

УДК 537.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ НАГРЕВ ВНЕШНЕЙ
СРЕДОЙ И ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА СТЕКЛЯННОЙ КУСОЧНО-
ОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ
С КОНИЧЕСКОЙ

Гачкевич А.Р., Гачкевич Н. Г., Казарян К.Б., Касперский З.И

Ա.Ր. Գաչկեվիչ, Ն.Գ. Գաչկեվիչ, Կ.Բ. Հազարյան, Զ.Ի. Կասպերսկի

Արտաքին միջավայրով եվ ջերմության աղբյուրներով կոնական բաղաձախ եվ նրան համակցված կտոր առ կտոր համասեռ ապակե զվառային բաղաձախ օպտիմալ տեխնոլոգիական տաքացումը Աշխատանքում արաջարկված է զվառային եվ կոնական մասերով բաղադրված ապակե բաղաձախ ըստ լարումների օպտիմալ տեխնոլոգիական տաքացման ռեժիմի պարամետրերի հաշվարկի անալիտիկ հաշվարկային մեթոդի օգտագործումը:

Տաքացումը պայմանավորված է արտաքին միջավայրով եվ անընդհատորեն բաշխված ջերմության ներքին աղբյուրներով:

A.R. Gachkevich, N.G. Gachkevich, K.B. Ghazaryan, Z.I. Kasperski

Optimal technological heating by external media and heat sources of piece-wise homogeneous glass cylindrical shell conjugated with conical one

В работе предложена численно-аналитическая методика расчета параметров оптимального по напряжениям режима технологического нагрева внешней средой и внутренними непрерывно распределенными источниками тепла составной стеклянной оболочки, состоящей из цилиндрической и конической частей.

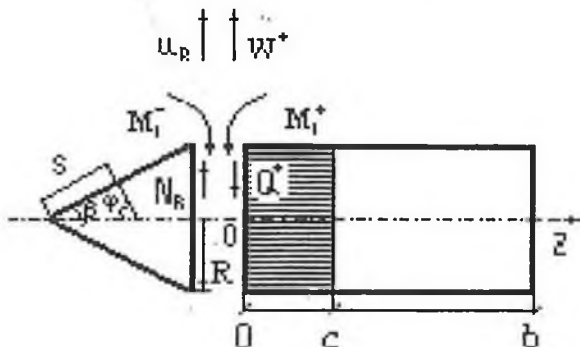
Во многих технологических процессах широко используется технологический нагрев, в частности, при изготовлении электровакуумных приборов. Основными элементами таких приборов являются, как правило, элементы из стекла. Низкие прочностные характеристики стекла особенно в условиях градиентного распределения температуры приводят к необходимости прогнозирования уровня напряжений в процессе термообработки с целью обеспечения значений напряжений, меньших от допустимых.

Рассмотрим задачу об определении оптимальных по напряжениям режимов осесимметричного нагрева свободной от внешнего силового нагружения конечной оболочки, состоящей из кусочно-однородной цилиндрической оболочки (которая имеет две однородные части длины l_1 и l_2) радиуса R , постоянной толщины $2h$, непрерывно сопряженной с круговой конической оболочкой той же толщины (фиг.1). Все три части рассматриваемой составной оболочки изготовлены из разных типов стекла (с различными теплофизическими и механическими характеристиками).

Точки вдоль меридиана конической оболочки описываем расстоянием s от вершины конуса, а положение точки вдоль меридиана цилиндрической части — осевой координатой z (которая отсчитывается от сечения $z = 0$ сопряжения с конической оболочкой). Для конической части оболочки 40

$$z = (R/\sin\beta - s)\cos\beta.$$

Оболочка нагревается конвективным способом со стороны внешней поверхности и непрерывно распределенными источниками тепла, которые вызваны внешним воздействием (в частности, электромагнитным излучением [3, 8]). На внутренней поверхности оболочки $\gamma_{(k)} = -h$ имеет место или конвективный теплообмен со средой $\gamma_{(k)} < R - h$, или теплоизоляция. Здесь индекс k введен для обозначения величин, которые относятся к однородным



Фиг. 1

составным частям оболочки: $k=1$ для $-R\cot\beta \leq z < 0$, $k=2$ для $0 \leq z \leq c$ и $k=3$ для $c < z \leq b$, а $\gamma_{(k)}$ — координата, которая определяет положение точки вдоль нормали к срединной поверхности ($-h \leq \gamma_{(k)} \leq h$).

Необходимо осуществить технологический целевой нагрев заданными источниками тепла и конвективным способом внешней поверхности $\gamma_{(k)} = h$ оболочки в выбранном сечении z_0 от постоянной начальной температуры T_{in} (при $t=0$) до заданной максимальной T_0 за время t_0 , выдержать эту температуру некоторый промежуток времени t_n , а потом охладить поверхность до конечной температуры T_* ($T_* \leq T_0$) за время t_* при некоторых ограничениях на параметры термонапряженного состояния и скорость нагрева. Такой режим нагрева является типичным для многих видов термообработки [2]. Функцией управления (искомой функцией) является температура $T^*(z_0, t) = T(z_0, h, t)$ внешней поверхности оболочки, которая удовлетворяет в соответствии с целью нагрева таким условиям:

$$T^*(z_0, 0) = T_{in}; \quad T^*(z_0, t) = T_0 \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_{01}; \quad T^*(z_0, t_*) = T_*.$$

$$V_{T1} \leq \frac{dT^*(z_0, t)}{dt} \leq V_{T2}; \quad \left(\frac{dT^*(z_0, t)}{dt} \right)_{t=t_0} = 0; \quad \left(\frac{dT^*(z_0, t)}{dt} \right)_{t=t_{01}} = 0 \quad (1)$$

которые отображают цель нагрева и специфику технологии термообработки стеклянных изделий [1,2], а также заданные условия на функцию управления в определенные моменты времени. В условиях (1) V_{T1} , V_{T2} — заданные допустимые скорости нагрева, а $t_{01} = t_0 + t_n$.

Примем, что на всем промежутке нагрева $[0, t_n]$ параметры напряженного состояния (меридиональные $\sigma_{1,k}$ и кольцевые $\sigma_{2,k}$ температурные напряжения на внешней ($\sigma_{1,k}^+$, $\sigma_{2,k}^+$) и внутренней ($\sigma_{1,k}^-$, $\sigma_{2,k}^-$) поверхностях) являются меньшими от допустимых, т.е. выполняются ограничения:

$$\sigma_{01,k}^{\pm} \leq \sigma_{1,k}^{\pm} \leq \sigma_{1,k}^{\pm}, \sigma_{02,k}^{\pm} \leq \sigma_{2,k}^{\pm} \leq \sigma_{2,k}^{\pm} \text{ при } T_i \leq T \leq T_0 \quad (2)$$

где $\sigma_{01,k}^{\pm} \leq 0$, $\sigma_{02,k}^{\pm} \leq 0$, $\sigma_{1,k}^+ \geq 0$, $\sigma_{2,k}^+ \geq 0$.

Сформулированная задача при приведенных ограничениях является задачей оптимального управления, которая имеет множество решений [4]. Для выбора нужного решения за критерий оптимальности принимаем условие минимума функционала максимальных нормальных напряжений

$$F = \max[\sigma_{1,k}(z, \gamma_{(k)}, t), \sigma_{2,k}(z, \gamma_{(k)}, t)] \\ - Rctg\beta \leq z \leq b, h \leq \gamma_{(k)} \leq h, 0 \leq t \leq t_n \quad (3)$$

(который для стеклянных оболочек (или изготовленных из материалов с механическими свойствами, близкими к стеклу) обеспечивает ведение процесса нагрева при минимальном уровне напряженного состояния в каждый момент времени [11]).

Приведенная задача оптимизации сводится к нахождению экстремалей функционала (3) на множестве допустимых функций T^* , $\sigma_{1,k}$, $\sigma_{2,k}$, которые удовлетворяют условиям (1), (2), а также соответствующим уравнениям термомеханики (связывающим механические напряжения с температурным полем) и заданным начальным и граничным тепловым и механическим условиями.

Методику решения такой оптимизационной задачи строим на основе обобщения известной методики оптимизации режимов нагрева для кусочно-однородной оболочки [5], которая состоит из частей одинаковой геометрии. В упомянутой методике для реализации этапа поиска условного минимума функционала (3) используем метод локальных вариаций [15] в пространстве состояний функции управления. Такой способ оптимизации состоит из двух итерационных процессов: процесса варьирования значения функции управления $T^* \equiv \{f(t_i)\}$ в дискретные моменты времени при фиксированном шаге варьирования δ и процесса дробления этого шага.

В приближениях искомую функцию управления $f_{n-1}(t_i)$ выбираем так, чтобы выполнялись условия (1) и ограничения (2). При этом необходимо иметь решение прямой задачи, т.е. иметь значение температуры и напряжений при заданных условиях теплообмена. Выполнение ограничений (2) осуществляется путем сравнения компонент напряжений, определенных

численно-аналитическим методом с прямой задачи, с заданными. Для определения последующего приближения функции управления $f_n(t_i)$ необходимо для трех значений $f_{n-1}(t_i) \pm \delta_{n-1}$, $f_{n-1}(t_i)$ этой функции (полученной в предыдущем приближении) вычислить с использованием решения прямой задачи значения критерия оптимальности (3). Шаг δ_{n-1} варьирования (достаточно малое положительное число, постоянное для конкретного n) при $n=2$ принимаем практически равным максимальному градиенту функции управления в начальном приближении. За искомую функцию $f_n(t_i)$ выбираем ту, для которой значение критерия (3) является минимальным и выполняются условия (1), (2).

Последующие приближения функции управления получаются с использованием предыдущего алгоритма с делением шага $\delta_n = \delta_{n-1}/2$, $n=2,3,4,\dots$ Итерационный процесс продолжается до выполнения следующего условия:

$$\{f_{n+1}(t_i)\} - \{f_n(t_i)\} \leq \varepsilon \quad (4)$$

где ε — заданная малая величина, $\varepsilon \ll \delta_0$.

Поиск условного минимума функционала (3) минимума максимальных нормальных напряжений осуществляем путем сравнения напряжений в области изменения γ, z (у фиксированных сечениях по оси z с выбранным шагом $\Delta z = 0,001$ м и шагом $\Delta \gamma = 0,002$ м по координате γ), которые вычисляем при известном температурном поле. Сечение $z = z_0 = \text{const.}$ в котором напряжения являются максимальными, назовем расчетным.

Область поиска условного минимума функционала (3) существенно сужается (т.е. значительно уменьшаем необходимое количество решений прямых задач в области изменений γ, z) при использовании в алгоритме оптимизации упомянутого расчетного сечения, значение координаты которого находим численно, анализируя распределение напряжений в составных частях оболочки при нулевом приближении функции управления. Его принимаем фиксированным для конкретного δ при всех последующих вариациях и уточняем при изменении δ (дроблении шага по δ) на основании уже известной функции управления для предыдущего δ .

Для предложенного итерационного алгоритма оптимизации существенным является выбор начального приближения значений функции управления, который определяет сходимость итерационного процесса. Для построения такого приближения разработан итерационный алгоритм, в котором в качестве исходной функции управления использована оптимальная (по напряжениям) температура внешней поверхности при конвективном нагреве однородной сферической оболочки [6] с последующим ее уточнением методом локальных вариаций.

В приведенном алгоритме оптимизации для определения начального и k -го приближения функции управления используется решение прямой задачи. Отметим, что такая задача может быть сформулирована на основании

произвольной термомеханической теории. Известно [16], что с изменением температуры в границах, рассматриваемых в работе температур ($0^{\circ}\text{C} - 460^{\circ}\text{C}$), коэффициенты линейного теплового расширения (КЛТР) разных технических стеклянных материалов, что используются в электровакуумном производстве, значительно изменяются, а коэффициенты температуропроводности, Пуассона и модуль Юнга практически являются постоянными [1]. Изменение КЛТР значительно влияет на термоупругое состояние [1] кусочно-однородных стеклянных конструкций. Поэтому в рассматриваемой задаче для описания полей температуры и напряжений будем исходить из теории несвязанной термоупругости при зависимых от температуры КЛТР [12]. При этом, температурное поле в оболочке описывается следующим уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial \gamma_{(k)}^2} + P_k^2 T_k = -\frac{Q_{*k}}{\lambda_k} \quad (5)$$

при начальном условии

$$T_k(z, \gamma_{(k)}, 0) = T_{in}(z, \gamma_{(k)}) \equiv \text{const} \quad (6)$$

и тепловых условиях на внешней и внутренней поверхностях оболочки соответственно

$$\begin{aligned} T_k(z, \gamma_{(k)}, t) &= T_k^+(z, t) \quad \text{при } \gamma_{(k)} = h \\ \frac{\partial T_k}{\partial \gamma_{(k)}} + H_k^-(T_k - T_c) &= 0 \quad \text{при } \gamma_{(k)} = -h \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } P_k^2 = \Delta_k - \frac{1}{a_k} \frac{\partial}{\partial t}, \Delta_1 = \frac{1}{s \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(s \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} \right) \right], \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8)$$

$z = \left(\frac{R}{\sin \beta} - s \right) \cos \beta$ (для конической части оболочки), $Q_{*k}(z, \gamma_{(k)}, t)$ — плотность источников тепла, a_k, λ_k — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности составных частей, H_k^- — относительный коэффициент теплоотдачи поверхности $\gamma_{(k)} = -h$, $T_c(t)$ — температура внутри среды $\gamma_{(k)} < R - h$. Отметим, что плотность источников является заданной функцией.

Примем, что в областях контакта разнородных частей оболочки выполняются условия идеального теплового и механического сопряжения [13]:

$$T_k = T_{k+1}; \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial \xi} = \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial \xi} \quad \text{при } z = 0, z = c \quad (9)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k+1}; \bar{\sigma}_{\xi,k} = \bar{\sigma}_{\xi,k+1} \quad \text{при } z = 0, z = c \quad (10)$$

где $\bar{u}$ — вектор перемещения; $\bar{\sigma}_{\xi,k}$ — вектор напряжений, $\bar{\xi}$ — внешняя нормаль к плоскости сечения одной из контактирующих оболочек.

Механические граничные условия могут соответствовать как заданным

напряжениям, так и перемещениям или иметь смешанный характер [6, 12, 13].

Для получения приближенного решения задачи теплопроводности, удобного для использования в используемом алгоритме оптимизации, аппроксимируем распределение температуры по толщинной координате $\gamma_{(k)}$ кубическим полиномом вида

$$T_{(k)}(z, \gamma_{(k)}, t) = \sum_{i=1}^4 b_{i-1,k}(z, t) \gamma_{(k)}^{i-1} \quad (11)$$

Функции $b_{i-1,k}(z, t)$ выразим через усредненные характеристики температурного поля по толщине оболочки [14]

$$T_{p,k} = \frac{2p-1}{2h^p} \int_{-h}^h T_k \gamma_{(k)}^{p-1} d\gamma_{(k)}, \quad p=1,2 \quad (12)$$

и заданные граничные условия. Уравнение для определения усредненных характеристик $T_{p,k}$ получим, умножив уравнение теплопроводности (5) на $\gamma_{(k)}^{p-1}$ и проинтегрировав по этой координате с учетом соотношений (12). При этом для усредненных характеристик $T_{1,k}$, $T_{2,k}$ получаем следующие системы уравнений при конвективном теплообмене:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_k - \frac{1}{a_k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{1,k} - 2R_{1,k}^* T_{1,k} - 2R_{2,k}^* T_{2,k} &= -W_{1,k} - 3(R_{4,k}^* T^+ + R_{5,k}^* T_c^-) \\ \left(\Delta_k - \frac{1}{a_k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{2,k} - 6R_{3,k}^* T_{2,k} - 6R_{2,k}^* T_{1,k} &= -W_{2,k} - 15(R_{7,k}^* T^+ - R_{6,k}^* T_c^-) \end{aligned} \quad (13)$$

и теплоизоляции:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_k - \frac{1}{a_k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{1,k} - 2/h^2 T_{1,k} - 5/(3h^2) T_{2,k} &= -W_{1,k} - 2/h^2 T^+ \\ \left(\Delta_k - \frac{1}{a_k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{2,k} - 5/h^2 T_{1,k} - 20/(3h^2) T_{2,k} &= -W_{2,k} - 5/h^2 T^+ \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1,k}^* &= 3 \frac{(3 + Bi_k^-)}{h^2 R_{8,k}^*}, \quad R_{2,k}^* = \frac{15}{2h^2 R_{8,k}^*}, \quad R_{3,k}^* = -5 \frac{(2 + Bi_k^-)}{h^2 R_{8,k}^*}, \quad R_{4,k}^* = \frac{(6 + Bi_k^-)}{h^2 R_{8,k}^*} \\ R_{5,k}^* &= \frac{Bi_k^-}{h^2 R_{8,k}^*}, \quad R_{6,k}^* = R_{5,k}^*, \quad R_{7,k}^* = \frac{(6 + Bi_k^-)}{h^2 R_{8,k}^*}, \quad R_{8,k}^* = 9 + 2Bi_k^- \end{aligned}$$

$Bi_k^- = H_k^{-1} h$ — коэффициент Био, H_k^- — относительный коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности $\gamma_{(k)} = -h$,

$$W_{1,k} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h W_k(z, \gamma_{(k)}, t) d\gamma_{(k)}, \quad W_k = \lambda_k^{-1} Q_{*,k}(z, \gamma_{(k)}, t)$$

$$W_{2,k} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h W_k(z, \gamma_{(k)} t) d\gamma_{(k)}$$

Неизвестные коэффициенты $b_{i-1,k}$ аппроксимирующего полинома (11) определяем из системы уравнений, которую получаем непосредственно подстановкой представлений (11) в существующие граничные условия и соотношения (12). Эти коэффициенты имеют следующий вид соответственно для конвективного теплообмена и теплоизоляции:

$$\begin{aligned} b_{0,k} &= \left[1 + \frac{h^2}{3} R_{1,k}^* \right] T_{1,k} + \frac{h^2}{3} R_{2,k}^* T_{2,k} - \frac{h^2}{2} (R_{4,k}^* T^+ + R_{5,k}^* T_c^-) \\ b_{1,k} &= \frac{3h}{5} R_{2,k}^* T_{1,k} + \left[\frac{1}{h} - \frac{3h}{5} R_{3,k}^* \right] T_{2,k} - \frac{3h}{2} (R_{7,k}^* T^+ - R_{6,k}^* T_c^-) \\ b_{2,k} &= -R_{1,k}^* T_{1,k} - R_{2,k}^* T_{2,k} + \frac{3}{2} (R_{4,k}^* T^+ + R_{5,k}^* T_c^-) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} b_{3,k} &= -\frac{1}{h} R_{2,k}^* T_{1,k} + \frac{1}{h} R_{3,k}^* T_{2,k} + \frac{5}{2h} (R_{7,k}^* T^+ - R_{6,k}^* T_c^-) \\ b_{0,k} &= \frac{4}{3} T_{1,k} + \frac{5}{18} T_{2,k} - \frac{1}{3} T^+, b_{1,k} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} T_{1,k} + \frac{5}{3} T_{2,k} - \frac{1}{2} T^+ \right] \\ b_{2,k} &= \frac{1}{h^2} \left[T^+ - T_{1,k} - \frac{5}{6} T_{2,k} \right], b_{3,k} = \frac{1}{h^3} \left[\frac{5}{6} T^+ + \frac{5}{6} T_{1,k} - \frac{10}{9} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Используя выражения (11), (12), начальные условия (6) и условия сопряжения (9), получаем, что условия (6), (9) эквивалентны следующим условиям на функции $T_{1,k}$, $T_{2,k}$:

$$T_{1,k} = T_{in}, T_{2,k} = 0, \frac{\partial T_{1,k}}{\partial t} = 0, \frac{\partial T_{2,k}}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} T_{1,k} &= T_{1,k+1}, T_{2,k} = T_{2,k+1}, \lambda_k \frac{\partial T_{1,k}}{\partial \xi} = \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{1,k+1}}{\partial \xi} \\ \lambda_k \frac{\partial T_{2,k}}{\partial \xi} &= \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{2,k+1}}{\partial \xi} \text{ при } t = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

где ξ — внешняя нормаль к поверхности сечения одной из контактирующих оболочек.

В рассматриваемых осесимметричных задачах уравнения теплопроводности и термомеханики удобно записать в канонических координатах [6]. Тогда $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left(r \frac{\partial}{\partial s} \right)$, $A_1 = 1$, $A_2 = r(s)$, где $r(s)$ — радиус поперечного сечения оболочки, т.е. радиус параллели; s — длина меридиана, что отсчитывается от вершины конической оболочки, причем $0 \leq s \leq R/\sin \beta$ для конической части, а $s = R/\sin \beta + z$ для

цилиндрической. Здесь A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратической формы срединной поверхности. Выражение для $\Delta_k (k=1,3)$ получим, подставляя $r(s) = s \cos \varphi$ для конической части оболочки и $r(s) = R$ — для цилиндрической.

Система уравнений (13), (14) в канонических координатах r, s будет системой дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Для определения ее решения используем метод сеток при безусловно устойчивой неявной разностной схеме [7]. Пространственно-временную область изменения независимых величин s, t разобьем сеткой на прямоугольники с шагом Δs по меридиональной координате s и шагом Δt по времени t . Непрерывное распределение функций $T_{1,k}, T_{2,k}$ в этой области заменим дискретными значениями в узлах сетки. Система дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимируется конечно-разностными выражениями с порядком ошибки $O(\Delta s^2 + \Delta t)$, а начальные и граничные условия — с порядком погрешности $O(\Delta s)$. Эти выражения для всех точек дискретизации составляют систему алгебраических уравнений для определения величин $T_{1,k}(s_n, t_m), T_{2,k}(s_n, t_m)$ на каждом временном слое. Сетка описана следующими зависимостями: $s_n = n \cdot \Delta s, t_m = m \cdot \Delta t, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$, где N, M — избранное количество узлов соответственно по координате s с шагом Δs и времени t с шагом Δt .

Используя дискретные значения интегральных характеристик, на основании соотношений (11), (15), (16) определяем температуру в узлах сетки. Потом, исходя из структуры общих решений ключевых уравнений механики для конической и цилиндрической оболочек [6, 12, 13], а также аппроксимаций температурной зависимости коэффициента температурного расширения при помощи кусочно-линейных функций [7], определяем дискретные значения ключевых функций, усилий, моментов и напряжений для каждого узла s_n, t_m .

Во многих случаях кусочно-однородные стеклянные оболочки изготавливаются из материалов с близкими теплофизическими характеристиками. Для одинаковой толщины оболочек при независимых от координаты s источниках тепла могут быть построены эффективные режимы целевого нагрева однородной температурой внешней среды (которая зависит только от времени t). В этом случае изменение температуры внешней среды, и как следствие температуры внешней поверхности, вдоль меридиональной координаты s незначительно и им можно пренебречь. Поэтому можно принять, что температура в каждой составной части оболочки является функцией толщины $\gamma_{(k)}$ и времени t , а перемещения и напряжения — функциями времени и координат $\gamma_{(k)}, s$. При этом, значительно упрощается решение прямых задач при незначительной погрешности значений

оптимальной температуры внешней поверхности. В этом случае системы дифференциальных уравнений (13), (14) будут системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, т.е.:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1,k}}{dt} + 2a_k R_{1,k}^* T_{1,k} + 2a_k R_{2,k}^* T_{2,k} &= a_k W_{1,k} + 3a_k (R_{4,k}^* T^+ + R_{5,k}^* T^-) \\ \frac{dT_{2,k}}{dt} + 6a_k R_{2,k}^* T_{1,k} + 6a_k R_{3,k}^* T_{2,k} &= a_k W_{2,k} + 15a_k (R_{7,k}^* T^+ - R_{6,k}^* T^-) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1,k}}{dt} + \frac{2a_k}{h^2} T_{1,k} + \frac{5a_k}{3h^2} T_{2,k} &= a_k W_{1,k} + \frac{2a_k}{h^2} T^+ \\ \frac{dT_{2,k}}{dt} + \frac{5a_k}{h^2} T_{1,k} + \frac{20a_k}{3h^2} T_{2,k} &= a_k W_{2,k} + \frac{5a_k}{h^2} T^- \end{aligned} \quad (20)$$

Решение такой системы можно найти более эффективно методом наименьших квадратов [10] при конечно-элементной аппроксимации функции $T^*(t)$ (в сравнении с вышеизложенным разностным относительно затрат машинного времени и оперативной памяти компьютера). При этом существенно упрощается процедура численного определения параметров термонапряженного состояния составной оболочки (процедура получения решения прямой задачи), которая используется в предложенном алгоритме оптимизации. В данном случае системы дифференциальных уравнений (19), (20) для определения температуры в операторном виде запишутся:

$$Au = f \quad (21)$$

где $u = (T_{1,k}, T_{2,k})^T$, $f = (f_{1,k}, f_{2,k})^T$, A — соответствующий дифференциальный оператор, $f_{1,k}$, $f_{2,k}$ — правые части систем (19), (20), символом " T " обозначены транспонированные матрицы. Тогда нахождение решения систем сводится к минимизации функционала

$$I(u) = \int_0^t (Au - f)^T (Au - f) dt \quad (22)$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $T_{1,k}^i$, $T_{2,k}^i$ в узлах разбиения интервала $0 \leq t \leq t_*$ точками $t_i = it_*/N$, $i = \overline{1, N-1}$ на $N-1$ элемент, которую решаем методом Гаусса в модификации Холесского. Имея значения усредненной температуры $T_{1,k}^i$ и температурного момента $T_{2,k}^i$, с помощью соотношений (11), (15), (16) вычисляем температуру для момента времени t_i в произвольной точке оболочки.

В рассматриваемой осесимметричной задаче для свободной от внешней силовой нагрузки составной оболочки напряженное состояние характеризуется осевыми $\sigma_{1,k}$ и кольцевыми $\sigma_{2,k}$ температурными

напряжениями, которые связаны с усилиями $N_{1,k}$, $N_{2,k}$ и изгибающими моментами $M_{1,k}$, $M_{2,k}$ соотношениями [6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,k} &= \frac{1}{2h} \left(N_{1,k} + 3M_{1,k} \frac{\gamma(k)}{h^2} \right) + \frac{E_k}{1-\nu} \left(e_{t,k} + \frac{\gamma(k)}{h} e_{r,k} - \Phi_k \right) \\ \sigma_{2,k} &= \frac{1}{2h} \left(N_{2,k} + 3M_{2,k} \frac{\gamma(k)}{h^2} \right) + \frac{E_k}{1-\nu} \left(e_{r,k} + \frac{\gamma(k)}{h} e_{t,k} - \Phi_k \right)\end{aligned}\quad (23)$$

где $e_{t,k} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \Phi_k d\gamma(k)$, $e_{r,k} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma(k) \Phi_k d\gamma(k)$, $\Phi_k(t) = \int_{T_{in}}^{T_k} \alpha_{t,k}(\xi) d\xi$ — суммарные чисто тепловые деформации; E_k — модуль упругости составных частей.

Для конической части оболочки эти усилия и моменты определяем с известного ключевого уравнения [9]. При этом они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}N_1^{(i)} &= c_1(\tau) \frac{4}{\xi^2} \left(\text{ber } \xi - \frac{2}{\xi} \text{bei}' \xi \right) + c_2(\tau) \frac{4}{\xi^2} \left(-\text{bei } \xi - \frac{2}{\xi} \text{ber}' \xi \right) \\ N_2^{(i)} &= c_1(\tau) \left(\frac{2}{\xi} \text{ber}' \xi - \frac{4}{\xi^2} \text{ber } \xi + \frac{8}{\xi^3} \text{bei}' \xi \right) + \\ &+ c_2(\tau) \left(-\frac{2}{\xi} \text{bei}' \xi + \frac{4}{\xi^2} \text{bei } \xi + \frac{8}{\xi^3} \text{ber}' \xi \right) \\ M_1^{(i)} &= c_1(\tau) \left\{ -\frac{2h}{c_0} \left[(\nu-1) \left(-\frac{4}{\xi^2} \text{bei } \xi - \frac{8}{\xi^3} \text{ber}' \xi \right) - \frac{2}{\xi} \text{bei}' \xi \right] \right\} + \\ &+ c_2(\tau) \left\{ \frac{2h}{c_0} \left[(\nu-1) \left(\frac{4}{\xi^2} \text{ber } \xi - \frac{8}{\xi^3} \text{bei}' \xi \right) + \frac{2}{\xi} \text{ber}' \xi \right] \right\} - \frac{(1+\nu)}{h} D_1^{(i)} e_{t_k}^{(i)} \\ M_2^{(i)} &= c_1(\tau) \left\{ -\frac{2h}{c_0} \left[(1-\nu) \left(-\frac{4}{\xi^2} \text{bei } \xi - \frac{8}{\xi^3} \text{ber}' \xi \right) - \frac{2\nu}{\xi} \text{bei}' \xi \right] \right\} + \\ &+ c_2(\tau) \left\{ \frac{2h}{c_0} \left[(1-\nu) \left(\frac{4}{\xi^2} \text{ber } \xi - \frac{8}{\xi^3} \text{bei}' \xi \right) + \frac{2\nu}{\xi} \text{ber}' \xi \right] \right\} - \frac{(1+\nu)}{h} D_1^{(i)} e_{r_k}^{(i)} \\ Q_1^{(i)} &= N_1^{(i)} \text{tg} \varphi\end{aligned}\quad (24)$$

где $\xi = \sqrt{\frac{c_0 \text{ctg} \beta}{2h}} s$; $D_1^{(k)} = \frac{2E^{(k)} h^3}{3(1-\nu^2)}$ — изгибная жесткость, φ — угол между нормалью и осью вращения, $\beta = \pi/2 - \varphi$; $\text{ber} \xi$, $\text{bei} \xi$, $\text{ber}' \xi$, $\text{bei}' \xi$ — функции Кельвина и их производные; $c_1(t)$, $c_2(t)$ — постоянные инте-

гирования (функции времени); $\mu = \sqrt{\frac{c_0^2 R^2}{4h^2} - \nu^2} \approx \frac{c_0 R}{2h}$; $c_0^2 = 12(1 - \nu^2)$;
 ν — коэффициент Пуассона.

Примем, что на краю цилиндрической оболочки $z = l_1 + l_2$ выполняются условия жесткого защемления

$$N_{1,3} = 0, \quad \frac{\partial W_{0,3}}{\partial x} = 0, \quad W_{0,3} = e_{t,3} \quad (25)$$

а в сечениях сопряжения разнородных частей составной оболочки — условия идеального механического сопряжения, которые в усилиях и моментах запишутся [9]:

$$\begin{aligned} N_R &= N_{1,1} \cos \varphi + Q_{1,1} \sin \varphi = Q^{(2)}; M_{1,1} = M_{1,2}; \theta^{(1)} = \theta^{(2)}; Q^{(2)} = Q^{(3)} \\ u_R &= R \left\{ \frac{N_{2,1} - \nu N_{1,1}}{2E_1 h} \right\} = W^{(2)}; M_{1,2} = M_{1,3}; \theta^{(2)} = \theta^{(3)}; W^{(2)} = W^{(3)} \end{aligned} \quad (26)$$

где N_R , u_R — радиальные усилия и перемещения в конической оболочке; $\theta^{(k)}$ — угол поворота нормали к срединной поверхности; $x = a_1 z / R$; $a_1^4 = 3(1 - \nu^2) / 4h^2$; $W_{0,k} = W^{(k)} / R$ — прогиб цилиндрической оболочки.

Напряженное состояние цилиндрической части характеризуется отличным от нуля усилием $N_{2,k}$, изгибающими моментами $M_{1,k}$, $M_{2,k}$ и перерезывающими силами $Q^{(k)}$, где

$$\begin{aligned} N_{2,k} &= D_{0,k} (W_{0,k} - e_{t,k}) \\ M_{1,k} &= -\frac{D_{1,k}}{h} \left[\frac{a_1^2 h}{R} \frac{\partial^2 W_{0,k}}{\partial x^2} + (1 + \nu) e_{t,k} \right] \\ M_{2,k} &= -\frac{D_{1,k}}{h} \left[\frac{\nu a_1^2 h}{R} \frac{\partial^2 W_{0,k}}{\partial x^2} + (1 + \nu) e_{t,k} \right] \\ Q^{(k)} &= -D_{1,k} \frac{a_1^3}{R^2} \frac{\partial^3 W_{0,k}}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $k = 2, 3$; $D_{0,k} = 2E_k h$ — жесткость на растяжение. $W_{0,k}$ — функция прогибов, что удовлетворяет известному дифференциальному уравнению [6, 13]

$$\frac{\partial^4 W_{0,k}}{\partial x^4} + 4(W_{0,k} - e_{t,k}) = 0 \quad (28)$$

При известных $e_{t,k}$ решение этого уравнения запишется следующим образом:

$$W_{0,k}(x,t) = K_{1,k}(t)e^x \cos x + K_{2,k}(t)e^x \sin x + K_{3,k}(t)e^{-x} \cos x + K_{4,k}(t)e^{-x} \sin x + e_{t,k} \quad (29)$$

Неизвестные функции времени $K_{i,k}(t) (i = \overline{1,4})$ и $c_j (j = \overline{1,2})$, которые входят в (29) и выражения для усилий и моментов конической оболочки (24), определяются в каждый момент времени из условий механического сопряжения (26) и граничных условий (25).

В качестве примеров найдены оптимальные по напряжениям режимы однородного нагрева внешней средой и заданными источниками тепла (постоянной плотности) свободной от силового нагружения оболочки длиной $2R$, состоящей из кусочно-однородной цилиндрической части с радиусом $R = 0,125''$ и толщиной $0,007''$, гладко сопряженной с круговой конической оболочкой (фиг. 1). Оболочка изготовлена из материала со следующими физико-механическими характеристиками [1]:

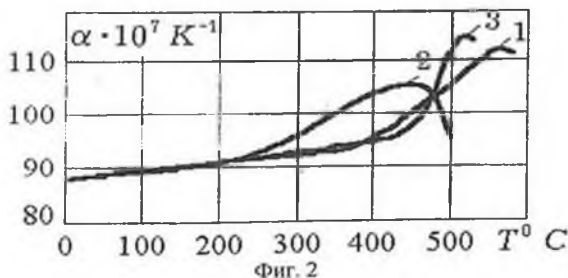
$$E_1 = 65,4 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 75,6 \text{ ГПа}; \quad E_3 = 63,3 \text{ ГПа}$$

$$\lambda_1 = 1,63 \text{ Вт/(мК)}; \quad \lambda_2 = 0,065 \text{ Вт/(мК)}; \quad \lambda_3 = 0,74 \text{ Вт/(мК)}$$

$$c_1 = 795 \text{ Дж/(кгК)}; \quad c_2 = 339 \text{ Дж/(кгК)}; \quad c_3 = 736 \text{ Дж/(кгК)}$$

$$\rho_1 = 2560 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_2 = 4080 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_3 = 2800 \text{ кг/м}^3$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0,215$$



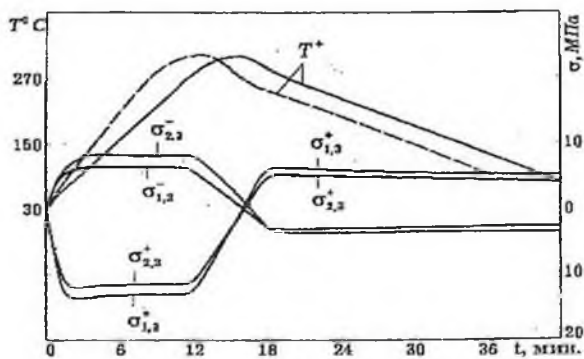
Зависимость коэффициентов линейного теплового расширения от температуры для составных частей оболочки 1-3 приведена на фиг. 2.

На основании проведенных численных исследований путем сравнения величин напря-

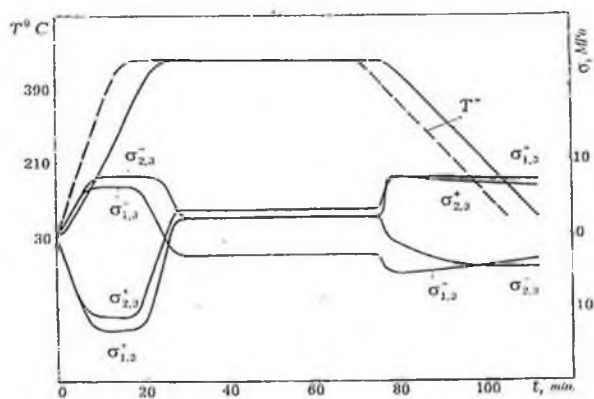
жений в сечениях оболочки установлено, что максимальные температурные напряжения в этом случае возникают в зоне сопряжения разнородных частей цилиндрической оболочки и расчетным является сечение с координатой $x = 0,551$.

Изменение во времени оптимальной температуры такой составной оболочки при теплоизоляции на внутренней поверхности (вычислена по

допустимым растягивающим напряжениям на внутренней и внешней поверхностях, соответственно, равным 9 МПа и 7 МПа) показано на фиг. 3, а при конвективном теплообмене (определена по допустимым растягивающим напряжениям на внутренней и внешней поверхностях, равным 9 МПа) на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Сплошными линиями изображено изменение во времени оптимальной температуры $T^*(t)$ и температурных напряжений на внешней σ^+ и внутренней σ^- поверхностях оболочки при отсутствии источников тепла. При нагреве от начальной температуры до максимальной растягивающие температурные напряжения возникают на внутренней поверхности оболочки, а при охлаждении - на внешней. При этом на внутренней поверхности расчетными являются кольцевые, а на внешней - меридиональные

температурные напряжения. На фигуре штриховой линией изображено изменение оптимальной температуры в том же сечении при воздействии постоянных источников тепла мощностью 10^5 Вт/м³ (при тех же допустимых растягивающих температурных напряжениях на поверхностях равных соответственно 9Мпа и 7Мпа, а при конвективном теплообмене 9Мпа).

Исследования показали, что использование дополнительного подогрева указанными источниками тепла в рассматриваемом случае позволяет сократить на 25% -30% продолжительность режима нагрева в сравнении с режимом, в котором используется только конвективный нагрев, при той же максимальной температуре нагрева и тех же допустимых максимальных значениях компонент тензора напряжений. Для значений угла $30^\circ \leq \varphi_* \leq 90^\circ$ (через φ_* обозначен угол между осью вращения и нормалью к внешней основе, проведенной через крайнее сечение конической части оболочки) оптимальные режимы толщинного нагрева такой оболочки практически не отличаются от режимов нагрева составной оболочки, где коническая часть заменена цилиндрической длиной $Rctg\beta$.

Разработанная методика позволяет определить и исследовать оптимальные режимы нагрева конкретных оболочек, что состоит из элементов разной геометрической формы, выбрать рациональные параметры дополнительных источников подогрева, которые позволяют значительно сократить продолжительность термообработки. Отметим, что режимы термообработки, изображенные на фиг. 3, 4, могут использоваться соответственно при общей термообработке, отжиге (с целью понижения уровня остаточных напряжений), склейке с использованием ситаллоцемента и дегазации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барановский В.И., Гусев Б.Н., Иванов В.Н. и др. Производство цветных кинескопов/ Под ред. В.И. Барановского. М.: Энергия, 1978. 368 с.
2. Будз С.Ф., Гачкевич Н.Г. Оптимизация термообработки кусочно-однородных оболочек ЭЛП с учетом температурной зависимости характеристик материала// Физ.-хим. механика материалов. 1987. № 5. С. 111-113.
3. Бурак Я.Й, Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону// Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. № 6. С. 31-42.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400с.

5. Гачкевич А.Р., Гачкевич Н.Г. Оптимальный нагрев внешней средой кусочно-однородных оболочек вращения при наличии внутренних источников тепла// Прикладная механика. 1995. 31. № 11. С. 51-57.
6. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. Казарян К.Б., Казарян Р.А. Напряженное состояние упругой токонесящей оболочки, создающей мультипольное магнитное поле.// Сб. Инженерно-физические проблемы новой техники. Изд. МГТУ, 1990. С. 161-162.
9. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
10. Норр Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
11. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.А. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка, 1988. 736 с.
12. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. Киев: Наук. думка, 1981. 344 с.
13. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 320 с.
14. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций// Мат. методы и физ.-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 54-59.
15. Черноусько Ф.М., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 225 с.
16. Эспс В. Технология электровакуумных приборов. М.: Энергия, 1968. Т. 2. 448 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики НАН Украины,
Институт механики НАН Армении,
Политехника Опольская (Польша).

Поступила в редакцию
21.01.2002