

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ  
Шагинян С. Г.

Ս. Գ. Շահինյան

Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության մասին

Դիտարկված է պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը Կատարելով Լյապունովի ձևափոխություն խնդիրը թերված է հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրն և ցույց է տրված, որ կատարված ձևափոխության ժամանակ պահպանվում է համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրների համարձեցությունը

Ստացված են անհրաժեշտ ու քափարար պայմաններ պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության արժևույթի կայունության և անկայունության համար

S G Shabinyan

On the Stability of Acting Force of the Systems of Differential Equation with Periodical Coefficients

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. С помощью преобразования Ляпунова задача приведена к задаче устойчивости по действующей силе систем линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами. Показано, что при преобразовании сохраняется эквивалентность задач устойчивости по действующей силе систем с периодическими и с постоянными коэффициентами

Получены необходимые и достаточные условия, при которых система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами устойчива асимптотически устойчива или неустойчива по действующей силе

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $A(t) - (n \times n)$  - матрица, элементы которой непрерывные периодические функции периода  $\omega$

Рассмотрим также систему

$$\dot{x} = A(t)x + \varphi(t) \quad (2)$$

где  $\varphi(t)$  удовлетворяет всем условиям, указанным в [1]

Пусть  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  - корни характеристического уравнения системы

(1) с кратностями  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  соответственно ( $k \leq n$ ,  $\sum_{i=1}^k \mu_i = n$ )

Известно [2] что всякую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно преобразовать при помощи линейной подстановки с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами (обозначим через

$$y = B(t)x \quad (3)$$

где  $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$  —  $(n \times n)$ -мерная действительная матрица, элементы которой непрерывные, ограниченные, периодические функции периода  $2\omega$  (в общем случае), причем  $\det B(t) \neq 0$  при любом значении  $t$ ,  $|b_{ij}(t)| \leq b < \infty$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

После преобразования (3) система (1) будет

$$\dot{y} = Ay \quad (4)$$

где матрица  $A = B(t)A(t)B^{-1}(t)$  — постоянная и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

Здесь постоянная матрица  $A_i$  имеет размерность  $p_i \times p_i$ :

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_i & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, k) \quad (5)$$

а числа  $\alpha_i = \frac{1}{\omega} \ln p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) — характеристические показатели системы (1) [2].

В общем случае, числа  $\alpha_i$  — комплексные. Так как коэффициенты уравнения (1) вещественны, то все комплексные корни характеристического уравнения и все комплексные решения системы (4) распадаются на пары сопряженных. Следовательно, есть возможность привести систему (4) в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами [3].

Делая преобразование (3), система (2) приводится к виду

$$\dot{y} = Ay + \psi(t) \quad (6)$$

где  $\psi(t) = B(t)\varphi(t)$ .

Покажем, что вектор-функция  $\psi(t)$  тоже удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Действительно,

$$1) \left\| \int_{t_0}^t \psi(t) dt \right\| = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_0}^t \psi_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_0}^T \sum_{j=1}^r b_{ij} \cdot \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} = b \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^T \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

и если

$$\left\| \int_{t_0}^T \varphi(t) dt \right\| < \delta, \text{ то } \left\| \int_{t_0}^T \psi(t) dt \right\| < b \left( \sum_{i=1}^n \delta^2 \right)^{1/2} = b\sqrt{n}\delta = \delta_1;$$

2) так как  $\varphi(t) \equiv 0$  при  $t \geq T$ , то  $\psi(t) = B(t) \cdot \varphi(t) \equiv 0$  при  $t \geq T$ .

Таким образом, задача устойчивости по действующей силе системы (1) приводится к задаче устойчивости по действующей силе системы (4). Известно [4], что критерии устойчивости по действующей силе системы (4) формулируются следующим образом:

1. Для того, чтобы система (4) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части.

2. Для того, чтобы система (4) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее характеристическое уравнение имело нулевой корень с кратностью  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ), которому соответствовали простые элементарные делители, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

Во всех остальных случаях система (4) неустойчива по действующей силе.

Корни характеристического уравнения, соответствующего системе (4), являются характеристическими показателями системы (1) [2]. Следовательно, верны следующие утверждения:

**Теорема 1.** Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы характеристические показатели  $\alpha_i$  удовлетворяли следующим условиям:

а) существует  $\alpha = 0$  с кратностью  $p$ , которому соответствуют простые элементарные делители;

б)  $\operatorname{Re} \alpha_i < 0$  ( $i = 1, \dots, k; i \neq l$ ).

**Теорема 2.** Для того, чтобы система (1) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические показатели имели отрицательные вещественные части.

Во всех остальных случаях система (1) неустойчива по действующей силе.

**Замечание.** Вышесформулированные утверждения можно сформулировать также, используя корни  $\rho_i$  характеристического уравнения системы (1).

Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения удовлетворяли следующим условиям:

а) существует корень  $\rho_i = 1$  с кратностью  $p_i$ , которому соответствуют простые элементарные делители;

б)  $|\rho_i| < 1$  ( $i = 1, \dots, k; i \neq l$ ).

Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (1) были внутри единичного круга.

Во всех остальных случаях система (1) неустойчива по действующей силе.

Автор выражает свою искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за многие полезные советы и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян, М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова. // Уч. записки ЕГУ 1987. №1. С. 39-45.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 472с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 533с.
4. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. // Уч. записки ЕГУ. 1986. №2. С. 39-46.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
29.11.2001