

УДК 539.5

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТНООБРАЗНОГО РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Шекоян А.В.

Մ.Վ. Շեկոյան

Դիֆուզիայի ազդեցությունը ինգերայի առաիծանի ևվարդիոն հավատորման ալիտոնանման լուծման կայունության վրա

Որոմնասիրիան 1 ալիտոնանման լուծման երկայնական կայունությունը հույս 1 տրիան, որ կրնոնր թերոմ 1 ալի լուծման երկայնական անկայունություն

A.V. Shekoyan

Influence of Dissipation on Stability of Soliton like Solution of Fifth Order Evolutionary Equation

Изучена продольная устойчивость солитонобразных решений эволюционного уравнения пятого порядка. Показано, что диссипация приводит к продольной неустойчивости решений.

Для описания нелинейных волн в различных средах часто пользуются нелинейными эволюционными уравнениями, как, например, для ионозвуковых волн в плазме [1], для акустической среды [2], для вязкой среды с полостями [3], для магнитных жидкостей [4].

Исследуемое эволюционное уравнение имеет вид [3]

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x \partial \tau^4} + \frac{1}{2} \Delta^2 u = p \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + D \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - E \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + N \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

где x — координата, вдоль которой распространяется волна, Δ^2 — оператор Лапласа по координатам y и z ; u — есть компонента скорости частиц среды по нормали к поверхности волны, L , p , E , D и N — соответственно дифракционный, нелинейный, дисперсионный и диссипативные коэффициенты, не зависящие от координат и τ , $\tau = xc_n^{-1} - t$ (c_n — линейная нормальная скорость волны).

В статьях [3, 5] найдено солитонобразное решение уравнения (1). В работах [1-6] указан метод изучения поперечной устойчивости солитонобразных решений.

В статье [7] изучена поперечная устойчивость солитонобразных решений уравнения (1) и влияние на нее диссипативных членов. Показано, что диссипация не влияет на устойчивость.

Целью данной работы является изучение влияния диссипации на продольную устойчивость солитонобразных решений уравнения (1).

Введем обозначения

$$v = pu (6E)^{-1}, \quad x = E^{-1}t, \quad T = \beta t, \quad DE^{-1} = \beta k, \quad NE^{-1} = \beta \zeta \quad (2)$$

где β — малый постоянный параметр, характеризующий отклонение решения эволюционного уравнения от недиссипативного решения соответствующего уравнения.

С учетом обозначения (2) уравнение (1) примет вид

$$-m \frac{\partial v}{\partial \theta} + 6v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} = -\beta \frac{\partial v}{\partial T} + \beta \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \zeta \beta \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} \quad (3)$$

где: $\theta = \tau + by + dz - \int \omega dt$, $m = \omega \cdot L(2E)^{-1} (b^2 + d^2)$, b и d — постоянные, определяющие наклон плоскости $\theta = \text{const}$ солитона к плоскости волны $\tau = \text{const}$, $\omega = \omega(T)$ связана со скоростью V_c солитона следующим соотношением:

$$V_c^2 = (1 + \omega)^2 (c_n^{-1} + b^2 + d^2)$$

Решение уравнения (3) будем искать в следующем виде:

$$v = v_0 + \beta v_1 + \beta^2 v_2 + \dots \quad (4)$$

где v_0 есть решение уравнения (3), когда $\beta = 0$. Это решение имеет вид

$$v_0 = 2\eta^2 \text{sech}^2 \eta \theta_1, \quad \theta_1 = \theta - \theta_0(T) \quad (5)$$

где θ_0 — некоторая добавочная фаза, подлежащая определению и характеризует диссипацию, $2\eta^2$ является амплитудой солитона, которая по обозначению равна $2\eta^2 = m/2$.

Следует отметить, что решение (5) имеет смысл при выборе постоянных и заданий b, d таких, чтобы было $\eta^2 > 0$.

Подставляя (4) в (3) и приравнявая члены порядка β, β^2 , получим систему уравнений

$$L_1(v_n) = F_n, \quad (n=1, 2) \quad (6)$$

где

$$L_1(v_n) = -4\eta^2 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + 6 \frac{\partial}{\partial \theta} (v_0 v_n) + \frac{\partial^3 v_n}{\partial \theta^3} \quad (7)$$

$$F_1 = \frac{\partial \theta_0}{\partial T} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} \left(2v_0 + \theta_1 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \kappa \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \zeta \frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4} \quad (8)$$

$$F_2 = -6v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial v_1}{\partial T} + \kappa \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \zeta \frac{\partial^4 v_1}{\partial \theta^4} \quad (9)$$

Величины F_1 и F_2 должны удовлетворять условиям [5]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0 F_1 d\theta = 0 \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0 F_2 d\theta = 0 \quad (11)$$

Условия (10) и (11) есть следствия требования, чтобы в бесконечности v_0 было ограничено.

Используя (10), (8), можно получить уравнение изменения в течение времени амплитуды солитона. Это уравнение имеет вид:

$$-\frac{3}{2}\eta + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{4}{5}\kappa\eta^2 + \frac{16}{7}\zeta\eta^2 = 0 \quad (12)$$

Для качественной оценки решим уравнение (12) при $\zeta = 0$, т.е. предполагается, что есть только вязкостная диссипация, что осуществляется для широкого класса сред. Это решение имеет вид

$$\eta(T) = \eta(0) \left[1 + \frac{16}{15} \kappa T \eta^2(0) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Из (13) видно, что амплитуда слабо затухает с течением времени, так как хотя κ конечна в силу (2), но T — медленное время, пропорциональное β .

Используя условие (11), после несложных, но длинных расчетов с учетом (13), для θ_0 получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \theta_0}{dT^2} + (1 + qT)^{-1} \left(n \frac{d\theta_0}{dT} - p_1 \right) = 0 \quad (14)$$

где q , n и p_1 — постоянные, не зависящие от T . Они не влияют на устойчивость, важно, что по определению $n \neq 0$.

Решение уравнения (14) имеет вид

$$\theta_0 = \frac{P_1}{n} T + (c_1 q)^{-1} (1 - nq^{-1})^{-1} (1 + qT)^{-1/n} + c_2$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Из последнего выражения видно, что при $T \rightarrow \infty$, $\theta_0 \rightarrow \infty$, т.е. солитонобразное решение неустойчиво в том смысле, как это определено в [6,7], а именно, из-за бесконечного роста фазы солитона существенно меняется колоколообразная форма солитона.

Таким образом, диссипация приводит к продольной неустойчивости солитонобразного решения.

Интересно рассмотреть также случаи, когда $\theta_0 = \theta_0(T, x_1)$, т.е. возмущение меняется не только во времени, но и в пространстве. Будем ограничиваться случаем, когда диссипация слабая, т.е. в соотношениях (2) вместо последних двух соотношений будут следующие порядки:

$$DE^{-1} = \beta^2 \kappa, \quad NE^{-1} = \beta^2 \zeta, \quad x_1 = \beta^2 x$$

Тогда вместо уравнения (3) будет

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(-\omega \frac{\partial v}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial v}{\partial T} + 6v \frac{\partial v}{\partial \theta} + 6\beta^2 v \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + 3\beta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^2 \partial x_1} \right) = \\ & = L(2E)^{-1} (b^2 + d^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \beta^2 \kappa \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \beta^2 \zeta \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \end{aligned} \quad (15)$$

Поступая, как и выше можно получить уравнение (6), где сохраняются выражения (7) и (8), а для F_2 получится следующее

выражение:
$$F_2 = \kappa \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^2} + \zeta \frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4} - \frac{\partial v_1}{\partial T} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta} - 6v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - (\omega - 12v_0) \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_1} + 4 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_1} \quad (16)$$

Для рассматриваемых порядков диссипации можно принять $\eta = \text{const}$ [6,7,]. Учитывая также решение уравнения (6) при $n=1$, которое имеет вид

$$v_1 = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \theta_0}{\partial T} \left(2v_0 + \theta_1 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right)$$

оставшая в F_2 четные слагаемые по θ_1 из условия (11) можно получить для θ_0 следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T^2} + \Lambda = 0 \quad (17)$$

где Λ – постоянная, не зависящая от T и x .

Из уравнения (17) сразу следует, что солитонобразное решение продольно неустойчиво в диссипативной среде.

Заключение. В данной работе показано, что в отличие от поперечного возмущения солитонобразного решения, когда диссипация не влияла на устойчивость [7], при продольных возмущениях солитонобразное решение становится неустойчивым под влиянием диссипации (вязкостной, полостной, пузырьковой и т.д.), как во времени, так и в пространстве.

Автор благодарит члена-корреспондента НАН Армении, проф. А.Г. Багдоева за помощь в работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах // ДАН СССР. 1970. Т.192, №4. С.753-756.
2. Наугольных К.А., Островский А.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 234 с.
3. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акустический ж. 1999. Т.45. №2. С.149-156.
4. Багдоев А.Г., Петросян А.Г. Распространение в микрополярной электропроводящей жидкости // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1983. Т.36. №5. С.3-16.
5. Шекоян А. В. Приближенное трехмерное солитонное решение при наличии дисперсии и диссипации // Изв. НАН Армении. Физика. 1998. Т. 33. №4. С.187-190.
6. Абловитц М., Сигур Х. Солитоны и методы обратной задачи. М.: Мир. 1987. 480 с.
7. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Поперечная устойчивость солитонов и полимодуляции с учетом диссипации // Изв. НАН Армении. Физика. 2000. Т.35. №2. С.85-89.