. Площади поперечных сечений и материалы всех элементов одинаковы. Стержни 5 и 6, а также 10 и 11, общего узла не имеют. Стержни изготовлены из стальных швеллеров номер 8.



Фиг. 1

Выделим сечениями все 6 узлов и составим условия их равновесия. Тогда, для уравнений (2) получаем следующую матрицу коэффициентов неизвестных:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 \end{vmatrix}$$

а для уравнений (1) — следующую:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$$

Для вектора свободных членов уравнения (2), а также для вектора В из равенства (9) получаем

$$F = (10;0;0;10;0;0;10;10)^T$$

Жесткости всех стержней примем равными 1. Имеем следующие значения податливости

$$d_1 = d_3 = d_8 = 3; \quad d_2 = d_4 = d_7 = d_{11} = 4; \quad d_5 = d_6 = d_{10} = d_{12} = 5$$

По формуле Эйлера для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами [2], находим компоненты вектора критических сил, имеем

$$P = (-19,6; -11; -19,6; -11; -7; -7; -11; -19,6; -11; -7; -7)^T$$

С учетом связей (11), находим:

$$C = (-58,8; -44; -58,8; -44; -35; -35; -44; -58,8; -44; -35; -35)^T$$

и тем самым заканчиваем формирование задачи квадратичного программирования. Перейдем к решению этой задачи.

Нулевой шаг: принимаем

$$N^{(0)} = N = \{1, 2, \dots, 11\} \text{ и } B^{(0)} = F.$$

Определяем обратную матрицу $G_{(0)}^{-1}$, используя приведенный в пункте 4 алгоритм определения обратной матрицы. Далее, по формулам (17) и (18) последовательно находим векторы

$$Z^{(0)} = (28,17; -32,90; 18,14; 17,41; 29,64; 17,61; 17,67; 47,714)^T$$

$$X^{(0)} = (10,21; 11,81; 13,80; 6,465; 5,982; 0,1687; 6,481; 13,71; 11,13; 6,84; 0,1481)^T$$

Так как в нулевом шаге $W^{(0)} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0)^T$, то вектор $X^{(0)}$ является решением задачи (12).

По формулам (6) и (1) находим векторы

$$S = (-9,389; 0,8148; -5,802; -4,535; -1,018; -6,832; -4,518; -5,889; 0,1317; -0,1646; -6,8518)^T$$

$$R = (-13,49; -10; -10,53; -5,988)^T$$

Задача 2. Решим предыдущую задачу при $F = 20 \text{ Тс}$.

Нулевой шаг: Здесь $F = (20;0;0;20;0;0;20;20)^T$. По формулам (15), (16) находим векторы

$$Z^{(0)} = (56,33; -65,80; 36,28; 34,81; 59,28; 35,23; 35,33; 95,428)^T$$

$$X^{(0)} = (0,8222; 12,63; 7,995; 1,93; 4,963; -6,662; 1,963; 7,822; 11,26; 6,671; -6,704)^T$$

так как вектор $X^{(0)}$ содержит отрицательные компоненты, то по критерию (20) находим $q = 11$ и переходим к следующему шагу.

Первый шаг: По формулам (22) - (25) последовательно находим

$$\hat{A}_{11} = (0;0;0,16;0;0;0;-0,12;-0,16)^T, \quad B^{(1)} = (20;0;5,6;20;0;0;15,8;14,4)^T$$

$$S_{11} = (-0,0486; 0,1065; 0,0988; 0; -0,1929; -0,1597; -0,4769)^T$$

$$T_{11} = 6,671.$$

По формулам (15), (16) находим векторы

$$Z^{(1)} = (60,01; -73,84; 28,82; 34,81; 73,85; 35,23; 47,4; 131,5)^T$$

$$X^{(1)} = (-0,4019; 11,0; 7,995; 3,795; 7,003; -8,994; -3,4; 3,8; 9,398; 9,004; 0)^T$$

Так как вектор $X^{(1)}$ содержит отрицательные компоненты, то по критерию [20] находим $q = 6$ и переходим к следующему шагу.

Второй шаг: По формулам (22)–(25) и (15), (16) последовательно находим

$$A_6 = (0; 0; 0; -0,12; -0,16; 0; 0; 0)^T, B^{(2)} = (20; 0; 5,6; 15,8; -5,6; 0; 15,8; 14,4)^{T^T},$$

$$S_6 = (-0,07246; 0,535; -0,2290; -0,1875; -0,6638; -0,3292; 0; -0,6638)^T$$

$$T_6 = 13,97$$

$$Z^{(2)} = (69,11; -141,1; 57,6; 58,09; 157,3; 76,6; 47,4; 214,9)^T$$

$$X^{(2)} = (-3,4375; 6,95; 0,2375; -3,4; 12,0625; 0; -3,4; 3,8; 6,25; 12,9375; 0)^T$$

Так как $n^{(2)} = 7 - 2K - 3$, то находим вектор $W^{(2)} = (0; 0; 0; 0; 125,7; 0; 0; 0; 0; 119,3)^T$.

Так как вектор $W^{(2)}$ не содержит отрицательных компонентов, а вектор $X^{(2)}$ содержит, то задача 2 не имеет решения (сторжи 1, 6 и 11 потеряют устойчивость).

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г. А. Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1987.
2. Дарков А. В., Касян Г. К., Кузнецов В. И., Лужкин О. В., Рекач В. Г., Синельников В. В., Шаширо Г. С. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1976.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Ереванский государственный
университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
6.12.2001