

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ,  
СОДЕРЖАЩЕЙ КРЕСТООБРАЗНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Григорян Э.Х., Торосян Д.Р., Шагинян С.С.

Է.Խ.Գրիգորյան, Դ.Ռ.Թորոսյան, Ս.Ս.Շահինյան

Խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է խաչաձև ներդիր

Դրսարկվում է խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է խաչաձև վերադիր ներդիր խնդիր մոդելացվում է որպես կտոր առ կտոր համասեռ անվիր խաչաձև ներդիր պարունակող առաձգական հարթության խնդիր: խնդիր բերվում է. Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեփ ինտեգրալ հավասարման, որը բաշխ է առաջա լուծում հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով:

E.K.Grigoryan, D.R.Torosyan, S.S.Shahinyan

Problem for Elastic Plane Weakened by Cruciform Insertion

Рассматривается задача для упругой плоскости, содержащей крестообразное упругое конечное включение. Упругая плоскость деформируется под действием напряжений, приложенных на бесконечности по взаимно-перпендикулярным направлениям (по  $x$  и по  $y$ ). Включен моделируется в виде задачи для упругой плоскости, содержащей бесконечное крестообразное включение, состоящее из двух кусочно-однородных бесконечных включений. Далее задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающего решение методом последовательных приближений.

Пусть упругая плоскость содержит две одинаковые взаимно-перпендикулярные включения одинаковой длины, которые вместе образуют крест, т.е. упругая плоскость содержит крестообразное включение. Упругая плоскость деформируется под действием напряжений  $p$  и  $q$ , приложенных на бесконечности по направлениям  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно. Относительно включения полагается, что оно по линиям  $x$  и  $y$  находится в одноосном напряженном состоянии, т.е. она совпадает с крестообразной линией  $|x| \leq a, y = 0$  и  $|y| \leq a, x = 0$ , с жесткостью  $E_1 h$ , где  $E_1$  — модуль упругости включения, а  $h$  — его толщина. С другой стороны, поскольку вышеуказанная линия имеет конечную жесткость, то в концах  $x = \pm a, y = \pm a$  оно не может быть в контакте с линиями нулевой жесткости. Поэтому, чтобы учитывать контактные условия на концах включения ( $x = \pm a$  и  $y = \pm a$ ), поступим, как в [1], мысленно продолжим включение по направлениям  $x$  и  $y$  материалом упругой плоскости до бесконечности. Далее допустим, что полученное кусочно-однородное бесконечное крестообразное включение находится в двухосном напряженном состоянии, т.е. совпадает с крестообразной линией, имеющая конечную жесткость (при  $|x| < a, |y| < a$  — жесткость  $E_1 h$ , а при  $|x| > a, |y| > a$  — жесткость  $E_2 h$ , где  $E_2$  — модуль упругости материала плоскости). Из вышесказанного следует, что задача для упругой

6

плоскости с конечным крестообразным включением, можно моделировать, как задачу для плоскости с бесконечным кусочно-однородным крестообразным включением, конечная часть которого — вышеуказанное включение, а полубесконечная часть состоит из материала упругой плоскости.

Приступив к решению модельной задачи, запишем уравнения равновесия включения

$$\begin{aligned} hE_2 \frac{d^2 u^{(1)}(x)}{dx^2} + 2\tau^{(1)}(x) &= 0; & (-\infty < x < -a) \\ hE_1 \frac{d^2 u^{(1)}(x)}{dx^2} + 2\tau^{(1)}(x) &= 0; & (-a < x < a) \\ hE_2 \frac{d^2 u^{(1)}(x)}{dx^2} + 2\tau^{(1)}(x) &= 0; & (a < x < \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

а при  $-\infty < y < \infty$

$$\begin{aligned} hE_2 \frac{d^2 v^{(1)}(y)}{dy^2} + 2\tau^{(1)}(y) &= 0; & (-\infty < y < -a) \\ hE_1 \frac{d^2 v^{(1)}(y)}{dy^2} + 2\tau^{(1)}(y) &= 0; & (-a < y < a) \\ hE_2 \frac{d^2 v^{(1)}(y)}{dy^2} + 2\tau^{(1)}(y) &= 0; & (a < y < \infty) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tau^{(1)}(x)$ ,  $\tau^{(1)}(y)$  — контактные касательные напряжения,  $u^{(1)}(x)$ ,  $v^{(1)}(y)$  — перемещения включения по  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

В начале рассмотрим уравнения (1) и запишем их одним уравнением. Из (1) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{du^{(1)}(x)}{dx} &= -\frac{2}{hE_2} \int_{-\infty}^x \tau^{(1)}(s) ds + \frac{p}{E_2}; & (-\infty < x < -a) \\ \frac{du^{(1)}(x)}{dx} &= -\frac{2}{hE_1} \int_{-a}^x \tau^{(1)}(s) ds + C; & (-a < x < a) \\ \frac{du^{(1)}(x)}{dx} &= \frac{2}{hE_2} \int_x^{\infty} \tau^{(1)}(s) ds + \frac{p}{E_2}; & (a < x < \infty) \end{aligned}$$

Выше имеется в виду, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(s) ds = 0.$$

Теперь, имея в виду, что  $\tau^{(1)}(-s) = -\tau^{(1)}(s)$ , получим

$$\int_{-a}^x \tau^{(1)}(s) ds = - \int_0^a \theta(s-x) \tau^{(1)}(s) ds; \quad (0 < x < a)$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда.

Итак, будем иметь

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{2}{hE_1} \int_0^a \theta(s-x) \tau^{(1)}(s) ds + C, \quad (0 < x < a) \quad (3)$$

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{2}{hE_2} \int_0^\infty \theta(s-x) \tau^{(1)}(s) ds + \frac{P}{E_2}, \quad (a < x < \infty) \quad (4)$$

Далее, удовлетворив условию контакта

$$E_1 \frac{du^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=a-0} = E_2 \frac{du^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=a+0}$$

Тогда  $C$  определяется в виде

$$C = \frac{2}{hE_1} \int_a^\infty \tau^{(1)}(s) ds + \frac{P}{E_1}; \quad \int_{-a}^a \tau^{(1)}(s) ds = 0;$$

(3) и (4) можно записать одним уравнением

$$\begin{aligned} \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = & \left( \frac{2}{hE_1} \int_0^a \theta(s-x) \tau^{(1)}(s) ds + C \right) (1 - \theta(x-a)) + \\ & + \left( \frac{2}{hE_2} \int_0^\infty \theta(s-x) \tau^{(1)}(s) ds + \frac{P}{E_2} \right) \theta(x-a), \quad (0 < x < \infty) \end{aligned}$$

Для дальнейшего, после замены  $x$  на  $ae'$ ,  $s$  на  $ae''$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = & \left( \frac{2a}{hE_1} \int_{-\infty}^0 \theta(u-v) \tau_1(u) e^u du + C_1 \right) \theta(-v) + \\ & + \frac{2a}{hE_2} \int_0^\infty \theta(u-v) \tau_1(u) e^u du \theta(v) + \frac{P}{E_2} \quad (-\infty < v < \infty) \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\tau_1(u) = \tau^{(1)}(ae''); \quad C_1 = \frac{2a}{hE_1} \int_0^\infty \tau_1(u) e^u du + P \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

Далее, продифференцировав (5) по  $v$ , получим

$$\frac{d}{dv} \left( \frac{du^{(1)}(x)}{dx} \right) = -\frac{2a}{hE_1} \tau_1^-(v) e^v - \frac{2a}{hE_2} \tau_1^+(v) e^v + A \delta(v) \quad (6)$$

где

$$\tau_1^-(v) = 0(-v) \tau_1(v); \quad \tau_1^+(v) = 0(v) \tau_1(v)$$

$$A = \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \left( p + \frac{2a}{h} \int_0^\infty \tau_1(u) e^u du \right)$$

Поступая аналогичным образом, получим

$$\frac{d}{dw} \left( \frac{dv^{(1)}(y)}{dy} \right) = -\frac{2a}{hE_1} \tau_2^-(w) e^w - \frac{2a}{hE_2} \tau_2^+(w) e^w + B \delta(w) \quad (-\infty < w < \infty) \quad (7)$$

где

$$B = \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \left( q + \frac{2a}{h} \int_0^\infty \tau_2(w) e^{-w} dw \right)$$

$$\tau_2(w) = \tau^{(2)}(ae^{-w}); \quad \tau_2(w) = \theta(-w)\tau_2(w); \quad \tau_2^+(w) = \theta(w)\tau_2(w)$$

С другой стороны, разрешив уравнения Ламе при условиях

$$\tau_{yx}(x; +0) - \tau_{yx}(x; -0) = 2\tau^{(1)}(x)$$

$$\tau_{xy}(+0; y) - \tau_{xy}(-0; y) = 2\tau^{(2)}(y)$$

и ввиду того, что  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(2)}(y)$  — четные функции, будем иметь [2]

$$\begin{aligned} \frac{du^{(1)}(x, 0)}{dx} = & -\frac{A_0}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\xi - x} + \frac{1}{\xi + x} \right) \tau^{(1)}(\xi) d\xi + \frac{B_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2} \tau^{(2)}(\eta) d\eta + \\ & + \frac{(1 - \nu^2)p}{E_2} - \frac{\nu(1 + \nu)q}{E_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv^{(2)}(0, y)}{dy} = & -\frac{A_0}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\eta - y} + \frac{1}{\eta + y} \right) \tau^{(2)}(\eta) d\eta + \frac{B_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi(\xi^2 - y^2)}{(\xi^2 + y^2)^2} \tau^{(1)}(\xi) d\xi + \\ & + \frac{(1 - \nu^2)q}{E_2} - \frac{\nu(1 + \nu)p}{E_2} \end{aligned}$$

где  $u^{(1)}(x, 0)$  — перемещения плоскости по линии  $y = 0$ ,  $v^{(2)}(0, y)$  — перемещения плоскости по линии  $x = 0$ ,  $A_0 = \frac{(1 + \nu)(3 - 4\nu)}{2(1 - \nu)E_2}$ ,  $B_0 = \frac{1 + \nu}{E_2(1 - \nu)}$

$\nu$  — коэффициент Пуассона материала плоскости.

Отметим, что искомые  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(2)}(y)$  ищутся в классе функций

$$\tau^{(1)}(x) \sim A_1 x^{-1-\delta}; \quad \tau^{(2)}(y) \sim B_1 y^{-1-\delta} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$$

$$\tau^{(1)}(x) \sim A_2 x^\beta; \quad \tau^{(2)}(y) \sim B_2 y^\beta \quad \text{при } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$$

где  $\delta > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Далее, после замены  $\xi = ae^u$ ,  $\eta = ae^u$ ,  $x = ae^{-u}$ ,  $y = ae^u$  для

$$\frac{d}{d\nu} \left( \frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} \right); \quad \frac{d}{dw} \left( \frac{dv^{(2)}(0, y)}{dy} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\nu} \left( \frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} \right) = \\ = \frac{d}{d\nu} \left[ -\frac{A_0}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{v-u}} + \frac{1}{1 + e^{v-u}} \right) \tau_1(u) du + \frac{B_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{2(v-u)}}{(1 + e^{2(v-u)})^2} \tau_2(u) du \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dw} \left( \frac{dv^{(2)}(0, y)}{dy} \right) = \frac{d}{dw} \left[ -\frac{A_0}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{v-u}} + \frac{1}{1 + e^{v-u}} \right) \tau_2(u) du + \right.$$

$$+ \frac{B_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{2(\alpha - u)}}{(1 + e^{2(\alpha - u)})^2} \tau_1(u) du \quad (9)$$

где  $\tau_1(u) = \tau^{(1)}(ae^u)$ ,  $\tau_2(u) = \tau^{(2)}(ae^u)$ .

Теперь, применив комплексное преобразование Фурье к (6)–(9), получим

$$\begin{aligned} F \left[ \frac{d}{dv} \left( \frac{du^{(1)}(x)}{dx} \right) \right] &= -\frac{2a}{hE_1} \tau_1(\alpha - i) - \frac{2a}{hE_1} \bar{\tau}_1(\alpha - i) + A \\ F \left[ \frac{d}{dw} \left( \frac{dv^{(1)}(y)}{dy} \right) \right] &= -\frac{2a}{hE_2} \tau_2(\alpha - i) - \frac{2a}{hE_2} \bar{\tau}_2(\alpha - i) + B \end{aligned} \quad (10)$$

( $-\delta < \operatorname{Im} \alpha < 1 + \beta$ )

$$\begin{aligned} F \left[ \frac{d}{dv} \left( \frac{du^{(2)}(x)}{dx} \right) \right] &= A \alpha \operatorname{cth} \frac{\pi \alpha}{2} \bar{\tau}_1(\alpha) + \frac{B_0 i \alpha (\alpha + i)}{2 \operatorname{sh}(\pi \alpha / 2)} \tau_1(\alpha) \\ F \left[ \frac{d}{dw} \left( \frac{dv^{(2)}(y)}{dy} \right) \right] &= A \alpha \operatorname{cth} \frac{\pi \alpha}{2} \tau_2(\alpha) + \frac{B_0 i \alpha (\alpha + i)}{2 \operatorname{sh}(\pi \alpha / 2)} \bar{\tau}_2(\alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

( $-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0$ )

где

$$F[T(x)] = \bar{T}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x) e^{-\alpha x} dx; \quad \alpha = \sigma + it \quad (-\infty < \sigma < \infty)$$

Выше имелось в виду, что  $\tau_1(\alpha)$  регулярна при  $\operatorname{Im} \alpha < \beta$ ,  $\bar{\tau}_1(\alpha)$  регулярна при  $\operatorname{Im} \alpha > -1 - \delta$ ,  $\tau_2(\alpha - i)$  регулярна при  $\operatorname{Im} \alpha < 1 + \beta$ ,  $\bar{\tau}_2(\alpha - i)$  регулярна при  $-\delta < \operatorname{Im} \alpha$ ,  $\tau_1(\alpha)$  регулярна при  $-1 - \delta < \operatorname{Im} \alpha < \beta$ ,  $\bar{\tau}_2(\alpha - i)$  регулярна при  $-\delta < \operatorname{Im} \alpha < 1 + \beta$  ( $k = 1, 2$ ).

$$\frac{1}{\pi} F \left[ \frac{1}{1 - e^x} \right] = -i \operatorname{cth} \pi \alpha \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

$$\frac{1}{\pi} F \left[ \frac{1}{1 + e^x} \right] = -\frac{i}{\operatorname{sh} \pi \alpha} \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

$$\frac{1}{\pi} F \left[ \frac{1 - e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} \right] = \frac{\alpha + i}{2 \operatorname{sh}(\pi \alpha / 2)} \quad (-2 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

Далее, имея в виду условия контакта

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} \quad (0 < x < \infty)$$

$$\frac{dv^{(0)}(y)}{dy} = \frac{dv^{(1)}(0, y)}{dy} \quad (0 < y < \infty)$$

из (10) и (11) получим функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} \bar{\tau}_1(\alpha) + \frac{i\alpha(\alpha+i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)} A_1 \bar{\tau}_2(\alpha) + \lambda_1 \bar{\tau}_1(\alpha-i) + \lambda_2 \bar{\tau}_1(\alpha-i) = \\ = (\lambda_2 - \lambda_1)(p+X) \frac{h}{2a} \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} \bar{\tau}_2(\alpha) + \frac{i\alpha(\alpha+i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)} A_1 \bar{\tau}_1(\alpha) - \lambda_1 \bar{\tau}_2(\alpha-i) + \lambda_2 \bar{\tau}_2(\alpha-i) = \\ = (\lambda_2 - \lambda_1)(q+Y) \frac{h}{2a} \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0) \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\delta$  фиксировалось в области  $\delta \geq 1$ , где

$$A_1 = \frac{B}{2A_0} = \frac{1}{3-4\nu}; \quad \lambda_1 = \frac{2a}{hE_1A_0}; \quad \lambda_2 = \frac{2a}{hE_2A_0} \quad (14)$$

$$X = \frac{2a}{h} \bar{\tau}_1(-i); \quad Y = \frac{2a}{h} \bar{\tau}_2(-i).$$

Теперь заметим, что (12) и (13) можно представить в виде

$$\bar{K}_1(\alpha) \bar{\varphi}(\alpha) + \lambda_2 \bar{\varphi}(\alpha-i) = (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\varphi}(\alpha-i) + (\lambda_2 - \lambda_1) d_1 \quad (15)$$

$$\bar{K}_2(\alpha) \bar{\psi}(\alpha) + \lambda_2 \bar{\psi}(\alpha-i) = (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\psi}(\alpha-i) + (\lambda_2 - \lambda_1) d_2 \quad (16)$$

где

$$\bar{K}_1(\alpha) = \frac{\alpha(\operatorname{ch}(\pi\alpha/2) + i(\alpha+i)A_1)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}; \quad \bar{K}_2(\alpha) = \frac{\alpha(\operatorname{ch}(\pi\alpha/2) - i(\alpha+i)A_1)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)} \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

$$d_1 = h(X+Y+p+q)/2a; \quad d_2 = h(X-Y+p-q)/2a$$

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \bar{\tau}_1(\alpha) + \bar{\tau}_2(\alpha); \quad \bar{\psi}(\alpha) = \bar{\tau}_1(\alpha) - \bar{\tau}_2(\alpha)$$

$$\bar{\varphi}^-(\alpha-i) = \bar{\tau}_1^-(\alpha-i) + \bar{\tau}_2^-(\alpha-i); \quad \bar{\psi}^-(\alpha-i) = \bar{\tau}_1^-(\alpha-i) - \bar{\tau}_2^-(\alpha-i)$$

В случае  $p=q$

$$\bar{\varphi}(\alpha) = 2\bar{\tau}_1(\alpha); \quad \bar{\psi}(\alpha) = 0.$$

Итак, задача свелась к решению функциональных уравнений (15) и (16), поскольку

$$\bar{\tau}_1(\alpha) = \frac{\bar{\varphi}(\alpha) + \bar{\psi}(\alpha)}{2}; \quad \bar{\tau}_2(\alpha) = \frac{\bar{\varphi}(\alpha) - \bar{\psi}(\alpha)}{2}.$$

До того, как перейти к решению функциональных уравнений (15), (16), определим значения постоянных  $\delta$  и  $\beta$ , т.е. определим поведение функций  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(2)}(y)$  в окрестности точек нуля и бесконечности. Для этого рассмотрим уравнение (15). Поскольку  $\bar{\varphi}(-i)$  конечное число [14], а  $\bar{K}_1(-i) = 0$ , то из (15) следует, что  $\bar{\varphi}(-2i)$  — конечное число. Далее, поскольку  $\bar{\varphi}(-2i)$  — конечное число, то из (15) следует, что  $\alpha = -3i$  является первым простым полюсом аналитического продолжения



функции  $\bar{\Phi}(\alpha)$  при  $\text{Im} \alpha < 0$ . Аналогичным образом можно показать, что для аналитического продолжения функции  $\bar{\Psi}(\alpha)$  первым полюсом при  $\text{Im} \alpha < 0$  является опять точка  $\alpha = -3i$ . Из сказанного следует, что  $\delta = 2$ , т.е.  $\tau^{(1)}(x) \sim A_1 x^{-3}$ ,  $\tau^{(1)}(y) \sim A_2 y^{-3}$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ . Теперь приступим к определению поведения функции  $\tau^{(1)}(x)$ ,  $\tau^{(2)}(y)$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$  соответственно. Для этого опять рассмотрим уравнение (15). Пусть  $\beta$  такова, что первый положительный корень  $K_1(\alpha)$  попадает в область регулярности  $-2 < \text{Im} \alpha_1 < 1 + \beta$  функции  $\bar{\Phi}(\alpha - i)$ . В таком случае, как нетрудно видеть,  $\alpha = \alpha_1$  может быть первым простым полюсом аналитического продолжения функции  $\bar{\Phi}(\alpha)$ , при  $\text{Im} \alpha > 0$ . Отсюда можно заключить, что  $\beta = \text{Im} \alpha_1$ , так как  $\bar{\Phi}(\alpha) = 2\bar{\tau}_1(\alpha) = 2\bar{\tau}_2(\alpha)$  при  $p = q$ , а показатель  $\beta$  не зависит от нагрузки. Итак, при  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$  имеем

$$\tau^{(1)}(x) \sim A_2 x^\omega, \quad \tau^{(2)}(y) \sim B_2 y^\omega, \quad \text{Im} \alpha_1 = \omega.$$

Теперь перейдем сначала к решению уравнения (15). Полагая правую часть уравнения (15) известной, разрешим функциональные уравнения (15) относительно  $\bar{\Phi}(\alpha)$ . Для этого  $\bar{\Phi}(\alpha)$  ищем в виде [2]

$$\bar{\Phi}(\alpha) = \frac{\Gamma(i\alpha)}{\text{ch}(\pi\alpha/2)} \bar{T}_1(\alpha) \quad (-1 < \text{Im} \alpha < 0) \quad (17)$$

где  $\bar{T}_1(-i) = 0$ ,  $\Gamma(z)$  — известная гамма-функция.

Подставив  $\bar{\Phi}(\alpha)$  в уравнение (15), для  $\bar{T}_1(\alpha)$  получим функциональное уравнение

$$\bar{B}_1(\alpha) \bar{T}_1(\alpha) - \lambda_2 \bar{T}_1(\alpha - i) = \frac{\text{sh} \pi\alpha}{\Gamma(1 - i\alpha)} \bar{f}_1(\alpha) \quad (-1 < \text{Im} \alpha < 0) \quad (18)$$

при условии

$$\bar{T}_1(-i) = 0$$

Здесь

$$\bar{B}_1(\alpha) = \frac{\text{ch}(\pi\alpha/2) + i(\alpha + i)A_1}{\text{ch}(\pi\alpha/2)}, \quad \bar{f}_1(\alpha) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\bar{\Phi}(\alpha - i) + d_1)$$

Теперь функциональное уравнение (18) решим методом, изложенным в [1]. Поэтому, необходимо  $\bar{B}_1(\alpha)$  представить в виде [1]

$$\bar{B}_1(\alpha) = \frac{Y_1(\alpha)}{Y_1(\alpha - i)}, \quad (-1 < \text{Im} \alpha < 0) \quad (19)$$

где

$$Y_1(\alpha) = \exp \left[ -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{cth} \pi(\alpha - s) + \text{cth} \pi s) \ln B_1(s) ds \right]$$

$$Y_1(-i) = 1 \quad (-1 < \text{Im} \alpha < i < 0)$$

Примеч. при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  ( $-1 < \text{Im} \alpha < 0$ )  $Y_1(\alpha)$  принимает конечное значение.

Заметим, что согласно формуле Стирлинга

$\Gamma(\alpha) \sim e^{-\alpha} \alpha^{z-1/2} \sqrt{2\pi} [1 + (1/2\alpha) + \dots]$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \alpha| < \pi$ , можно получить оценку

$$\left| \frac{\text{sh}(\pi\alpha/2)}{\Gamma(1+i\alpha)} \right| = \frac{e^{\pi\sigma}}{2\sqrt{2\pi}|\sigma|^{1/2-t}} \quad \text{при } |\sigma| \rightarrow \infty, t = \text{Im} \alpha$$

Это говорит о том, что к (18) нет смысла применить обратное преобразование Фурье. Поэтому, разделив обе части равенства на  $\text{sh}\pi\alpha$  и используя (19), будем иметь

$$\frac{Y_1(\alpha)\bar{T}_1(\alpha)}{\text{sh}\pi\alpha} + \lambda_2 \frac{Y_1(\alpha-i)\bar{T}_1(\alpha-i)}{\text{sh}\pi(\alpha-i)} = \frac{f_1(\alpha)Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\text{ch}(\pi\alpha/2)} \quad (20)$$

Применим к (20) обратное преобразование Фурье и потребуем, чтобы

$$\frac{Y_1(\alpha)\bar{T}_1(\alpha)}{\text{sh}\pi\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{в полюсе } -2 < \text{Im} \alpha < 0, \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty$$

$$F^{-1} \left[ \frac{Y_1(\alpha)\bar{T}_1(\alpha)}{\text{sh}\pi\alpha} \right] = \frac{1}{1+\lambda_2 e^\alpha} F^{-1} \left[ \frac{Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\text{ch}(\pi\alpha/2)} f_1(\alpha) \right] \quad (21)$$

Применим к (21) преобразование Фурье, получим

$$\frac{Y_1(\alpha)\bar{T}_1(\alpha)}{\text{sh}\pi\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell(u)e^{i\alpha u}}{1+\lambda_2 e^u} du \quad -1 < \text{Im} \alpha < 0 \quad (22)$$

где

$$\ell(u) = F^{-1} \left[ \frac{Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\text{ch}(\pi\alpha/2)} f_1(\alpha) \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ell_1(u-w) f_1(w) dw \quad (23)$$

$$\ell_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_1(\alpha-i)}{\Gamma(1+i\alpha)\text{ch}(\pi\alpha/2)} e^{-i\alpha u} d\alpha \quad (-1 < u < 0)$$

Определив из (22)  $\bar{T}_1(\alpha)$  и подставив в (17), для  $\bar{\varphi}(\alpha)$  будем иметь

$$\bar{\varphi}(\alpha) = \frac{i\Gamma(i\alpha)\text{sh} \frac{\pi\alpha}{2}}{Y_1(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell(u)e^{i\alpha u}}{1+\lambda_2 e^u} du \quad -1 < \text{Im} \alpha < 0$$

Теперь применим к  $\bar{\varphi}(\alpha)$  обратное преобразование Фурье и используя теорему о свертке, получим

$$\varphi(v) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_2(v-u)\ell(u)}{1+\lambda_2 e^u} du$$

где

$$\ell_2(v-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\Gamma(i\alpha)\text{sh}(\pi\alpha/2)}{Y_1(\alpha)} e^{-i\alpha(v-u)} d\alpha \quad (-1 < u < 0)$$

Если теперь иметь в виду (23)

$$\ell(u) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ell_1(u-w)\varphi_1(w)e^{-w} dw + (\lambda_2 - \lambda_1)d_1\ell_1(u)$$



получим

$$\begin{aligned}\varphi(v) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-\infty}^0 e^v \varphi(w) dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u-w)}{1+\lambda_2 e^u} du + \\ + (\lambda_2 - \lambda_1) d_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u)}{1+\lambda_2 e^u} du\end{aligned}$$

Таким образом, получили равенства

$$\varphi(v) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-\infty}^0 K_1(v, u) e^u \varphi(u) du + (\lambda_2 - \lambda_1) d_1 \varphi_0(v) \quad (-\infty < v < \infty)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_0(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u)}{1+\lambda_2 e^u} du \\ K_1(v, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u-w)}{1+\lambda_2 e^u} du\end{aligned}$$

Переходя к переменным  $x = e^v$ ,  $s = e^w$ ,  $y = e^{-u}$ , получим

$$\varphi(ax) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^1 K_1(x, s) \varphi(as) ds + (\lambda_2 - \lambda_1) d_1 K_1(x, 1) \quad 0 < x < \infty \quad (24)$$

где

$$K_1(x, s) = \int_0^{\infty} \frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln ys)}{\lambda_2 + y} dy \quad (25)$$

Теперь, потребовав в (24), чтобы  $0 < x < 1$ , для определения искомого  $\varphi(ax)$  получим Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(ax) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^1 K_1(x, s) \varphi(as) ds + (\lambda_2 - \lambda_1) d_1 K_1(x, 1) \quad (26)$$

Отметим, что неизвестные постоянные  $X$ ,  $Y$  определяются из (14)

После определения  $\tau(ax)$  при  $0 < x < 1$  ее значения при  $x > 1$  определяются из (24). Отметим также, что  $K_1(x, 1)$  является решением задачи для бесконечного крестообразного включения, когда в точках  $x = \pm a$ ,  $y = \pm a$  приложена сила с единичной интенсивностью [2]

Исследуем свойства ядра  $K_1(x, s)$ . Для этого запишем его в виде

$$K_1(x, s) = \int_0^{\infty} \frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y} dy - \lambda_2 \int_0^{\infty} \frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y(\lambda_2 + y)} dy$$

Далее, в силу теоремы о свертке, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th}(\pi\sigma/2)}{\sigma} \left(\frac{x}{s}\right)^{-i\sigma} d\sigma + R_1(x, s)$$

где

$$R_1(x, s) = \frac{A_1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sigma + i}{\sigma} \right) \frac{\operatorname{th}(\pi\sigma/2)}{\operatorname{ch}(\pi\sigma/2) + i(\sigma + i)A_1} \left( \frac{x}{s} \right)^{-i\sigma} d\sigma$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ell_1(\ln xy) \ell_1(-\ln sy)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x-s}{x+s} \right| + R_1(x, s)$$

где  $R_1(x, s)$ , в силу абсолютной интегрируемости подынтегрального выражения при  $(x/s)^{-i\sigma}$ , равняется нулю при  $x=0$  и  $s=0$ , а при  $x=s$  принимает конечное значение. Теперь, если учесть, что

$$\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x+s}{x-s} \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy) \sin(sy)}{y} dy$$

то  $K_1(x, s)$  можно записать в виде

$$K_1(x, s) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x+s}{x-s} \right| - \frac{2\lambda_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy) \sin(sy)}{y(\lambda_2 + y)} dy + \int_0^{\infty} \frac{A(x, s, y)}{\lambda_2 + y} dy \quad (27)$$

где

$$A(x, s, y) = \ell_1(xy) \ell_1(sy) - \sin(xy) \sin(sy) \\ \int_0^{\infty} \frac{A(x, s, y)}{y} dy = R_1(x, s)$$

Из представления (27) следует, что  $K_1(x, s)$  при  $x=s$  имеет логарифмическую особенность, а в остальном — непрерывная функция. Отсюда следует, что  $K_1(x, s)$  при  $x=1$  имеет логарифмическую особенность, а из (26) следует, что искомые  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(1)}(y)$  при  $x=a$  и  $y=a$  имеют логарифмическую особенность. Из вышеуказанного следует, что интегральное уравнение (26) можно решать методом последовательных приближений в  $L_1(0,1)$  при

$$|\lambda_2 - \lambda_1| \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K_1(x, s)| dx < 1$$

В случае одного конечного включения ( $Y_1(\alpha) \equiv 1$ )

$$K_1(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy) \sin(sx)}{\lambda_2 + y} dy$$

поскольку в силу того, что [3]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+i\alpha) \operatorname{ch}(\pi\alpha/2)} (sy)^{-\alpha} d\alpha = \frac{2}{\pi} \sin(sy), \quad -1 < t < 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\Gamma(i\alpha) \operatorname{sh}(\pi\alpha/2) (xy)^{-i\alpha} d\alpha = \sin(xy), \quad -1 < t < 0$$

$$A(x, s, y) = 0$$

Аналогичным образом получается решение функционального уравнения (16).

Следует отметить, что  $\tau^{(1)}(x) \equiv 0$ ,  $\tau^{(2)}(y) \equiv 0$  при  $\lambda_1 = \lambda_2$ , которое соответствует решению задачи без включения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, входящего на границу полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, Ест. н. 1981 №3.
- 2 Григорян Э.Х., Торосян Д.Р. Задача для упругой бесконечной пластины, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. // Изв. НАН РА. Механика 1994 Т. 47 №1-2. С. 3-13.
- 3 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1984. 799с.

Ереванский  
госуниверситет

Поступила в редакцию  
22.05.2001