ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №2, 2002 Механика

УДК 539.3

# НАПРЯЖЕНИЯ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ СОСТАВНЫХ КОНИЧЕСКИХ ТРУБ

Арутюнян С.А.

Ս. Ա. Հարությունյան
Ամրապնդվող բաղադրյալ կոնական խողովակների լարումները

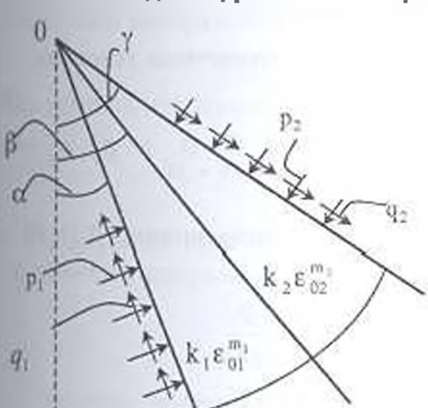
Աշխատանքում ուսումնասիրվում է աստիճանային օրենքով ամրապնդվող նյութից բաղկացած բաղադրյալ կոնական խողովակի լարվածային վիճակը, որը գտնվում է միաժամանակ ազդող հավասարաչափ բաշխված ներքին և արտաքին նորմալ և շոշափող ուժերի ազդեցության տակ: Խնդրի լուծումը հանգում է երկու սովորական ոչ - գծային դիֆերենցիալ հավասարումներից կազմված համակարգի լուծմանը համապատասխան եզրային և կոնտակտային պայմաններով: Գծային - առաձգական խողովակների համար, շոշափող ուժերի բացակայության դեպքում կառուցված են լարումների գրաֆիկները:

S. A. Harutunyan
Stresses in hardening compound conical tubes

В работе рассматривается напряженное состояние составной конической трубы из упрочняющихся по степенному закону материалов, находящейся под совместным действием внутренних и внешних равномерно распределенных нормальных и продольных касательных сил. Решение задачи сводится к определению неизвестных функций из системы, состоящей из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений при соответствующих гранично-контактных условиях. При отсутствии касательных сил, для линейного материала построены графики напряжений.

Рассматривается напряженное состояние составной конической трубы из упрочняющихся по степенному закону материалов, находящейся под совместным действием внутренних и внешних равномерно распределенных нормальных и продольных касательных сил (Фиг.1).

**1. Исходные уравнения и граничные условия.**




Фиг. 1

Поставленная задача рассматривается в сферической системе координат в предположении, что трубы имеют общую вершину, причем для внутренней трубы $\alpha \le \theta \le \beta$, а внешней – $\beta \le \theta \le \gamma$. Поверхность $\theta = \beta$ является конической, где выполняются условия непрерывности перемещений $u_i$ и $v_i$, а также нормальных и продольных касательных напряжений $\sigma_{\theta i}$ и $\tau_{r\theta i}$.

Учитывая законы упрочнения

труб, зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций примем в форме

$$\sigma_{0i} = k_i \varepsilon_{0i}^{m_i},$$

где $k_i$ и $m_i$ — известные параметры, определяемые из экспериментов. Индекс $i=1$ относится к внутренней, а $i=2$ – к внешней трубе. Далее, используя осесимметричность деформирования труб, имеем

$$\sigma_{0i} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_{ri}-\sigma_{\theta i})^2 + (\sigma_{\theta i}-\sigma_{\varphi i})^2 + (\sigma_{\varphi i}-\sigma_{ri})^2 + 6\tau_{r\theta i}^2}$$

$$\varepsilon_{0i} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_{ri}-\varepsilon_{\theta i})^2 + (\varepsilon_{\theta i}-\varepsilon_{\varphi i})^2 + (\varepsilon_{\varphi i}-\varepsilon_{ri})^2 + 6\gamma_{r\theta i}^2}$$

Компоненты напряжений в каждой трубе удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta i}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i} - \sigma_{\varphi i} + \tau_{r\theta i}\operatorname{ctg}\theta\right) = 0 \\ \frac{\partial\tau_{r\theta i}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta i}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left[(\sigma_{\theta i} - \sigma_{\varphi i})ctg\theta + 3\tau_{r\theta i}\right] = 0\end{gathered} \qquad (1)$$

При этом зависимость между компонентами напряжений и деформаций представится в следующем виде:

$$\sigma_{ri} - \sigma_i = 2k_i\varepsilon_{0i}^{m_i-1}\varepsilon_{ri}, \qquad \sigma_{\varphi i} - \sigma_i = 2k_i\varepsilon_{0i}^{m_i-1}\varepsilon_{\varphi i}$$

$$\sigma_{\theta i} - \sigma_i = 2k_i\varepsilon_{0i}^{m_i-1}\varepsilon_{\theta i}, \qquad \tau_{r\theta i} = 2k_i\varepsilon_{0i}^{m_i-1}\gamma_{r\theta i}$$

а между компонентами деформаций и перемещений имеет вид

$$\varepsilon_{ri} = \frac{\partial u_i}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta i} = \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_i}{\partial\theta}, \quad 2\gamma_{r\theta i} = \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_i}{\partial\theta}$$

$$\varepsilon_{\varphi i} = \frac{u_i}{r} + \frac{v_i}{r}ctg\theta$$

Тогда, условие несжимаемости $\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{\theta i} + \varepsilon_{\varphi i} = 0$ будет

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(u_i r^2 \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_i r\sin\theta\right) = 0$$

Решение задачи определяется при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{\theta i} = -p_i, \quad \tau_{r\theta i} = q_i \quad \text{при} \quad \theta = \alpha,\ \gamma \qquad (2)$$

$p_1$ и $q_1$ — заданные значения сил на поверхности $\theta=\alpha$, а $p_2$, $q_2$ — на поверхности $\theta=\gamma$.

**2. Представление решения**. Вводя функцию перемещения $\Phi_i(r,\theta)$ в форме

$$u_i = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\theta}, \qquad v_i = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}$$

и полагая $\Phi_i = r^3 f_i(\theta)\sin\theta$, для перемещения будем иметь

$$u_i = r\,(f_i' + f_i ctg\theta), \qquad v_i = -3rf_i \qquad (3)$$

Тогда компоненты деформаций представятся в виде

$$\varepsilon_{ri} = f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta, \qquad \varepsilon_{\varphi i} = -2 f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta$$

$$\varepsilon_{\theta i} = f_i' - 2 f_i \operatorname{ctg}\theta, \qquad 2\gamma_{r\theta i} = \left(f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta\right)'$$

Для интенсивности деформаций получаем

$$\varepsilon_{0i} = \sqrt{\left(f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta\right)'^2 + 12\left(f_i'^2 - f_i' f_i \operatorname{ctg}\theta + f_i^2 \operatorname{ctg}^2\theta\right)} \tag{4}$$

а выражения для компоненты напряжений преобразуются к виду

$$\begin{aligned} &\sigma_{ri} = \sigma_{0i} + 6k_i f_i X_i, \quad \sigma_{\varphi i} = \sigma_{0i} + 6k_i\left(f_i' - f_i \operatorname{ctg}\theta\right) X_i \\ &\tau_{r\theta i} = k_i\left(f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta\right)' X_i \end{aligned} \tag{5}$$

где обозначено

$$X_i = \left(\sqrt{\left(f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta\right)'^2 + 12\left(f_i'^2 - f_i' f_i \operatorname{ctg}\theta + f_i^2 \operatorname{ctg}^2\theta\right)}\right)^{m_i - 1} \tag{6}$$

Подставляя выражения для компонент напряжений (5) сначала во второе, а затем в первое дифференциальное уравнение равновесия (1) и интегрируя при граничных условиях (2), приходим к следующим выражениям для напряжений:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\theta 1} = -p_1 - 3k_1 \int_\alpha^\theta Q_1(\theta)\, X_1(\theta)\, d\theta \qquad \alpha \le \theta \le \beta, \\ &\sigma_{\theta 2} = -p_1 - 3k_2 \int_\alpha^\gamma Q_2(\theta)\, X_2(\theta)\, d\theta \qquad \alpha \le \theta \le \beta, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$Q_i = \left(f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta\right)' - 2\left(f_i' - f_i \operatorname{ctg}\theta\right)\operatorname{ctg}\theta \tag{8}$$

и к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left[\left(f_i' + f_i \operatorname{ctg}\theta\right)' X_i \sin\theta\right]' + 6\left(f_i \sin\theta\right)' X_i = 0 \tag{9}$$

Используя условия непрерывности перемещений $u_i$ и $v_i$ на контактной поверхности $\theta = \beta$, из (3) получаем

$$f_1(\beta) = f_2(\beta), \qquad f_1'(\beta) = f_2'(\beta) \tag{10}$$

а из условия непрерывности нормального напряжения имеем

$$p_1 - p_2 + 3k_1 \int_\alpha^\beta Q_1 X_1 d\theta + 3k_2 \int_\beta^\gamma Q_2 X_2 d\theta = 0 \tag{11}$$

Подставляя граничные условия (2) в выражение (5) для касательного напряжения, получаем

$$\begin{aligned} &X_1(\alpha)(f_1' + f_1 \operatorname{ctg}\theta)'_{\theta=\alpha} = q_1/k_1 \\ &X_2(\gamma)(f_2' + f_2 \operatorname{ctg}\theta)'_{\theta=\gamma} = q_2/k_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Условие непрерывности для этого же напряжения на контактной поверхности будет

$$(f_1' + f_1 \operatorname{ctg}\theta) X_1 = \delta\left(f_2' + f_2 \operatorname{ctg}\theta\right) X_2 \quad \text{при} \quad \theta = \beta \tag{13}$$

где $\delta = k_2/k_1$.

Таким образом, решение задачи определения напряженного состояния составной конической трубы сводится к определению функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ из системы (9), состоящей из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений при гранично-контактных условиях (10) - (13). В общем случае решение этой системы уравнений можно получить, например, методами Галеркина или Ритца.

Рассмотрим частный случай задачи, для которого получено аналитическое решение путем сведения к уравнению Лежандра.

**3. Линейно-упругие материалы.** Исследуется составная коническая труба из линейно-упругих материалов, находящаяся под совместным действием равномерно-распределенных нормальных и касательных сил на внутренней и внешней конических поверхностях.

Полагая $m_1 = m_2 = 1$, получаем $X_i = 1$, тогда система дифференциальных уравнений (9) примет следующий вид:

$$\left[(f_i' + f_i\text{ctg}\theta)'\sin\theta\right]' + 6(f_i\sin\theta)' = 0 \qquad (i = 1,2) \tag{14}$$

Вводя новую функцию $\psi_i(\theta)$

$$\psi_i = \frac{1}{\sin\theta}(f_i\sin\theta)' \tag{15}$$

систему дифференциальных уравнений (14) сведем к следующему виду:

$$\psi_i'' + \psi_i'\text{ctg}\theta + 6\psi_i = 0 \tag{16}$$

Затем, вводя функцию

$$\psi_i(\theta) = \Psi_i(x)$$

где $x = \cos\theta$, из (16) приходим к уравнению Лежандра [4]

$$(1-x^2)\Psi_i'' - 2x\Psi_i' + 6\Psi_i = 0$$

общее решение которого представится в виде

$$\Psi_i = M_i P_2(x) + N_i Q_2(x) \tag{17}$$

где $M_i$ и $N_i$ – произвольные постоянные, а $P_2(x)$ и $Q_2(x)$ – сферические функции Лежандра первого и второго рода второго порядка, причем

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3x}{2}$$

Детерминант Вронского рассматриваемого уравнения будет

$$W(P_2Q_2) = P_2Q_2' - P_2'Q_2 = \frac{1}{1-x^2}$$

В силу (15) напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ из (7) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta 1} &= -p_1 - 3k_1\left[\psi_1(\theta) - \psi_1(\alpha)\right] + 6k_1\int_\alpha^\theta(\psi_1 - 2f_1\text{ctg}\theta)ctg\theta\, d\theta,\\
\sigma_{\theta 2} &= -p_2 + 3k_2\left[\psi_2(\gamma) - \psi_2(\theta)\right] - 6k_2\int_\theta^\gamma(\psi_2 - 2f_2\text{ctg}\theta)ctg\theta\, d\theta.
\end{aligned} \tag{18}$$

Используя условие непрерывности $v_i$ на контактной поверхности, т.е. $f_1(\beta) = f_2(\beta)$, из (15) определяем

$$f_1(\theta) = \frac{A}{6\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\int_{\alpha}^{\theta}\psi_1 \sin\theta \, d\theta \qquad \alpha \le \theta \le \beta$$
$$f_2(\theta) = \frac{A}{6\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\int_{\beta}^{\theta}\psi_2 \sin\theta \, d\theta \qquad \beta \le \theta \le \gamma \qquad (19)$$

где $A$ — произвольная постоянная интегрирования.

Из условия непрерывности $u_i$ на поверхности $\theta = \beta$ получаем

$$f_1'(\beta) = f_2'(\beta)$$

Тогда в соответствии с (15) имеем

$$\psi_1(\beta) = \psi_2(\beta) \qquad (20)$$

Граничные условия для касательного напряжения (12) будут

$$\psi_1'(\alpha) = \frac{q_1}{k_1}, \quad \psi_2'(\gamma) = \frac{q_2}{k_2} \qquad (21)$$

Условие непрерывности на поверхности $\theta = \beta$ этого же напряжения будет

$$\psi_1'(\beta) = \delta\,\psi_2'(\beta) \qquad (22)$$

Неизвестные постоянные $M_i$ и $N_i$ определяются из гранично-контактных условий (20) – (22)

$$M_1 P_2'(\cos\alpha) + N_1 Q_2'(\cos\alpha) = -\frac{q_1}{k_1 \sin\alpha}$$
$$M_2 P_2'(\cos\gamma) + N_2 Q_2'(\cos\gamma) = -\frac{q_2}{k_2 \sin\gamma} \qquad (23)$$
$$(M_1 - \delta M_2)P_2'(\cos\beta) - (N_1 - \delta N_2)Q_2'(\cos\beta) = 0$$
$$(M_1 - M_2)P_2(\cos\beta) - (N_1 - N_2)Q_2(\cos\beta) = 0$$

Оставшуюся единственную неизвестную постоянную $A$ определяем из условия непрерывности напряжений (18) на контактной поверхности $\theta = \beta$ ;

$$p_1 + 3k_1\left[\psi_1(\beta) - \psi_1(\alpha)\right] - 6k_1\int_{\alpha}^{\beta}(\psi_1 - 2f_1 ctg\theta)ctg\theta \, d\theta =$$
$$= p_2 - 3k_2\left[\psi_2(\gamma) - \psi_2(\beta)\right] + 6k_2\int_{\beta}^{\gamma}(\psi_2 - 2f_2 ctg\theta)ctg\theta \, d\theta \qquad (24)$$

Подставляя выражения $f_i(\theta)$ из (19) в (24) и преобразуя двойные интегралы с помощью интегрирования по частям

$$2\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\cos^2\theta}{\sin^3\theta}d\theta\int_{\alpha}^{\theta}\psi_1 \sin\theta \, d\theta = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \ln tg\frac{\alpha}{2}\right)\int_{\alpha}^{\beta}\psi_1 \sin\theta \, d\theta -$$
$$-\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \ln tg\frac{\theta}{2}\right)\psi_1 \sin\theta \, d\theta$$

$$2\int_{\beta}^{\gamma}\frac{\cos^2\theta}{\sin^3\theta}d\theta\int_{\beta}^{\theta}\psi_2\sin\theta\, d\theta=-\left(\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}+\ln\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\int_{\beta}^{\gamma}\psi_2\sin\theta\, d\theta+$$

$$+\int_{\beta}^{\gamma}\left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\psi_2\sin\theta\, d\theta$$

получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\psi_1-2f_1\operatorname{ctg}\theta)\operatorname{ctg}\theta\, d\theta=-\frac{A}{6}\Delta_1(\beta)+\int_{\alpha}^{\beta}\psi_1\omega_1 d\theta$$

$$\int_{\beta}^{\gamma}(\psi_2-2f_2\operatorname{ctg}\theta)\operatorname{ctg}\theta\, d\theta=-\frac{A}{6}\Delta_2(\beta)+\int_{\beta}^{\gamma}\psi_2\omega_2 d\theta \qquad (25)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Delta_1(\theta)=\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\ln\frac{\operatorname{tg}\theta/2}{\operatorname{tg}\alpha/2},\quad \Delta_2(\theta)=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}-\ln\frac{\operatorname{tg}\gamma/2}{\operatorname{tg}\theta/2}$$

$$\omega_1(\theta)=ctg\theta-\Delta_1(\theta)\sin\theta,\qquad \omega_2(\theta)=ctg\theta-\Delta_2(\theta)\sin\theta$$

Учитывая соотношения (25), из (24) находим

$$A=\frac{3k_1L_1+3k_2L_2-(p_1-p_2)}{k_1\Delta_1(\beta)+k_2\Delta_2(\beta)}$$

где

$$L_1=2\int_{\alpha}^{\beta}\psi_1\omega_1 d\theta-\left[\psi_1(\beta)-\psi_1(\alpha)\right],\ L_2=2\int_{\beta}^{\gamma}\psi_2\omega_2 d\theta-\left[\psi_2(\gamma)-\psi_2(\beta)\right]$$

В частном случае, при отсутствии касательных сил, т.е. $q_1=q_2=0$, из (23) получим однородную систему уравнений, из которой следует, что $M_i=N_i=0$, откуда получим $\psi_1(\theta)=\psi_2(\theta)=0$.

Из (18) находим

$$\sigma_{\theta1}=-p_1-12k_1\int_{\alpha}^{\theta}f_1 ctg^2\theta\, d\theta \qquad \alpha\le\theta\le\beta$$

$$\sigma_{\theta2}=-p_2-12k_2\int_{\theta}^{\gamma}f_2 ctg^2\theta\, d\theta \qquad \beta\le\theta\le\gamma \qquad (26)$$

Далее, из (19) определяя $f_1(\theta)=f_2(\theta)=\dfrac{A}{6\sin\theta}$,

где $A=-\dfrac{p_1-p_2}{k_1\Delta_1(\beta)+k_2\Delta_2(\beta)}$

и подставляя в (26), имеем

$$\sigma_{\theta1}=-p_1+\frac{(p_1-p_2)\Delta_1(\theta)}{\Delta_1(\beta)+\delta\Delta_2(\beta)} \qquad \alpha\le\theta\le\beta$$

$$\sigma_{\theta2}=-p_2-\frac{(p_1-p_2)\delta\Delta_2(\theta)}{\Delta_1(\beta)+\delta\Delta_2(\beta)} \qquad \beta\le\theta\le\gamma \qquad (27)$$

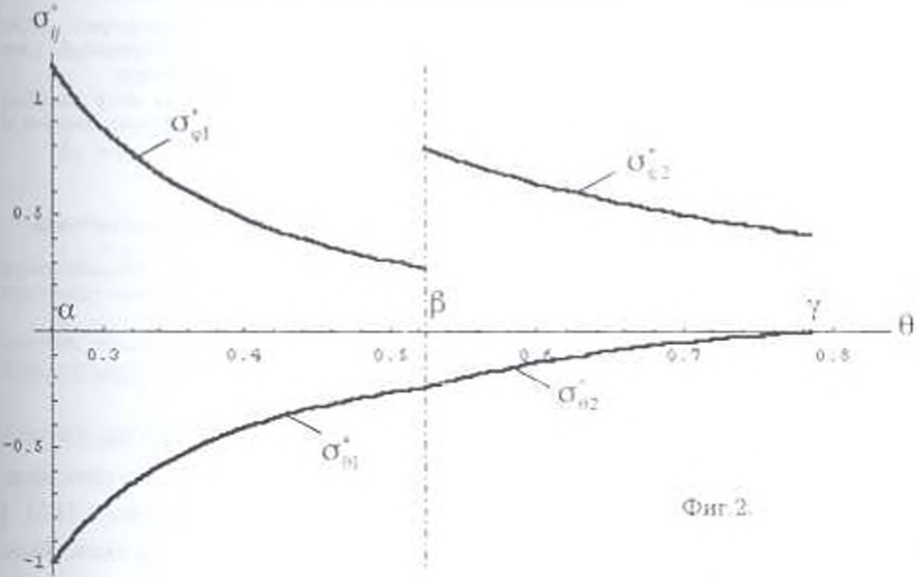
Из (5) получаем

$$\sigma_{\varphi 1} = \sigma_{\theta 1} + \frac{2(p_1 - p_2)}{\Delta_1(\beta) + \delta\Delta_2(\beta)} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\sigma_{\varphi 2} = \sigma_{\theta 2} + \frac{2(p_1 - p_2)\delta}{\Delta_1(\beta) + \delta\Delta_2(\beta)} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \qquad (28)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

**4. Численный пример.** При значениях параметров $p_2 = 0$, $\delta = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$, $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$ на фиг. 2 по формулам (27) и (28) построены графики напряжений $(\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} / p_1)$.




Фиг.2.

Заметим, что напряженное состояние для однородной конической трубы из упрочняющихся материалов рассмотрено в [3].

Автор благодарит акад. М.А. Задояна за помощь в постановке задачи и полезные советы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969.
2. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.


Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.04.2002