

УДК 62-50

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ
ТОЧКИ С НЕФИКСИРОВАННОЙ МАССОЙ

Ա.Ա.Դուկասյան, Ա.Գ.Մաթևոսյան

Ա.Ա. Դուկասյան, Ա.Գ. Մաթևոսյան

Չֆիրսովի անվանումով Նյուտոնական կետի ղեկավարվող շարժման մասին

Փաստված է չֆիրսովի անվանումով Նյուտոնական կետի ղեկավարվող շարժումը ղեկավարող ֆունկցիայի սահմանափակության դեպքում: Կառուցված է ղեկավարող ֆունկցիան սինթեզի տարով, չֆիրսովի սահմանափակության կողմից դեպքում, որը ապահովում է Նյուտոնական կետի բնութագրի ֆազային հարթության սկզբնական կետից բոլոր ֆազային արժեքների դեպքում սեղ սահմանափակության կետով: Քննարկված է ղեկավարման կիրառական գրքի մասին, ստացված են վերջնական դրոշմի բնութագրի մասին գնահատականները Նյուտոնական կետի կառուցվածքների տարբեր արժեքների դեպքում:

A.A. Ghukasyan, A.G. Matevosyan

About of controlled movement of a material point of unset mass

Рассматривается управляемое движение материальной точки с нефиксированной массой с ограничением на управляющую функцию. Построена управляющая функция в форме синтеза при фиксированной линии переключения, которая обеспечивает приведение материальной точки в начало координат фазовой плоскости для всех допустимых значений масс с одной точкой переключения. Приводится кибернетическая схема управления и получены оценки времени приведения в терминальное состояние для различных значений масс материальной точки.

1. Постановка задачи управления. Рассмотрим управляемое движение материальной точки с одной степенью свободы. Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = u \quad (1.1)$$

где x — обобщенная координата точки, u — управляющая сила.

Предполагается, что масса m точки нефиксирована, но находится в заданных пределах

$$m_0 \leq m \leq M \quad (1.2)$$

На управляющую силу наложено следующее ограничение:

$$|u| \leq 1 + \eta, \text{ где } \max \eta = \frac{M - m_0}{M + m_0} \quad (1.3)$$

Требуется построить оптимальное управление в форме синтеза $u(x, \dot{x})$ такое, что при любом значении массы m , удовлетворяющем ограничениям (1.2), всякая траектория движения точки приводилась в начало координат фазового пространства при фиксированной линии переключения, построенной для массы m' (не нарушая общности, можно считать $m' = (M + m_0)/2$). Требуется также построить управляющую функцию с минимальным числом точек переключений и, при возможности, сохранить ограничение $|u| \leq 1$.

2. Синтез задачи управления. Исследуем сначала задачу оптимального приведения материальной точки в начало координат при ограничении

$|u| \leq 1$ с фиксированной массой m' . Известно [1], что для заданной массы синтез оптимального по быстродействию управления имеет форму

$$u(x, \dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{при } \dot{x} > 0 \text{ и } x \geq -m'\dot{x}^2/2 \\ -1 & \text{при } \dot{x} < 0 \text{ и } x > m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при } \dot{x} > 0 \text{ и } x < -m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при } \dot{x} < 0 \text{ и } x \leq m'\dot{x}^2/2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Этот закон управления полностью определяется кривой переключений $x = \pm m'\dot{x}^2/2$. Полное время T приведения материальной точки массы m' , управляемой по закону (2.1), из начального состояния (x_0, \dot{x}_0) до терминального состояния $(0, 0)$ равно

$$T = m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'C_m} = m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'\dot{x}_0 + m'\dot{x}_0^2/2} \quad (2.2)$$

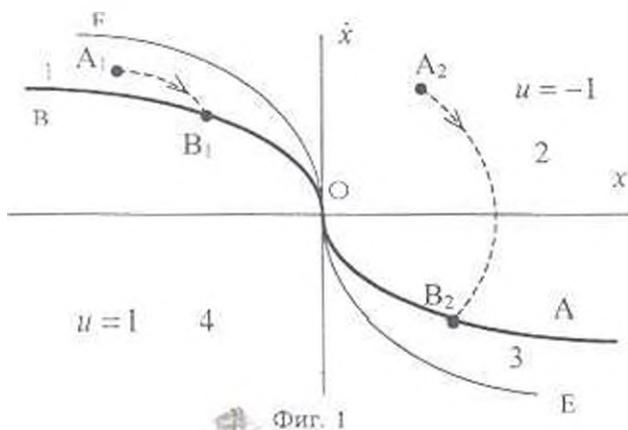
при $C_m = x_0 + \dot{x}_0^2 m'/2 \geq 0$

$$T = -m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{-m'C_m} \quad \text{при } C_m = x_0 - \dot{x}_0^2 m'/2 \leq 0 \quad (2.3)$$

2.1. Исследуем поведение системы (1.1) в случае, когда масса m точки не совпадает со значением m' . Предположим сначала, что масса точки m меньше параметра кривой переключений, т.е.

$$m_0 \leq m < m' \quad (2.4)$$

Фазовыми траекториями движения точки массы m при ограничении $|u| \leq 1$ является семейство парабол $x = \pm m\dot{x}^2/2 + C$ [1]. На фиг. 1 жирной линией изображена кривая переключений, отвечающая массе m' и ограничению $|u| \leq 1$, а тонкой сплошной линией — отвечающая массе m при ограничении $|u| \leq 1$.



Пусть сначала начальная точка находится выше кривой переключений АОВ (фиг. 1). Траектория движения здесь состоит из двух ветвей парабол. В первом случае, когда начальная точка $A_1(x_0, \dot{x}_0)$ находится между линиями ОВ и ОЕ, то при сохранении линии переключения АОВ точка должна двигаться по параболе семейства

$x = -m\dot{x}^2/2 + C$ ($C = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 \leq 0$) при $u = -1$ до точки пересечения

B_1 с абсциссой $\dot{x}_1 = (2C/(m - m'))^{1/2}$. Далее, если не изменить величину управляющей функции u , возможности которой мы имеем (1.3), то точки

может двигаться до начала координат вдоль линии переключения ВО при скользящем режиме управления (фиг. 1). Избегая многочисленных точек переключения на участке траектории В₁О, в рамках ограничения (1.3),

управляющую функцию определим в виде $u = -1 - \eta$, где $\eta = \frac{m - m'}{m'} < 0$

При этом линия В₁О является траекторией движения точки с массой m (2.4). Аналогично можно построить закон управления и фазовые траектории движения точки, когда начальная точка (x_0, \dot{x}_0) находится в областях 2,3,4 (фиг. 1).

Синтез оптимального по времени управления с одной точкой переключения при сохранении линии переключения АОВ имеет вид

$$u(x, \dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{при } \dot{x} > 0 \text{ и } x > -m'\dot{x}^2/2 \\ -1 & \text{при } \dot{x} < 0 \text{ и } x > m'\dot{x}^2/2 \\ -(1 + \eta) & \text{при } \dot{x} > 0 \text{ и } x = -m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при } \dot{x} < 0 \text{ и } x < m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при } \dot{x} > 0 \text{ и } x < -m'\dot{x}^2/2 \\ (1 + \eta) & \text{при } \dot{x} < 0 \text{ и } x = m'\dot{x}^2/2 \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\eta = \frac{m - m'}{m'} < 0$.

Так как управление происходит по обратной связи, то предполагается, что связь имеет возможность в каждый момент времени определить, как фазовое состояние движения, так и массу материальной точки (фиг. 3). Следовательно, в формуле (2.5) значение η считается известным.

Время движения между точками А₁ и В₁ равно $t_1 = m(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) = m(\dot{x}_0 - \sqrt{2C/(m - m')})$, а от точки В₁ до начала координат $t_2 = m'\dot{x}_1 = m'\sqrt{2C/(m - m')}$.

Следовательно, полное время движения материальной точки массы m из начального состояния (x_0, \dot{x}_0) до терминального состояния $(0,0)$ при управлении (2.5) равно

$$T = t_1 + t_2 = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m - m')C}, \quad C = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 < 0 \quad (2.6)$$

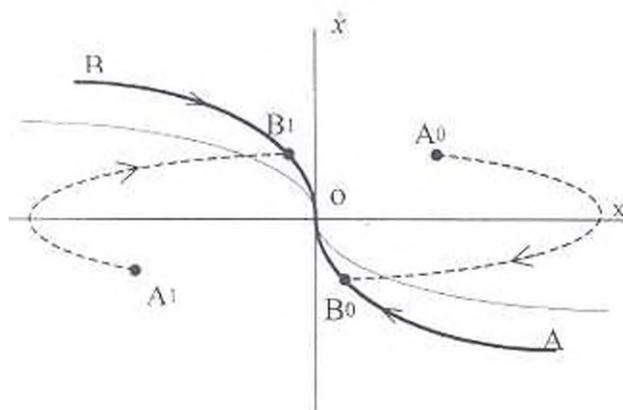
Аналогично определяются полные времена движения материальной точки в случае, когда траектория движения начинается в областях 2,3,4 (фиг. 1), соответственно

$$T = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m + m')C}, \quad C = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 \geq 0 \quad (2.7)$$

$$T = -m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m' - m)C}, \quad C = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 \geq 0 \quad (2.8)$$

$$T = -m\dot{x}_0 + \sqrt{-2(m + m')C}, \quad C = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 \leq 0 \quad (2.9)$$

2.2. Предположим теперь, что масса материальной точки больше параметра кривой переключений, то есть $m' < m < M$. При ограничении



Фиг. 2

выхода материальной точки на кривую переключения AOB .

Не нарушая общности, можно считать что начальная точка траектории находится выше линии переключений AOB (жирная линия). Траектория движения точки здесь состоит из двух участков, от начальной точки $A_0(x_0, \dot{x}_0)$ по параболе $x = -m\dot{x}^2/2 + C_0$ (фиг. 2, штриховая линия), где $C_0 = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 > 0$ до точки пересечения $B_0(\dot{x}_1 = -(2C_0/(m+m'))^{1/2})$ с кривой переключения AOB , а затем до начала координат — по линии переключения B_1O .

Время движения между точками A_0 и B_0 равно $t_1 = m(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) = m(\dot{x}_0 - \sqrt{2C_0/(m+m')})$, а от точки B_0 до начала координат равно $t_2 = -m'\dot{x}_1$.

Следовательно, полное время T движения материальной точки массы m , управляемой по закону (2.5), где $\eta = \frac{m-m'}{m'} > 0$, из начального состояния (x_0, \dot{x}_0) до терминального состояния $(0,0)$ равно

$$T = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m+m')C_0}, \quad C_0 = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 > 0 \quad (2.10)$$

В случае, когда начальная точка (x_0, \dot{x}_0) находится ниже линии переключений AOB , то время движения определяется следующим образом:

$$T = -m\dot{x}_0 - \sqrt{-2(m+m')C_0}, \quad C_0 = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 < 0 \quad (2.11)$$

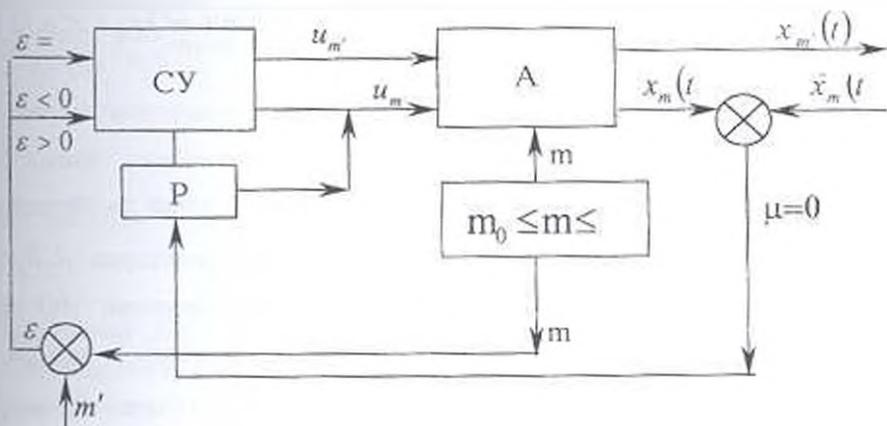
Кибернетическую схему управления материальной точки с перемещаемой массой по закону (2.5) можно представить в виде (фиг. 3)

С практической точки зрения такие задачи могут возникнуть при управлении механических систем, перемещающих грузы, массы которых могут меняться в заданных пределах и система управления которых оптимальна по быстродействию для конкретного значения массы

$|u| \leq 1$ и законе управления (2.1) траектория движения материальной точки массы m представляет собой спираль, содержащую бесконечное число витков [2]. Чтобы в законе управления переключение происходило не более одного раза, управляющая функция должна принять значения $|u| = 1 + \eta$ (1.3), где

$$\eta = \frac{m-m'}{m'} > 0, \quad \text{после}$$

перемещаемого груза. Подобные задачи при разных постановках и методах исследования рассмотрены в таких работах, как [2-4].



$\bar{x}_m(t)$ – кривая переключений, отвечающая параметру m' ; $x_m(t)$ – траектория движения, $\mu = \bar{x}_m(t) - x_m(t)$, $\varepsilon = m - m'$

Фиг. 3

3. Сравнение времен движения для различных значений масс материальной точки. Обозначим через T_m^* время движения точки массы m из начального состояния (x_0, \dot{x}_0) до начала координат при законе управления (2.5). Если масса m материальной точки совпадает со значением m' , то управление в форме синтеза (2.1) обеспечивает ее приведение в терминальное состояние $(0,0)$ за минимальное время. Время движения в этом случае будет

$$T_m^* = m' \dot{x}_0 + 2\sqrt{m' C_m}, \quad C_m = x_0 + \dot{x}_0^2 m' / 2 \quad (3.1)$$

Если же масса m не совпадает с расчетным значением m' , то справедливо следующее утверждение [2]:

$$T_m^* < T_m^{m'} \text{ при } m < m' \quad (3.2)$$

Если масса m материальной точки больше значений m' , то справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $m' < m < M$. Тогда

$$T_m^* < T_m^{m'} < T_M^* \quad (3.3)$$

Доказательство. Согласно формуле (2.10), имеем

$$T_M^* = M \dot{x}_0 + \sqrt{2(M + m') C_M}, \quad C_M = x_0 + \dot{x}_0^2 M / 2 > 0$$

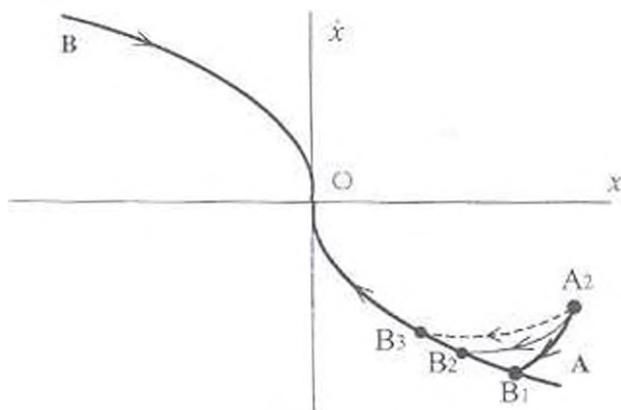
$$T_m^* = m \dot{x}_0 + \sqrt{2(m + m') C_m}, \quad C_m = x_0 + \dot{x}_0^2 m / 2 > 0$$

Поскольку C_M и C_m неотрицательны, то при $\dot{x}_0 > 0$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 T_0^m &= M\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m')(x_0 + \dot{x}_0^2 M/2)} > m\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m')(x_0 + \dot{x}_0^2 m/2)} > \\
 &> m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m+m')(x_0 + \dot{x}_0^2 m/2)} = T_m^m > m'\dot{x}_0 + \sqrt{2(m+m')(x_0 + \dot{x}_0^2 m/2)} > \\
 &> m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'(x_0 + \dot{x}_0^2 m'/2)} = T_m^{m'}
 \end{aligned}$$

Следовательно, $T_M^m > T_m^m > T_m^{m'}$.

Если $\dot{x}_0 < 0$, то траектория движения каждой из точек разбивается на два участка. Обозначим через B_2 точку, в которой траектория $A_2 B_2$ движения точки массы m выходит на кривую переключений AO (тонкая сплошная линия). От начальной точки A_2 точка с массой m сначала движется по дуге параболы $x = m'\dot{x}^2/2 + C$ до точки B_1 (жирная линия), а затем — по кривой переключений до точки B_2 . Так как траектория движения точки массы m' лежит ниже траектории точки



Фиг. 4

массы m , то это означает, что она движется с большей по модулю скоростью и, следовательно, быстрее достигает состояния B_2 . Второй участок из состояния B_2 до начала координат обе точки проходят одинаково. Поэтому полное время движения материальной точки массы m' меньше, чем время

движения точки массы m . Такая же ситуация справедлива для точек массы m и M (фиг.4 — тонкая сплошная и штрихованная линии). Лемма доказана.

Лемма 2 Пусть $m' < m'' < M$. Тогда $T_M^m < T_M^{m''}$ (3.4)

Доказательство. Согласно формуле (2.10), имеем

$$\begin{aligned}
 T_M^m &= M\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m')(x_0 + \dot{x}_0^2 M/2)} \\
 T_M^{m''} &= M\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m'')(x_0 + \dot{x}_0^2 M/2)}, \quad x_0 + \dot{x}_0^2 M/2 > 0
 \end{aligned}$$

Следовательно, по условию леммы имеет место $T_M^m < T_M^{m''}$. Лемма доказана.

Лемма 3. $T_M^{m_0} = \min_{m_0 \leq m \leq M} \max_{m_0 \leq m \leq M} T^m$.

Доказательство. Из утверждений (3.2) и леммы 1 вытекает равенство $T_M^{m_0} = \max_{m_0 \leq m \leq M} T^m$, то есть при законе управления (2.5) с любым параметром m , удовлетворяющим ограничению (1.2), дольше всего движется гочка наибольшей допустимой массы M . Согласно лемме 2 $\min_{m_0 \leq m \leq M} T^m = T_M^{m_0}$.

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1983.
2. Аваньевский И.М. Игровая задача управления материальной гочкой неизвестной массы. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. №4. С.19-27.
3. Аваньевский И.М. Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. №2. С.39-47.
4. Аваньевский И.М. Управление двухмассовой системой с неизвестными параметрами. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №2. С.72-82.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
16.07.2001