ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №2, 2002 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ, ОДИН ИЗ КОТОРЫХ СКЛЕЕН С НЕЙ, А ДРУГОЙ НАХОДИТСЯ В ИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ

Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С.

Է.Խ. Գրիգորյան, Ա.Վ. Քերոբյան, Ս.Ս. Շահինյան
Երկու վերջավոր ստրինգերներով կոնտակտային խնդիր անվերջ սալի համար, երբ նրանցից մեկը սոսնձված է նրան, իսկ մյուսը գտնվում է իդեալական կոնտակտի մեջ

Դիտարկված է խնդիր անվերջ առաձգական սալի համար, որի մակերևույթին կան երկու վերջավոր ստրինգերներ, որոնցից մեկը սոսնձված է սալին, իսկ մյուսը նրա հետ գտնվում է իդեալական կոնտակտի մեջ: Ստրինգերները գտնվում են մի ուղղի վրա և դեֆորմացվում են նրանց ծայրերում կիրառված հորիզոնական ուժերի ազդեցության տակ:
Խնդրի լուծումը հանգեցված է երկրորդ սեռի ինտեգրո-հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման: Որոշված են խնդրի բնորոշ պարամետրերի փոփոխման այն տիրույթները, որոնց դեպքում այդ հավասարումների համակարգը թույլ է տալիս ճշգրիտ լուծում:

E.Kh. Grigoryan, A.V. Kerobyan, S.S. Shahinyan
The contact problem for the infinite plate with two finite stringers one from which is glued other is ideal conducted

Рассматривается задача для бесконечной пластины, на поверхности которой находятся два конечных стрингера, один из которых приклеен к пластине, а другой находится с ней в идеальном контакте. Стрингеры находятся на одной линии. Задача сводится к решению системы интегро-алгебраических уравнений второго рода. Определяются области изменения характерных параметров задачи, при которых эта система уравнений допускает точное решение.

Контактная задача для пластины в случае одного приклеенного с ней стрингера конечной длины разными подходами была рассмотрена в работах [1-3].

Пусть бесконечная пластина на своей поверхности содержит два стрингера, один из которых склеен с ней, а другой находится с ней в идеальном контакте. Стрингер, приклеенный к пластине, занимает область $b \le x \le c$, а другой – область $-a \le x \le a$ ($b > a$). Пластина деформируется под действием горизонтальных сил Q и P, приложенных на концах стрингеров $x = a$ и $x = c$ соответственно. Относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т. е. допускается, что контактные силы сосредоточены по длине средней линии контактных участков, а относительно пластины полагается, что во время деформации она находится в условии обобщенного плоского напряженного состояния.

Согласно вышесказанному, будем иметь

$$u_2(x,0) = \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi Et}\left[\int_{-a}^{a}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)P(s)ds + \int_{b}^{c}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)q(s)ds\right] \quad (1)$$

где $u_2(x,0)$ – горизонтальные перемещения точек пластины при $y = 0$, $P(x) = d\tau(x)$; $\tau(x)$ – касательные контактные напряжения при $-a \le x \le a$, d – ширина стрингера; $q(x) = d_1\tau_1(x)$, $\tau_1(x)$ – касательные контактные напряжения при $b \le x \le c$; d_1 – ширина второго стрингера; C – произвольная постоянная; E – модуль упругости пластины; t – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

Здесь, при $-a \le x \le a$ условие контакта будет:

$$\frac{du_2(x,0)}{dx} = \frac{du_1(x)}{dx}, \quad -a \le x \le a \tag{2}$$

где $u_1(x)$ – перемещения точек стрингера.

В случае $b \le x \le c$, полагая, что дифференциальный элемент слоя клея находится в условии чистого сдвига [1], получим

$$u_1^{(1)}(x) - u_2(x,0) = \gamma_k(x)\eta, \quad q(x) = d_1\tau_1(x) = d_1 G\gamma_k(x), \quad b \le x \le c \tag{3}$$

где $u_1^{(1)}(x)$ – перемещения точек второго стрингера, $\gamma_k(x)$ – деформация сдвига клея, G – модуль сдвига материала клея, η – толщина слоя клея.

Относительно стрингера будем иметь

$$\frac{d^2 u_1^{(1)}}{dx^2} = \frac{1}{E_1 A_1} q(x) \quad b \le x \le c \tag{4}$$

где E_1 – модуль упругости стрингера, A_1 – площадь поперечного сечения стрингера.

Теперь, имея в виду, что $q(x) = \left[u_1^{(1)}(x) - u_2(x,0)\right] d_1 G/\eta$, согласно (4) получим

$$\frac{d^2 u_1^{(1)}}{dx^2} - \alpha^2 u_1^{(1)}(x) = -\alpha^2 u_2(x,0) \quad b \le x \le c \tag{5}$$

где $\alpha^2 = d_1 G/\eta E_1 A_1$.

Здесь должны иметь место и граничные условия

$$\left.\frac{du_1^{(1)}(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0, \quad \left.\frac{du_1^{(1)}(x)}{dx}\right|_{x=c} = \frac{P}{E_1 A_1} \tag{6}$$

Решение граничной задачи (5), (6) ищем в виде

$$u_1^{(1)}(x) = C_1 \operatorname{ch}\alpha x + C_2 \operatorname{sh}\alpha x + u_0(x), \quad b \le x \le c$$

где $u_0(x)$ является частным решением уравнения (5) при нулевых граничных условиях:

$$\left.\frac{du_1^{(1)}(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0, \quad \left.\frac{du_1^{(1)}(x)}{dx}\right|_{x=c} = 0$$

и определяется в виде

$$u_0(x) = \alpha^2 \int_b^c K(x,s) u_2(s,0)\, ds$$

где

$$K(x,s)=\frac{1}{\alpha\,\mathrm{sh}[\alpha(c-b)]}\begin{cases}\mathrm{ch}\alpha(x-c)\mathrm{ch}\alpha(s-b), & x>s,\\ \mathrm{ch}\alpha(x-b)\mathrm{ch}\alpha(s-c), & x<s.\end{cases}$$

Очевидно, что $K(x,s)$ — непрерывная функция и $K(x,s)=K(s,x)$.

Далее, удовлетворяя граничным условиям (6), получим:

$$u_1^{(1)}(x)=u_0^{(1)}(x)+\alpha^2\int_b^c K(x,s)u_2(s,0)ds\,,\quad b\le x\le c \tag{7}$$

где

$$u_0^{(1)}(x)=\frac{P\,\mathrm{ch}\alpha(x-b)}{\alpha E_1A_1\mathrm{sh}\alpha(c-b)}$$

Теперь, имея в виду (3), из (7) получим

$$\frac{\eta}{d_1G}q(x)+u_2(x,0)=\alpha^2\int_b^c K(x,s)u_2(s,0)ds+u_0^{(1)}(x)\,,\quad b\le x\le c \tag{8}$$

Для дальнейшего заметим, что спектром симметричного оператора $D=-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha^2 I$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $(du/dx)_{x=b}=0$, $(du/dx)_{x=c}=0$, являются собственные значения $\lambda_n=\alpha^2+n^2\pi^2/(c-b)^2$ $(n=0,1,2,\ldots)$, а соответствующими собственными функциями являются функции $\cos[n\pi(x-b)/(c-b)]$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

С другой стороны, как известно [4], симметричный вполне непрерывный оператор A

$$A\varphi=\int_b^c K(x,s)\varphi(s)ds$$

действующий в $L_2(b,c)$, является обратным оператором оператора D. Это означает, что

$$\int_b^c K(x,s)\cos\left[\frac{n\pi(s-b)}{c-b}\right]ds=\frac{(c-b)^2}{\alpha^2(c-b)^2+n^2\pi^2}\cdot\cos\left[\frac{n\pi(x-b)}{c-b}\right]$$
$$(n=0,1,2,\ldots) \tag{9}$$

Очевидно, что $\cos[n\pi(x-b)/(c-b)]$ $(n=0,1,2,\ldots)$ образуют полную ортогональную систему в $L_2(b,c)$.

Далее, подставляя $u_2(x,0)$ из (1) в (8), получим

$$q(x)+\frac{\gamma^2}{\pi a}\left[\int_{-a}^{a}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)P(s)ds+\int_b^c\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)q(s)ds\right]=$$
$$=\frac{\alpha^2\gamma^2}{\pi a}\int_b^c K(x,s)\left[\int_{-a}^{a}\left(\ln\frac{1}{|s-\tau|}+C\right)P(\tau)d\tau+\int_b^c\left(\ln\frac{1}{|s-\tau|}+C\right)q(\tau)d\tau\right]ds+\frac{d_1G}{\eta}u_0^{(1)}(x)$$
$$(b\le x\le c) \tag{10}$$

где $\gamma^2 = G d_1 a(1+\nu)(3-\nu)/4\eta Et$.

После замены x на ax, s на as, τ на $a\tau$, уравнение (10) запишется в виде

$$q(ax)+\gamma^2\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\tau|}P(a\tau)d\tau-\frac{\alpha^2 a}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax,as)\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|s-\tau|}P(a\tau)d\tau ds\right]+$$

$$+\gamma^2\left[\frac{1}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln\frac{1}{|x-\tau|}q(a\tau)d\tau-\frac{\alpha^2 a}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax,as)\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln\frac{1}{|s-\tau|}q(a\tau)d\tau ds\right]-\frac{d_1 G}{\eta}u_0^{(1)}(ax)=$$

$$=\frac{\gamma^2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{a}+C\right)\left(\int_{-1}^{1}P(as)ds+\int_{\beta_1}^{\beta_2}q(as)ds\right)\left(\alpha^2 a\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax,as)\cdot ds-1\right) \qquad (11)$$

$$\beta_1\le x\le\beta_2$$

где $\beta_1 = b/a$, $\beta_2 = c/a$.

Если теперь учесть равенство (9):

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax,as)ds=\frac{1}{\alpha^2 a} \qquad (12)$$

то правая часть (11) обратится в нуль, и тогда уравнение (11) запишется в виде

$$q(ax)+\gamma^2\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)q(a\tau)d\tau+\gamma^2\int_{-1}^{1}\Pi(x,\tau)P(a\tau)d\tau=q_0(ax)\quad \beta_1\le x\le\beta_2 \qquad (13)$$

где

$$\Pi(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-\tau|}-\alpha^2 a\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax,as)\ln\frac{1}{|s-\tau|}ds\right),\quad q_0(ax)=d_1 G\,u_0^{(1)}(ax)/\eta$$

Заметим, что $q_0(ax)$ – контактные силы в случае жесткой пластины (т. е. при $E\to\infty$).

Очевидно, что

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}q_0(ax)dx=\frac{P}{l},\quad l=\beta_2-\beta_1 \qquad (14)$$

Выше при получении (13) был изменен порядок интегрирования в (11), законность которого следует из теоремы Фубини [4].

В дальнейшем мы часто будем пользоваться теоремой Фубини, особо не отмечая об этом.

Отметим, что при выводе уравнения (13) мы нигде не пользовались условием равновесия

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}q(ax)dx=\frac{P}{l} \qquad (15)$$

Условие (15) в уравнении (13) выполняется автоматически, поскольку имеет место равенство (14). Действительно, если интегрировать уравнение (13) в пределах от β_1 до β_2, получим

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)q(a\tau)d\tau\right)dx=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)dx\right)q(a\tau)d\tau=$$

$$=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{-1}^{1}\Pi(x,\tau)P(a\tau)d\tau\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)dx\right)P(a\tau)d\tau=0$$

поскольку, согласно (12)

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)dx=0$$

что и показывает вышесказанное убеждение.

Отметим, что из (13) следует, что $q(ax)$ в точках $x=\beta_1$, $x=\beta_2$ принимает конечные значения.

Теперь приступим к условию контакта (2). В этом случае дифференциальное уравнение равновесия стрингера будет иметь вид:

$$\frac{du_1(x)}{dx}=\frac{1}{E_2A_2}\int_{-a}^{x}P(s)ds\,,\quad -a\le x\le a \tag{16}$$

при условии

$$\int_{-a}^{a}P(s)ds=Q \tag{17}$$

где E_2 – модуль упругости материала стрингера, A_2 – площадь поперечного сечения стрингера.

Тогда, в силу (1), (2) и (16), после замены x на ax, s на as, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}P(as)ds+\frac{1}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{1}{s-x}q(as)ds=\lambda^*\int_{-1}^{x}P(as)ds\,,\quad -1<x<1 \tag{18}$$

где $\lambda^*=4aE_1/E_2A_2(1+\nu)(3-\nu)$

Здесь, интегралы в левой части уравнения (18) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Далее, поскольку, как известно [5], $P(x)$ при $x=\pm a$ имеет корневую особенность, ищем ее в виде

$$P(ax)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n(x) \tag{19}$$

где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ – многочлены Чебышева первого рода [6].

Теперь, подставляя $P(ax)$ из (19) в (13) и (18), известным способом получим:

$$q(ax)+\gamma^2\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)q(a\tau)d\tau+\gamma^2\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-1}^{1}\frac{\Pi(x,\tau)T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=$$

$$=q_0(ax)-\gamma^2X_0\int_{-1}^{1}\frac{\Pi(x,\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau\,,\quad \beta_1\le x\le\beta_2$$

$$X_m + \frac{2}{\pi^2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)dx\right)q(as)ds + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}X_n = \lambda^2 X_0 a_m$$

$$(m = 1, 2, \ldots), \quad -1 < x < 1$$

где в силу условия равновесия (17), получим $X_0 = Q/\pi a$, а $K_{m,n}$ и a_m имеют вид

$$K_{m,n} = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\right)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)dx$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\right)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)dx, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

$U_{m-1}(x) = \sin(m\arccos x)/\arccos x$ – многочлены Чебышева второго рода [6].

Выше имелось в виду, что [5, 6]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds = U_{n-1}(x), \quad |x| < 1,$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)U_{m-1}(x)dx = \begin{cases}0 & n \neq m,\\ \pi/2 & n = m.\end{cases}$$

Далее, ввиду того, что [6]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\tau|}\frac{T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = \begin{cases}\dfrac{1}{n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}, & x > 1, \ n \neq 0\\ -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \ln 2, & x > 1, \ n = 0\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(x)\sqrt{x^2-1}}{x-s}dx = \frac{1}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}, \quad s > 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

после вычисления $K_{m,n}$ и a_m получим систему в виде:

$$q(ax) + \gamma^2\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)q(a\tau)d\tau + \gamma^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\left[\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n} -\right.$$

$$\left.-\alpha^2 a\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax, as)\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}\right] = f(x) \quad \beta_1 \le x \le \beta_2 \tag{20}$$

$$X_m + \frac{2}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{q(as)}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^m}ds + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}X_n = \lambda^2 X_0 a_m, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

где

$$f(x) = q_0(ax) + \gamma^2 X_0\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \alpha^2 a\int_{\beta_1}^{\beta_2}K(ax, as)\ln\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)ds\right]$$

$$K_{m,n} = \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{1} U_{n-1}(x)U_{m-1}(x)(1-x^2)dx$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(\pi - \arccos x)\sqrt{1-x^2}\ U_{m-1}(x)dx\,, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Для дальнейшего, систему интегро-алгебраических уравнений (20) запишем в операторном виде. Для этого рассмотрим банахово пространство B с элементами $y = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ z \end{pmatrix}$, где $\varphi(x)$ принадлежит пространству квадратично суммируемых функций $L_2(\beta_1, \beta_2)$, а z – пространству ограниченных последовательностей m. Введем операторы

$$K_{11}\varphi = \int_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad K_{22}z = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} z_n\right\}_{m=1}^{\infty}$$

$$K_{12}z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n}{n}\left[\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n} - \alpha^2 a\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{K(ax,as)}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}ds\right] \tag{21}$$

$$K_{21}\varphi = \left\{\frac{2}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\varphi(s)}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^m}ds\right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Очевидно что оператор K_{11} действует в пространстве $L_2(\beta_1, \beta_2)$, а K_{22} – в пространстве ограниченных последовательностей m.

Операторы K_{12} и K_{21} действуют следующим образом: $K_{12} : m \to L_2(\beta_1, \beta_2)$, $K_{21} : L_2(\beta_1, \beta_2) \to m$.

После введения операторов (21), система интегро-алгебраических уравнений (20), запишется в виде

$$y + S\,y = y_0 \tag{22}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} \gamma^2 K_{11} & \gamma^2 K_{12} \\ K_{21} & \lambda^* K_{22} \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} q(ax) \\ X \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} f(x) \\ \lambda^* X_0 a \end{pmatrix},\ X = \{X_n\}_{n=1}^{\infty},\ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Очевидно, что оператор S действует в пространстве B. Достаточным условием обратимости оператора $I + S$ является условие $\|S\| < 1$. В таком случае, решение уравнения (22) запишется в виде

$$y = (I+S)^{-1}y_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S^n y_0$$

Остается определить, при каких значениях параметров задачи будет удовлетворяться условие $\|S\| < 1$. Для этого заметим, что

$$\|S\| = \max\left\{\gamma^2\left(\|K_{11}\| + \|K_{12}\|\right),\left(\|K_{21}\| + \lambda^*\|K_{22}\|\right)\right\}$$

Значит условие $\|S\| < 1$ будет выполняться, если

$$\gamma^2\left(\|K_{11}\|+\|K_{12}\|\right)<1,\quad \|K_{21}\|+\lambda^2\|K_{22}\|<1 \tag{23}$$

Известно, что

$$\|K_{11}\|=c_1,\quad c_1=\left(\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right)^{1/2}$$

Из (21), с помощью неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\|K_{12}\|\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}c_2,\quad \|K_{21}\|\le\frac{2}{\pi}c_3,\quad \|K_{22}\|\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

где

$$c_2=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n}}-\alpha^2a\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{K(ax,as)}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^{n}}ds\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c_3=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^2}\right)^{1/2}$$

Тогда условия (23) будут выполняться, если

$$\gamma^2<\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\,c_1+\pi c_2},\quad \lambda^2<\frac{(\pi-2c_3)\sqrt{6}}{\pi^2}$$

Как видно из выражений c_1 и c_2, их трудно вычислить, но можно оценить конкретными числами. Для этого сначала рассмотрим c_1, а затем вспомним формулу (9), откуда ясно, что $\cos[m\pi(x-\beta_1)/l]$ $(m=0,1,2,\dots)$ является полной ортогональной системой в $L_2(\beta_1,\beta_2)$. Тогда, согласно равенству Парсеваля, будем иметь

$$\frac{2}{l}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi^2(x,\tau)dx=\sum_{m=1}^{\infty}\Pi_m^2(\tau),\quad \beta_1<\tau<\beta_2$$

где

$$\Pi_m=\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\Pi(x,\tau)\cos\left[\frac{m\pi(x-\beta_1)}{l}\right]dx,\quad (m=1,2,\dots)$$

Как ранее заметили, $\Pi_0=0$. С другой стороны, согласно формуле (9)

$$\Pi_m=\left(1-\frac{\alpha^2l^2}{\alpha^2l^2+m^2\pi^2}\right)\psi_m(\tau),\quad (m=1,2,\dots)$$

где

$$\psi_m(\tau)=\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\ln\frac{1}{|x-\tau|}\cos\left[\frac{m\pi(x-\beta_1)}{l}\right]dx$$

Следовательно,

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \Pi^2(x,\tau)dx = \frac{l}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2 l^2}{\alpha^2 l^2+m^2\pi^2}\right)^2 \psi_m^2(\tau) < \frac{l}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^2(\tau)$$

Но согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^2(\tau) = \frac{2}{l}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln^2|s-\tau|ds - 2\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln|s-\tau|ds\right)^2$$

значит

$$c_1 < \left|\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln^2|s-\tau|\,ds\,d\tau - l\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln|s-\tau|ds\right)^2 d\tau\right|^{1/2}$$

или более грубо

$$c_1 < \left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\ln^2|s-\tau|\,ds\,d\tau\right)^{1/2}$$

Поступая аналогичным образом, можно оценить и c_2. Окончательно получим

$$c_2 < \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^2}{1-\left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^2}ds - l\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

или грубо

$$c_2 < \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^2}{1-\left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^2}ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

Теперь, поскольку $\beta_1 = b/a$, $\beta_2 = c/a$ и приняв $b = 2a$, $c = 4a$, после вычисления соответствующих интегралов для c_1, c_2 и c_3 получим:

$$c_1 < \left|\int_2^4\int_2^4\ln^2|s-\tau|\,ds\,d\tau\right|^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}76, \quad c_2 < \left[\int_2^4\frac{\left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^2 ds}{1-\left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}26$$

$$c_3 = \frac{2}{\pi}\left[\int_2^4\frac{ds}{\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}16$$

Тогда получим условия выполнения (23) в виде: $\gamma^2 < 0{,}32$; $\lambda^2 < 0{,}7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L., Lewis L.S. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet. – Quart. J. of Mech. And Applied Math. Vol. XXIII, p. 521, 1970.
2. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины, на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины// Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С.11-16.
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. Контактные задачи для упругих тел, на границе которых приклеен линейно или нелинейно-деформируемый стрингер конечной длины. НАН Армении, Институт механики. Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого тела. Сб. Научных трудов. Ереван. 1999. с. 126-132.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Гос. Изд. физ. мат. лит. 1961.
5. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение 1980. 416с.
6. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука 1979. 415с.

Ереванский госуниверситет
Ванадзорский филиал Ереванского инженерного университета

Поступила в редакцию 13.12.2001