

16

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, -\beta) = 0, \quad D_0^{(1)}(r, -\beta) = 0, \quad \Phi^{(1)}(a, \theta) = \varphi f_1^{(1)}(\theta)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, \alpha) = 0, \quad D_0^{(2)}(r, \alpha) = 0, \quad u_z^{(1)}(a, \theta) = u f_2^{(1)}(\theta) \quad (2)$$

где $\tau_{\theta z}(r, \theta)$ — компонент тензора механических напряжений, $D_0(r, \theta)$ — компонент вектора электрического смещения, φ и u — постоянные, имеющие размерность электрического поля и перемещения, соответственно, $f_1^{(1)}(\theta)$, $f_2^{(1)}(\theta)$ — заданные функции.

Условия на линии раздела смежных областей будут

$$\Phi^{(1)}(r, 0) = 0, \quad u_z^{(1)}(r, 0) = u_z^{(2)}(r, 0), \quad \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) \quad (3)$$

После упрощений некоторые из условий (2) и (3) примут вид:

$$\begin{aligned} \partial u_z^{(1)}(r, -\beta) / \partial \theta &= 0, & \partial \Phi^{(1)}(r, -\beta) / \partial \theta &= 0 \\ \partial u_z^{(2)}(r, \alpha) / \partial \theta &= 0, & \partial \Phi^{(2)}(r, \alpha) / \partial \theta &= 0 \\ c_{44}^{(1)} \partial u_z^{(1)}(r, 0) / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi^{(1)}(r, 0) / \partial \theta &= \\ &= c_{44}^{(2)} \partial u_z^{(2)}(r, 0) / \partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi^{(2)}(r, 0) / \partial \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $c_{44}^{(i)}$, $e_{15}^{(i)}$ — модуль упругости и пьезомодуль, соответственно.

Из (1)–(4) видно, что электростатический потенциал определяется отдельно, без определения $u_z^{(i)}$. Функции $\Phi^{(i)}$ имеют вид

$$\Phi^{(1)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{r}{a} \right)^{\alpha_k} \sin \alpha_k \theta, \quad \Phi^{(2)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{r}{a} \right)^{\beta_k} \sin \beta_k \theta \quad (5)$$

где

$$B_k = \frac{2\varphi}{\beta} \int_0^\beta f_1^{(1)}(\theta) \sin \alpha_k \theta d\theta, \quad C_k = \frac{2\varphi}{\alpha} \int_0^\alpha f_1^{(2)}(\theta) \sin \beta_k \theta d\theta$$

$$\alpha_k = (2k-1)\pi/2\beta, \quad \beta_k = (2k-1)\pi/2\alpha$$

Перейдём к определению перемещения $u_z(r, \theta)$.

Введём функции $\Psi_k(\theta)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) [3, 9, 10]

а) При $\sin \lambda_k \alpha \neq 0$ (или $\sin \lambda_k \beta \neq 0$)

$$\Psi_k(\theta) = \begin{cases} \mu \cos \lambda_k (\beta + \theta) \sin \lambda_k \alpha & (-\beta \leq \theta \leq 0) \\ -\cos \lambda_k (\alpha - \theta) \sin \lambda_k \beta & (0 \leq \theta \leq \alpha) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

б) При $\cos \lambda_k \alpha \neq 0$ (или же $\cos \lambda_k \beta \neq 0$)

$$\Psi_k(\theta) = \begin{cases} \cos \lambda_k (\beta + \theta) \cos \lambda_k \alpha & (-\beta \leq \theta \leq 0) \\ \cos \lambda_k (\alpha - \theta) \cos \lambda_k \beta & (0 \leq \theta \leq \alpha) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

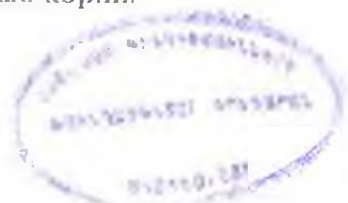
где λ_k ($k = 1, 2, \dots$) — положительные корни уравнения [8]

$$\mu \sin \lambda \alpha \cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha \sin \lambda \beta = 0, \quad \mu = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)} \quad (6)$$

пронумерованные в порядке возрастания.

Уравнение (6) имеет только действительные корни.

В обоих случаях $\Psi_0(\theta) = 1$, а $\lambda_0 = 0$.



Нетрудно проверить, что совокупность функций $\{\Psi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ образует полную в $L_2(-\beta, \alpha)$ и ортогональную с весом $\rho(\theta)$ систему, где

$$\rho(\theta) = \begin{cases} 1 & (-\beta \leq \theta < 0) \\ \mu & (0 < \theta \leq \alpha) \end{cases}$$

то есть

$$\int_{-\beta}^{\alpha} \rho(\theta) \Psi_k(\theta) \Psi_n(\theta) d\theta = \delta_{kn} \omega_k \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

где δ_{kn} — символ Кронекера.

Введём обозначения

$$f_2(\theta) = \begin{cases} f_2^{(1)}(\theta) \\ f_2^{(2)}(\theta) \end{cases} \quad \Phi^*(r, \theta) = \begin{cases} e_{15}^{(1)} \Phi^{(1)}(r, \theta) / c_{44}^{(1)} \\ e_{15}^{(2)} \Phi^{(2)}(r, \theta) / c_{44}^{(2)} \end{cases}$$

и представим функцию $u_z(r, \theta)$ в виде

$$u_z(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k} \Psi_k(\theta) - \Phi^*(r, \theta) \quad (-\beta \leq \theta \leq \alpha) \quad (8)$$

Функция $u_z(r, \theta)$ при любых значениях коэффициентов A_k удовлетворяет как граничным условиям на лучах $\theta = -\beta$ и $\theta = \alpha$, так и всем контактным условиям на $\theta = 0$. Удовлетворение граничному условию на дуге окружности ($r = a, -\beta \leq \theta \leq \alpha$) приводит к соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \Psi_k(\theta) - \Phi^*(a, \theta) = u_f'(\theta) \quad (-\beta \leq \theta \leq \alpha) \quad (9)$$

Пользуясь формулой ортогональности (7), из соотношения (9) для коэффициентов A_k получим

$$\omega_k A_k = \int_{-\beta}^{\alpha} [\Phi^*(a, \theta) + u_f'(\theta)] \rho(\theta) \Psi_k(\theta) d\theta \quad (10)$$

В развернутом виде формула (10) представляется в виде

$$\omega_k A_k = \int_{-\beta}^0 [\omega e_{15}^{(1)} f_1^{(1)}(\theta) / c_{44}^{(1)} + u f_2^{(1)}(\theta)] \Psi_k(\theta) d\theta + \\ + \mu \int_0^{\alpha} [\omega e_{15}^{(2)} f_1^{(2)}(\theta) / c_{44}^{(2)} + u f_2^{(2)}(\theta)] \Psi_k(\theta) d\theta$$

$$\omega_0 = \beta + \mu\alpha, \quad \omega_k = \frac{\mu}{2} (\mu\beta \sin^2 \lambda_k \alpha + \alpha \sin^2 \lambda_k \beta) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Согласно (5) и (8), в частности, для $E_{\theta}^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ будем иметь формулы

$$E_0^{(1)}(r, \theta) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \alpha_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_k-1} \cos \alpha_k \theta \quad (11)$$

$$E_0^{(2)}(r, \theta) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \beta_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_k-1} \cos \beta_k \theta$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)}(r, \theta) = -\frac{c_{44}^{(2)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k-1} \sin \lambda_k \alpha \sin \lambda_k (\beta + \theta) \quad (12)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{c_{44}^{(2)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k-1} \sin \lambda_k \beta \sin \lambda_k (\alpha - \theta)$$

Подобные выражения получаются и для $E_r^{(1)}$, $\tau_{\theta z}^{(1)}$.

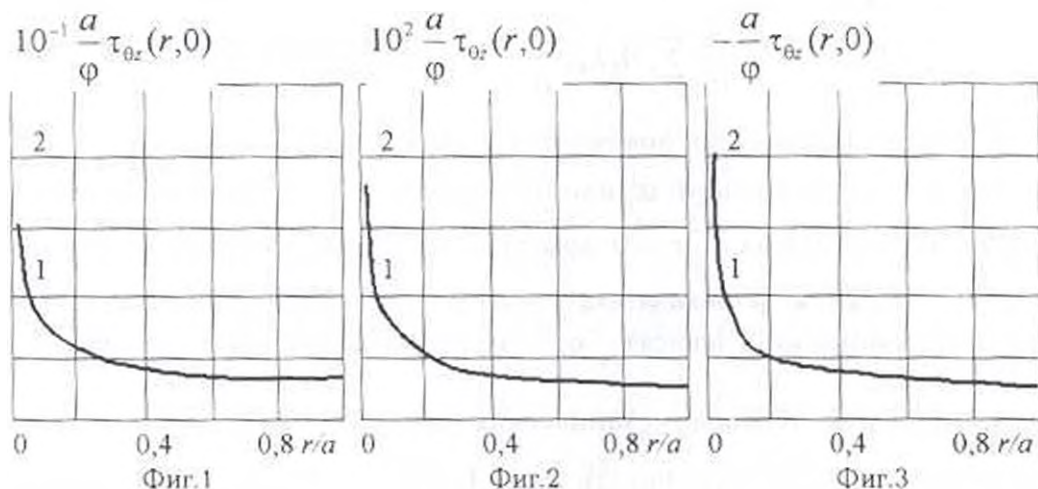
Из (11) ясно, что при α или β больше $\pi/2$, компоненты вектора напряженности в полюсе $r = 0$ обладают особенностью вида $(r/a)^{\alpha-1}$ и $(r/a)^{\beta-1}$. Причем, и показатель степени, и коэффициент особенности (при степени) не зависят от электромеханических постоянных материалов.

Компоненты тензора механических напряжений $\tau_{\theta r}$ и $\tau_{\theta z}$ (12) в полюсе могут иметь особенности вида $(r/a)^{\lambda-1}$. Исследование первого положительного корня λ_1 уравнения (6) проведено в [8,9]. Он, вообще говоря, зависит от значений параметров α , β и μ . Коэффициенты же при особенностях (степеней) зависят от α , β , $c_{44}^{(1)}$ и $e_{15}^{(1)}$.

На фиг. 1, 2 и 3 приведены графики изменения $\tau_{\theta z}(r, 0)$ на линии раздела двух материалов $\theta = 0$. Эти графики построены на основе формул (12), в которых, как первое приближение, взяты только слагаемые с индексом 1. Кривая на фиг.1 соответствует случаю, когда цилиндр составлен из двух пьезоэлектрических материалов. Причем, области $[-\beta; 0]$ соответствует пьезокристалл сульфида кадмия (CdS), для которого $c_{44}^{(1)} = 1,49 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15}^{(1)} = -0,21$ Кл/м², а области $[0; \alpha]$ — пьезокристалл титаната бария ($BaTiO_3$), для которого $c_{44}^{(2)} = 5,43 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15}^{(2)} = 21,3$ Кл/м². Кривые на фиг.2 и 3 соответствуют однородным цилиндрам, которые изготовлены соответственно из CdS и $BaTiO_3$. Во всех случаях было принято $\alpha = \sqrt{3} \cdot \beta$, $\beta = 2$ рад, $f_1^{(1)}(\theta) = 1$, $f_1^{(2)}(\theta) = 0$. При этом, первым положительным корнем уравнения (6) в случае неоднородного цилиндра будет $\lambda_1 \approx 0,6646331$, а в случае однородных цилиндров — $\lambda_1 = \pi/2 (1 + \sqrt{3}) = 0,5749513$.

Из приведенных на фиг. 2 и 3 графиков ясно, что в цилиндре, изготовленном из $BaTiO_3$, напряжение $\tau_{\theta z}$ на линии $\theta = 0$ по модулю в 101,4 раза больше, чем в цилиндре из CdS .

Приведенный на фиг. 1 график показывает, что в неоднородном цилиндре напряжение $\tau_{\theta r}$ на линии $\theta = 0$ по модулю, вообще говоря, больше, чем напряжение в цилиндре, изготовленном из $BaTiO_3$, но при приближении к особой точке $r = 0$ эта разница всё уменьшается. Так, например, в точках $r/a = 1, 0,1; 0,01, 10^{-11}$, напряжение $|\tau_{\theta r}(r, 0)|$ в неоднородном цилиндре больше, чем в однородном соответственно в 12,4; 10,1; 8,2; и 1,28 раза.



Обозначим

$$K(\theta) = \begin{cases} -(A_1 \lambda_1 / a) \sin \lambda_1 \alpha, & \theta \in [-\beta; 0] \\ -(A_1 \lambda_1 / a) \sin \lambda_1 \beta, & \theta \in [0; \alpha] \end{cases}$$

$$K_*(\theta) = \begin{cases} \sin \lambda_1 (\beta + \theta), & \theta \in [-\beta; 0] \\ \sin \lambda_1 (\alpha - \theta), & \theta \in [0; \alpha] \end{cases}$$

где $K(\theta)$ — коэффициент особенности напряжения $\tau_{\theta r}(r, \theta)$.

Наибольшего по модулю значения $K(\theta)K_*(\theta)$ достигает в области $[0; \alpha]$ при $\theta \approx 1,1 \text{ рад.} = 63^\circ$. При этом $ac_{44}^{(2)} KK_*/\phi \approx 4,24 \text{ Кл/м}^2$.

В области $[-\beta; 0]$ своего наибольшего значения $|K(\theta)K_*(\theta)|$ достигает при $\theta = 0$. Тогда $ac_{44}^{(2)} KK_*/\phi \approx 3,155 \text{ Кл/м}^2$.

В случае однородного цилиндра наибольшего по модулю значения $K(\theta)K_*(\theta)$ достигает при $\theta \approx 0,732 \text{ рад.} = 41^\circ 56'$. Причем, когда цилиндр изготовлен из CdS , то

$$\frac{ac_{44}}{|\phi|} \max_{[-\beta; \alpha]} |K(\theta)K_*(\theta)| \approx 0,00274 \text{ Кл/м}^2$$

а когда цилиндр изготовлен из $BaTiO_3$, то

$$\frac{ac_{44}}{|\phi|} \max_{[-\beta; \alpha]} |K(\theta)K_*(\theta)| \approx 0,278 \text{ Кл/м}^2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Галпчян П.В. Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т. 43. № 5. С. 21–25.
2. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Определение особенности связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла при продольном сдвиге // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 102–108.
3. Galpchian P.V. Electroelastic field behavior in the vicinity of the edge of a piezoelectric body // Intern. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics. 1997. V. 8. P. 243–258.
4. Галпчян П.В. Поведение электроупругого поля в окрестности ребра составного двугранного угла, возникающего при продольном сдвиге // Четвёртое международное совещание-семинар. Инженерно-физические проблемы новой техники: Тез. докл. Москва. 1996. С. 134–135.
5. Саргсян А. М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 4. С. 49–56.
6. Саргсян А. М., Хачикян А.С. Об особенностях напряжений в двух задачах электроупругости для кусочно-однородного тела // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 40–45.
7. Фильштинский А.А. Антиплоская деформация составного пьезоэлектрического пространства, ослабленного туннельными трещинами // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 59–68.
8. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1987. 338 с.
9. Галпчян П.В. Граничные задачи антиплоской деформации для цилиндра составленного из различных материалов // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. № 1. С. 22–27.
10. Баблоян А.А., Бегларян А.Г., Шахвердян Г.Н. Внедрение жёсткого штампа с электродом в пьезокерамическую полуплоскость // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С. 3–10.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
02.07.2001