

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БАЛКИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ  
ВОЗДЕЙСТВИЯХ.

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Պարբերական ազդեցությունների դեպքում հեծանի կայունության ճարտ

Պարբերական և հեծանի կայունության խնդիրը մի դեպքում էր ուժի և փոփոխվում, իսկ մյուս դեպքում, երբ երկայնական սեղանափոխությունն է փոփոխվում պարբերական օրենքներով: Նախնական վիճակի և կայունության հավասարումները լուծվում են ճշգրիտ, որով և հաշվի է առնվում երկայնական ուժի անհամաձայնության բառ երկարության: Ցույց է տրվում, որ փոքր համախորանների դեպքում երկու խնդիրներն էլ տալիս են հասարակ նույն արդյունքները, իսկ բարձր համախորանների դեպքում ստանկերը բոլորովին այլ է:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan

On the Stability of Beam by Periodically Influence

Имеются многочисленные работы, посвященные динамической устойчивости (параметрическим колебаниям) упругих систем. Ниже изучаются две задачи устойчивости балки, когда на одном конце задана периодическая сила и другой случай, когда периодическим образом изменяется перемещение конца.

При определенных частотах изменения («медленное» нагружение), когда сжимающаяся сила по длине принимается постоянной, фактически обе эти задачи почти не отличаются. Однако, при «быстрых» нагружениях в результате имеются совершенно различные картины.

Здесь вовсе не затрагивается вопрос уточнения областей неустойчивости в связи с учетом неоднородности поперечной силы [1], или возможности появления прочих резонансов [2].

Целью данной статьи является показать, как при определенных частотах две эти задачи дают различные результаты, во-первых, и во-вторых, показать, как происходит видоизменение первоначальной формы со временем, поэтому уравнения невозмущенного состояния и устойчивости решаются точно.

1. Уравнение устойчивости балки возьмем в виде:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

Предполагается, что на концах балки осуществляются условия свободного опирания, а начальные условия:

$$w|_{t=0} = a(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = b(x) \quad (1.2)$$

Выражения сжимающей силы  $P(x,t)$  будут приведены для конкретных случаев ниже.

Если перейти к безразмерным координатам:

$$y = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = C \frac{t}{\ell}, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.3)$$

где  $\ell$  — длина балки, то уравнение превратится:

$$i^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{P} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.4)$$

где  $i^2 = \frac{J}{F\ell^2}$ ,  $\bar{P} = \frac{P}{EF}$ .

Решение (1.4) будем искать в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin \lambda_m y, \quad \lambda_m = m\pi \quad (1.5)$$

при этом,  $\bar{P}$  также представим в виде ряда

$$\bar{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\tau) \cos \lambda_k y \quad (1.6)$$

Тогда [3] для  $f_m$  получится бесконечная система

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + i^2 \lambda_m^4 - \frac{1}{2} \lambda_m \left[ (2\alpha_0 + \alpha_{2m}) \lambda_m f_m + \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} (\alpha_{m-n} + \alpha_{m+n}) \lambda_n f_n \right] = 0 \quad (1.7)$$

с начальными условиями

$$f_m(0) = a_m, \quad \frac{df_m(0)}{d\tau} = b_m \quad (1.8)$$

Ниже рассматриваются две задачи для невозмущенного движения.

2. Пусть один конец стержня заделан (в продольном смысле), а на другом конце задано перемещение, изменяющееся периодическим образом с частотой  $\omega$ . Начальные условия пусть нулевые. В безразмерных координатах уравнение движения и краевые условия следующие:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (2.1)$$

$$u=0 \text{ при } y=0; \quad u = u_0 + u_1 \cos \theta \tau \text{ при } y=1, \quad \theta = \omega \ell / C \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) с условиями (2.2) будет:

$$u = (u_0 + u_1 \cos \theta \tau) y + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \left[ \left( u_0 + \frac{u_1 \lambda_n^2}{\lambda_n^2 - \theta^2} \right) \cos \lambda_n \tau - \frac{u_1 \theta^2}{\lambda_n^2 - \theta^2} \cos \theta \tau \right] \sin \lambda_n y \quad (2.3)$$

Следовательно, безразмерная осевая сила (1.6)  $\bar{P} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial u}{\partial y}$  определится:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\ell} (u_0 - u_1 \cos \theta \tau) \quad (2.4)$$

$$\alpha_n = \frac{2(-1)^n}{\ell} \left[ \left( u_0 + \frac{u_1 \lambda_n^2}{\lambda_n^2 - \theta^2} \right) \cos \lambda_n \tau - \frac{u_1 \theta^2}{\lambda_n^2 - \theta^2} \cos \theta \tau \right]$$

Вторая задача от первой отличается лишь тем, что на конце  $y=1$  задана сила:

$$Q(\tau) = P_0 + P_1 \cos(\theta\tau) \quad (2.5)$$

тогда перемещение определяется:

$$\begin{aligned} \frac{EF}{l} u = & (P_0 + P_1 \cos(\theta\tau))y + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\mu_n^2} \left[ P_1 \frac{\theta^2}{\mu_n^2 - \theta^2} \cos(\theta\tau) - \left( P_0 + P_1 \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 - \theta^2} \right) \cos \mu_n \tau \right] \sin \mu_n y \end{aligned} \quad (2.6)$$

где уже  $\mu_n = (2n-1)\pi/2$ .

В соответствии с (1.6) и (1.7) нам нужна  $P(y, \tau)$ , выраженная через  $\{\cos \lambda_n y\}$ , поэтому, если (2.6) представить через  $\{\sin \lambda_n y\}$ , произведя необходимые выкладки, получим:

$$\begin{aligned} EF\alpha_0 &= P_0 + P_1 \cos(\theta\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\mu_k} a_k \\ EF\alpha_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} (2k-1)}{\pi \left[ n^2 - \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 \right]} a_k \\ a_k &= \frac{2(-1)^k}{\mu_k} \left[ P_0 + \frac{P_1 \mu_k^2}{\mu_k^2 - \theta^2} \cos \mu_k \tau - P_1 \frac{\theta^2}{\mu_k^2 - \theta^2} \cos \theta\tau \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

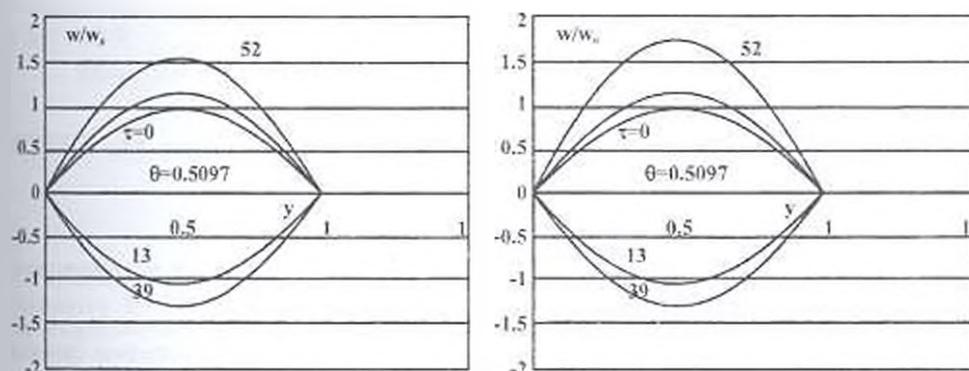
3 Система уравнений (1.7) с коэффициентами (2.4) и (2.7) исследовалась численно при следующих данных:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P_{кр}} = \frac{P_1}{P_{кр}} = \frac{EFu_0}{lP_{кр}} = \frac{EFu_1}{lP_{кр}} &= 0.2 \\ P_{кр} &= \frac{lJ\pi^2}{l^2}, \quad i\pi^2 = 2.85 \cdot 10^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

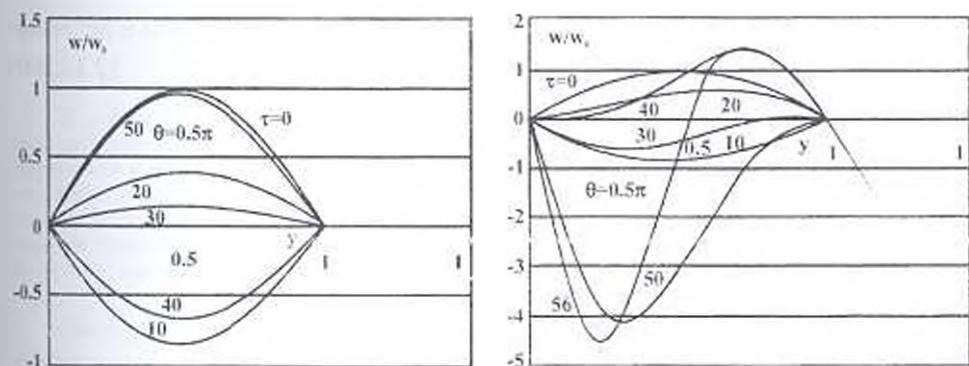
для различных  $\theta$ . Последнее выражение в (3.1) соответствует балке с поперечным прямоугольным сечением  $l \times h$  и  $lh \approx 10$ . Результаты приведены в виде графиков.

На фиг.1 приведены кривые возрастания прогиба соответственно для первой и второй задач (в дальнейшем такой порядок будет соблюден) при  $\theta = 0.5097$  для различных  $\tau$  ( $\tau$  — время пробега упругой волны с одного конца в другой). Такая частота соответствует первой форме  $(m-1)$  главного параметрического резонанса, такое же отклонение сообщалось балке. Система (1.7) интегрировалась как при  $\alpha_n \neq 0$ ,  $\alpha_n = 0$ , так и при  $\alpha_n \neq 0$  (т.е. однородность или неоднородность сжимающей силы). Практически кривые как для обеих задач, так и для  $\alpha_n = 0$  или  $\alpha_n \neq 0$  очень незначительно отличаются, т.е. в этом случае имеется «медленное» нагружение и при

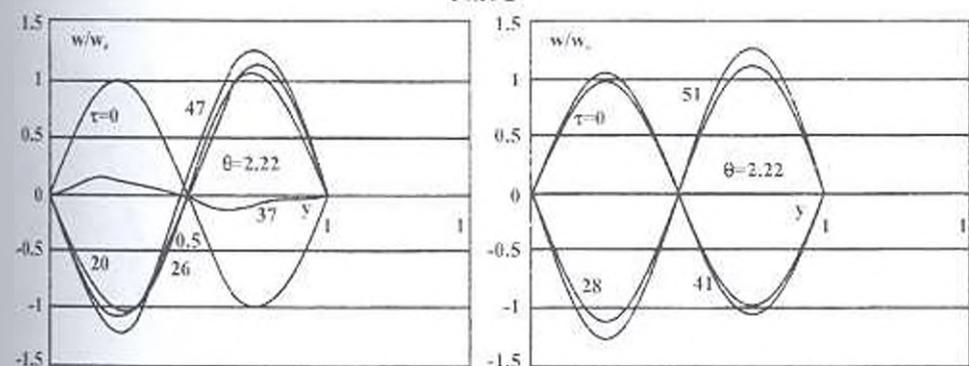
определении сжимающей силы можно довольствоваться статикой. Такой вывод подтверждается и в [4], где получено, что, если отношение  $\omega$  к первой частоте продольных колебаний меньше, чем 0,239, то можно считать изменение внешней силы медленным.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг 2. представлены кривые для  $\theta=0,5\pi$ . Как видно, для второй задачи первоначальное полуволюновое отклонение со временем сильно и возрастает, и видоизменяется, в то время как для первой задачи ни то и ни другое.

Законы на фиг.3 приведены кривые, когда первоначально сообщается отклонение по двум полуволам ( $m=2$ ), а  $\theta=2,22$ , что соответствует главному параметрическому резонансу для второй формы. Здесь также видно формоизменение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИИЛ, 1956. 600 с.
2. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
3. Мовсеян Л.А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1971. №1. Т.24. С. 38-50.
4. Шаповко Я.Г., Губанова И.П. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
12.12.2001