

Օ ЗАДАЧАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И
УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ
(НЕОРТОТРОПНЫХ) ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Григорян Э. Х.

Է.Խ. Գրիգորյան

Անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) սալերի և քաղանքների սեփական տատանումների և կայունության խնդիրների մասին

[1] մենագրությունում դիտարկվում են անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) սալերի և քաղանքների սեփական տատանումների և կայունության խնդիրներ: Այդ խնդիրներում նախատվ է որվում որոշել անիզոտրոպիայի ազդեցությունը սեփական համալսարյունների և կրիտիկական ուժերի արժեքների վրա: Վերը նշված խնդիրներում ω ն (անիզոտրոպ սալերի և քաղանքների սեփական համալսարյունը), P -ն (անիզոտրոպ սալերի և քաղանքների կրիտիկական ուժը) ներկայացվում են

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \omega_1^2 + \mu^2 \omega_2^2 + \dots \quad P = P_0 + \mu P_1 + \mu^2 P_2 + \dots$$

անքաղ, որտեղ ω_0 -ն և P_0 -ն համապատասխանաբար համալսարյուն քառակուսին և կրիտիկական ուժն են օրթոտրոպ սալերի և քաղանքների համար, μ -ն ֆիզիկական փոքր պարամետր է, ω_1, P_1 ($i = 1, 2, \dots$) որոշվում են խնդրի լուծման ընդացրում [1]-ում որոշված են միայն ω_1 -ը և P_1 -ը, օգտագործելով սխալ սյույման, և հետևաբար սխալ են ստացվել ω_2 և P_2 -երը: Ընդա մասեցման դեպքում ω_1 -երը և P_1 -երը ստացվում են հավասար գրայի, որից հետևում է, որ փաստորեն որվում խնդիրը չի լուծվում:

Ներկա աշխատանքում նյութում է, որվում ուղղացուցել վերը նշված պնդումները ինչպես նաև լուծել որված խնդիրները, այսինքն որոշել ω^2 և P հասցրող մոտավորությունները (ω_1 և P_1 որոշելով):

E.Kh. Grigoryan

On the Own Vibrations and Stability Problems for Anisotropic (Nonorthotropic) Plates and Shells

В монографии [1] рассматриваются задачи собственных колебаний и устойчивости для анизотропных (неортоотропных) пластин и оболочек. В этих задачах целью ставится определение эффекта анизотропии на значения собственных частот и на значения критической силы. В указанных выше задачах ω (частота собственных колебаний анизотропных пластин и оболочек), P (критическая сила для анизотропных пластин и оболочек) представляли в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \omega_1^2 + \mu^2 \omega_2^2 + \dots \quad P = P_0 + \mu P_1 + \mu^2 P_2 + \dots$$

где ω_0 и P_0 - соответственно квадрат частоты и критическая сила для ортоотропных пластин и оболочек, μ - физический малый параметр, ω_1, P_1 ($i = 1, 2, \dots$) определяются при решении задач. В [1] определены только ω_1 и P_1 , используя ошибочное условие, и следовательно, ошибочными оказались и ω_2 и P_2 . При правильном подходе ω_1 и P_1 получаются равными нулю, из которого следует, что фактически поставленные задачи не решены.

В настоящей работе целью ставятся доказательства вышеуказанных утверждений, а

также решение поставленных задач, т. е. определение следующих приближений в выражениях Ω^2 и P (определение Ω_2 и P_2). Конкретно будет рассматриваться задача о собственных колебаниях прямоугольной анизотропной (неортоотропной) пластинки. Полученные здесь результаты будут иметь место и в вышеуказанных задачах собственных колебаний и устойчивости, в котором нетрудно убедиться [1].

Определение частот собственных колебаний прямоугольной пластинки с размерами $a \times b$, изготовленной из анизотропного материала (материал пластинки в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельной срединной плоскости пластинки) в [1], при граничных условиях шарнирного опирания, сводится к решению краевой задачи

$$A_1 w + \mu A_2 w - \omega^2 \frac{h\gamma_0}{g} w = 0 \quad (1)$$

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a$$

$$w = 0, \quad M_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b \quad (2)$$

где γ_0, h - соответственно удельный вес и толщина пластинки, g - ускорение свободного падения, ω - частота колебаний, w - прогиб точек пластинки,

$$M_x = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$M_y = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$A_1 = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2k \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad x = \alpha \sqrt[4]{D_{11}}, \quad y = \beta \sqrt[4]{D_{22}}$$

$$A_2 = 4 \left(k_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + k_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} \right), \quad k_2 = \lambda k_1, \quad k_1 = \frac{\sqrt{D_{66}}}{\sqrt[4]{D_{11} D_{22}}}$$

$$\mu = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11} D_{66}}}, \quad \mu' = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{22} D_{66}}}, \quad \mu' = \lambda \mu, \quad k = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}$$

D_{ij} - жесткости анизотропной пластинки.

Далее, считая по-видимому, что w и ω^2 при достаточно малых μ являются аналитическими функциями от μ , представимы в виде степенных рядов

$$\omega^2 = \omega_0 + \mu \omega_1 - \mu^2 \omega_2 + \dots \quad (3)$$

$$w = w_0 + \mu w_1 - \mu^2 w_2 + \dots \quad (4)$$

Подставляя (3), (4) в (1), (2), получены рекуррентные краевые задачи

$$A_1 w_0 - \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0 w_0 = 0 \quad (5)$$

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial \alpha^2} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \alpha = a_1 \quad (6)$$

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial \beta^2} = 0 \quad \text{при } \beta = 0, \beta = b_1$$

$$A_1 w_1 - \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0 w_1 = -A_1 w_0 + \frac{h\gamma_0}{g} \omega_1 w_0 \quad (7)$$

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha^2} = -2k_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \text{при } \alpha = 0, \alpha = a_1 \quad (8)$$

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} = -2k_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \text{при } \beta = 0, \beta = b_1$$

$$A_1 w_2 - \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0 w_2 = -A_2 w_1 + \frac{h\gamma_0}{g} \omega_1 w_1 + \frac{h\gamma_0}{g} \omega_2 w_0 \quad (9)$$

$$w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \alpha^2} = -2k_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \text{при } \alpha = 0, \alpha = a_1 \quad (10)$$

$$w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \beta^2} = -2k_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \text{при } \beta = 0, \beta = b_1$$

и т. д.

Метод приведения краевой задачи (1), (2) к решению группы краевых задач встречается в теории возмущений [2]

В монографии [1] ставится задача определения ω_1 . Для этого отмечается, что

$$w_0 = A_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a_1} \sin \frac{n\pi\beta}{b_1} \quad (11)$$

— решение граничной задачи (5), (6), т. е. является собственной функцией оператора A_1 при однородных граничных условиях, соответствующей собственному значению

$$\lambda_{mn} = \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0(m, n) = \left(\frac{m\pi}{a_1} \right)^2 + 2k \left(\frac{m\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b_1} \right)^2$$

Далее, имея в виду (11), для определения w_1 получено уравнение

$$A_1 w_1 - \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0 w_1 = Q_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha}{a_1} \cos \frac{n\pi\beta}{b_1} + \omega_1 b_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a_1} \sin \frac{n\pi\beta}{b_1} \quad (12)$$

при условии (8). Здесь

$$Q_{mn} = A_{mn} \frac{4\pi^4 mn}{a_1 b_1} \left(\frac{k_1 m^2}{a_1^2} + \frac{k_2 n^2}{b_1^2} \right), \quad b_{mn} = \frac{h\gamma_0}{g} A_{mn}$$

Заметим, что общее решение краевой задачи (12), (8) имеет вид

$$w_1 = C w_0 + v \quad (13)$$

где C — произвольная постоянная, а v является решением краевой задачи (12), (8).

Далее, после определения v (в [1] вместо v используется буква w_1) ω_1 определяется из условия

$$\int_0^{a_1} \int_0^{b_1} v w_0^* d\alpha d\beta = 0 \quad (14)$$

где w_0^* — нормированная собственная функция

$$w_0^* = \frac{2}{\sqrt{a_1 b_1}} \sin \frac{m \pi \alpha}{a_1} \sin \frac{n \pi \beta}{b_1} \quad (15)$$

Ввиду громоздкости выражение ω_1 здесь не приводится. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения (3) в [1], определено приближенное значение искомой ω^2

$$\omega^2 = \omega_0 + \mu \omega_1(m, n)$$

Теперь покажем, что принятый в [1] подход для определения $\omega_1(m, n)$, ошибочный. Действительно, условие (14), во-первых, может и не выполняться, а во-вторых, оно не зависит от ω_1 . Для этого посмотрим, откуда взялось условие (14). В разложении w (4) полагается, что $(w, w_0) = (w_0, w_0)$, т. е.

$$\int_0^{a_1} \int_0^{b_1} w w_0 d\alpha d\beta = \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} w_0^2 d\alpha d\beta$$

после чего из (4) получается

$$c(w_1, w_0) + c^2(w_2, w_0) + \dots = 0$$

Отсюда следует, что $(w_1, w_0) = (w_2, w_0) = \dots = 0$, где w_1, w_2, \dots — общие решения соответствующих краевых задач [2]. В настоящем случае общим решением краевой задачи (12), (8) является w_1 (13), а не v_1 и поэтому условие (14) может не выполняться, потому что

$$(C + v, w_0) = 0$$

а не $(v, w_0) = 0$. С другой стороны, как видели выше, условия ортогональности не зависят от ω_i ($i = 1, 2, \dots$) и, следовательно, (14) не может определять ω_1 , если даже оно выполнялось. Вот почему ω_1 определяется ошибочно. Ниже мы покажем, что $\omega_1 = 0$.

Решение задачи. Введем скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \varphi(\alpha, \beta) \psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

где φ и ψ принадлежат $L_2(\Omega)$, $\Omega = \{0 \leq \alpha \leq a_1, 0 \leq \beta \leq b_1\}$. Тогда, в дальнейшем под w_0 будем понимать нормированную собственную функцию w_0^* (15).

$$(A_1 w_1, w_0) = \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} A_1 w_1(\alpha, \beta) w_0(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (16)$$

После интегрирования по частям (16), при этом имея в виду граничные условия (8), легко убедиться, что

$$(A_1 w_1, w_0) = (w_1, A_1 w_0) = \frac{h\gamma_0}{g} \omega_1(w_1, w_0) \quad (17)$$

Далее, умножив обе части уравнения (12) скалярно на w_0 и имея в виду (17), для определения ω_1 , получим равенство

$$\left(Q_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha}{a_1} \cos \frac{n\pi\beta}{b_1} + \omega_1 b_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a_1} \sin \frac{n\pi\beta}{b_1}, w_0 \right) = 0$$

которое может иметь место только при $\omega_1 = 0$.

Таким образом, мы доказали вышеприведенные утверждения о том, что в [1] частоты и критические силы соответствующих задач определены ошибочно.

Далее, поскольку оказалось $\omega_1 = 0$, надо определить хоть ω_2 . Из условия разрешимости краевой задачи (9), (10) (здесь надо учитывать, что $\omega_1 = 0$)

$$\left(-A_2 w_1 + \frac{h\gamma_0}{g} \omega_2 w_0, w_0 \right) = 0$$

определяется ω_2

$$\omega_2 = \frac{g}{h\gamma_0} (A_2 w_1, w_0)$$

Значит, надо определить w_1 . Для этого, в (12) поставим $\omega_1 = 0$ и определим w_1

$$w_1 = A w_0 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \quad (18)$$

где A — пока произвольная постоянная, \bar{w}_1 — решение однородного уравнения (12) с граничными условиями (8), а \bar{w}_2 — решение уравнения (12) с нулевыми граничными условиями ортогональное к w_0 . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что

$$\bar{w}_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left(A_p \operatorname{ch} \frac{p\pi s_1 \alpha}{b_1} + B_p \operatorname{sh} \frac{p\pi s_1 \alpha}{b_1} + C_p \operatorname{ch} \frac{p\pi s_2 \alpha}{b_1} + D_p \operatorname{sh} \frac{p\pi s_2 \alpha}{b_1} \right) \sin \frac{p\pi\beta}{b_1} + \left(\bar{A}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi r_1 \beta}{a_1} + \bar{B}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi r_1 \beta}{a_1} + \bar{C}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi r_2 \beta}{a_1} + \bar{D}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi r_2 \beta}{a_1} \right) \sin \frac{p\pi\alpha}{a_1} \right]$$

где

$$A_p = \frac{4k_1 \pi^2 m n}{a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \cdot \frac{a_{n_2}}{(s_2^2 - s_1^2)(p\pi/b_1)^2}, \quad C_p = -A_p$$

$$B_p = -A_p \left(\operatorname{sh} \frac{p \pi s_1 a_1}{b_1} \right)^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{p \pi s_1 a_1}{b_1} - \cos m \pi \right)$$

$$D_p = A_p \left(\operatorname{sh} \frac{p \pi s_2 a_1}{b_1} \right)^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{p \pi s_2 a_1}{b_1} - \cos m \pi \right), \quad a_{mn} = 0$$

$$a_{np} = \frac{2}{b_1} \int_0^{b_1} \cos \frac{n \pi \beta}{b_1} \sin \frac{p \pi \beta}{b_1} d\beta = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin^2[\pi(p+n)/2]}{p+n} - \frac{\sin^2[\pi(p-n)/2]}{p-n} \right)$$

$$\bar{A}_p = \frac{4k_2 \pi^2 m n}{a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \frac{b_{mp}}{(r_2^2 - r_1^2)(p\pi/a_1)^2}, \quad \bar{C}_p = -\bar{A}_p$$

$$\bar{B}_p = -\bar{A}_p \left(\operatorname{sh} \frac{p \pi r_1 b_1}{a_1} \right)^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{p \pi r_1 b_1}{a_1} - \cos n \pi \right)$$

$$\bar{D}_p = \bar{A}_p \left(\operatorname{sh} \frac{p \pi r_2 b_1}{a_1} \right)^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{p \pi r_2 b_1}{a_1} - \cos n \pi \right), \quad b_{mp} = 0$$

$$b_{mp} = \frac{2}{a_1} \int_0^{a_1} \cos \frac{m \pi \alpha}{a_1} \sin \frac{p \pi \alpha}{a_1} d\alpha = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin^2[\pi(p+m)/2]}{p+m} + \frac{\sin^2[\pi(p-m)/2]}{p-m} \right)$$

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \quad \bar{A}_m = \bar{B}_m = \bar{C}_m = \bar{D}_m = 0$$

s_1, r_1 ($i = 1, 2$) являются корнями уравнений [1]

$$s^4 - 2k s^2 + \left[1 - \frac{h \gamma_0}{g} \omega_0(m, n) \left(\frac{b_1}{p \pi} \right)^4 \right] = 0$$

$$r^4 - 2k r^2 + \left[1 - \frac{h \gamma_0}{g} \omega_0(m, n) \left(\frac{a_1}{p \pi} \right)^4 \right] = 0$$

$$s_1^2 = k + \sqrt{\Delta_1}, \quad s_2^2 = k - \sqrt{\Delta_1}, \quad r_1^2 = k + \sqrt{\Delta_2}, \quad r_2^2 = k - \sqrt{\Delta_2}$$

$$\Delta_1 = k^2 + \left(\frac{m b_1}{p a_1} \right)^4 + 2k \left(\frac{m b_1}{p a_1} \right)^2 \left(\frac{n}{p} \right)^2 + \left(\frac{n}{p} \right)^4 - 1$$

$$\Delta_2 = k^2 + \left(\frac{n a_1}{p b_1} \right)^4 + 2k \left(\frac{n a_1}{p b_1} \right)^2 \left(\frac{m}{p} \right)^2 + \left(\frac{m}{p} \right)^4 - 1$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{16 \pi^2}{a_1 b_1} z_{mn} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{pq}}{\lambda_{pq} - \lambda_{mn}} \psi_{pq}, \quad \Gamma_{mn} = 0$$

где

$$z_{mn} = mn \left(k_1 \left(\frac{m}{a_1} \right)^2 + k_2 \left(\frac{n}{b_1} \right)^2 \right)$$

$$\Gamma_{pq} = \left[\frac{\sin^2[\pi(p+m)/2]}{p+m} + \frac{\sin^2[\pi(p-m)/2]}{p-m} \right] \left[\frac{\sin^2[\pi(q+n)/2]}{q+n} + \frac{\sin^2[\pi(q-n)/2]}{q-n} \right]$$

$$\lambda_{pq} = \left(\frac{p\pi}{a_1} \right)^4 + 2k \left(\frac{p\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{q\pi}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b_1} \right)^4, \quad \lambda_{mn} = \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0(m, n)$$

$$\psi_{pq} = \frac{2}{\sqrt{a_1 b_1}} \sin \frac{p\pi\alpha}{a_1} \sin \frac{q\pi\beta}{b_1}$$

Выше имелось в виду, что ψ_{pq} — ортонормированные собственные функции оператора A_1 с нулевыми граничными условиями, соответствующие собственным значениям λ_{pq} .

Очевидно, что \tilde{w}_1 и \tilde{w}_2 ортогональны к w_0 .

Таким образом, решение краевой задачи (12), (8), ортогональное к w_0 , будет (в (18) надо положить $A=0$)

$$w = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2.$$

Следовательно,

$$\omega_2 = \frac{g}{h\gamma_0} [(A_2 \tilde{w}_1, w_0) + (A_2 \tilde{w}_2, w_0)]$$

Если учесть, что

$$A_2 \tilde{w}_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ u_{1p} \left[A_p \operatorname{sh} \frac{p\pi s_1 \alpha}{b_1} + B_p \operatorname{ch} \frac{p\pi s_1 \alpha}{b_1} \right] + \right. \\ \left. + u_{2p} \left[C_p \operatorname{sh} \frac{p\pi s_2 \alpha}{b_1} + D_p \operatorname{ch} \frac{p\pi s_2 \alpha}{b_1} \right] \right\} \cos \frac{p\pi\beta}{b_1} + \\ + \left\{ \bar{u}_{1p} \left[\bar{A}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi r_1 \beta}{a_1} + \bar{B}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi r_1 \beta}{a_1} \right] + \bar{u}_{2p} \left[\bar{C}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi r_2 \beta}{a_1} + \bar{D}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi r_2 \beta}{a_1} \right] \right\} \cos \frac{p\pi\alpha}{a_1}$$

где

$$A_n = B_n = C_n = D_n = \bar{A}_m = \bar{B}_m = \bar{C}_m = \bar{D}_m = 0$$

$$u_{1p} = 4 \left(\frac{\pi}{b_1} \right)^4 n p s_1 (k_1 (p s_1)^2 + k_2 n^2), \quad u_{2p} = 4 \left(\frac{\pi}{b_1} \right)^4 n p s_2 (k_1 (p s_2)^2 + k_2 n^2)$$

$$\bar{u}_{1p} = 4 \left(\frac{\pi}{a_1} \right)^4 m p r_1 (k_1 (p r_1)^2 + k_2 m^2), \quad \bar{u}_{2p} = 4 \left(\frac{\pi}{a_1} \right)^4 m p r_2 (k_1 (p r_2)^2 + k_2 m^2)$$

$$A_2 \tilde{w}_2 = -\frac{2^6 \pi^6}{a_1^2 b_1^2} z_{mn} \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{pq} z_{pq}}{\lambda_{pq} - \lambda_{mn}} \cos \frac{p\pi\alpha}{a_1} \cos \frac{q\pi\beta}{b_1}$$

для $\omega_2(m, n)$. получим

$$\omega_2(m, n) = \frac{g}{h\gamma_0 a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \left[K_p \left(\frac{\sin^4[\pi(p-n)/2]}{(p-n)^2} - \frac{\sin^4[\pi(p+n)/2]}{(p+n)^2} \right) \right] + \right.$$

$$+ \bar{K}_p \left(\frac{\sin^4[\pi(p-m)/2]}{(p-m)^2} - \frac{\sin^4[\pi(p+m)/2]}{(p+m)^2} \right) \left[\frac{1}{p} - \frac{\pi}{2} z_{mn} \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{R_{pq} z_{pq}}{\lambda_{pq} - \lambda_{mn}} \right]$$

где

$$K_p = m^2 n^2 \left[\frac{(\operatorname{cth}(p\pi s_1 a_1 / b_1) - \cos m\pi (\operatorname{sh}(p\pi s_1 a_1 / b_1))^2) w_p^{(1)}}{(ps_1)^2 + (mb_1/a_1)^2} - \frac{(\operatorname{cth}(p\pi s_2 a_1 / b_1) - \cos m\pi (\operatorname{sh}(p\pi s_2 a_1 / b_1))^2) w_p^{(2)}}{(ps_2)^2 + (mb_1/a_1)^2} \right]$$

$$w_p^{(1)} = \frac{k_1 s_1 (k_1 (ps_1)^2 + k_2 n^2)}{a_1 (s_2^2 - s_1^2)}, \quad w_p^{(2)} = \frac{k_1 s_2 (k_1 (ps_2)^2 + k_2 n^2)}{a_1 (s_2^2 - s_1^2)}$$

$$\bar{K}_p = m^2 n^2 \left[\frac{(\operatorname{cth}(p\pi r_1 b_1 / a_1) - \cos n\pi (\operatorname{sh}(p\pi r_1 b_1 / a_1))^2) \bar{w}_p^{(1)}}{(pr_1)^2 + (na_1/b_1)^2} - \frac{(\operatorname{cth}(p\pi r_2 b_1 / a_1) - \cos n\pi (\operatorname{sh}(p\pi r_2 b_1 / a_1))^2) \bar{w}_p^{(2)}}{(pr_2)^2 + (na_1/b_1)^2} \right]$$

$$\bar{w}_p^{(1)} = \frac{k_2 r_1 (k_1 (pr_1)^2 + k_2 m^2)}{b_1 (r_2^2 - r_1^2)}, \quad \bar{w}_p^{(2)} = \frac{k_2 r_2 (k_1 (pr_2)^2 + k_2 m^2)}{b_1 (r_2^2 - r_1^2)}, \quad R_{mn} = 0$$

$$R_{pq} = \left(\frac{\sin^4[\pi(p-m)/2]}{(p-m)^2} - \frac{\sin^4[\pi(p+m)/2]}{(p+m)^2} \right) \left(\frac{\sin^4[\pi(q-n)/2]}{(q-n)^2} - \frac{\sin^4[\pi(q+n)/2]}{(q+n)^2} \right)$$

Из представления $\omega_2(m, n)$ следуют следующие случаи:

а) если m и n четные, то

$$\omega_2(m, n) = \frac{g}{h\gamma_0 a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \left[\sum_{p=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{nK_p}{(p^2 - n^2)^2} + \frac{m\bar{K}_p}{(p^2 - m^2)^2} \right) - 2\pi mn z_{mn} \sum_{p,q=1,3,5}^{\infty} \frac{pq z_{pq}}{(p^2 - m^2)^2 (q^2 - n^2)^2 (\lambda_{pq} - \lambda_{mn})} \right]$$

б) если m нечетное, а n четное, то

$$\omega_2(m, n) = \frac{g}{h\gamma_0 a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \left[\sum_{p=1,3,5}^{\infty} \frac{nK_p}{(p^2 - n^2)^2} + \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{m\bar{K}_p}{(p^2 - m^2)^2} - 2\pi mn z_{mn} \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{q=1,3,5}^{\infty} \frac{pq z_{pq}}{(p^2 - m^2)^2 (q^2 - n^2)^2 (\lambda_{pq} - \lambda_{mn})} \right]$$

в) если m - четное, а n - нечетное, то

$$\omega_2(m, n) = \frac{g}{h\gamma_0 a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \left[\sum_{p=2,3}^{\infty} \frac{nK_p}{(p^2 - n^2)^2} + \sum_{p=3,3}^{\infty} \frac{m\bar{K}_p}{(p^2 - m^2)^2} - \right. \\ \left. - 2\pi mn z_{mn} \sum_{p=2,3}^{\infty} \sum_{q=2,3}^{\infty} \frac{pq z_{pq}}{(p^2 - m^2)^2 (q^2 - n^2)^2 (\lambda_{pq} - \lambda_{mn})} \right],$$

г) если m и n нечетные, то

$$\omega_2(m, n) = \frac{g}{h\gamma_0 a_1 b_1 \sqrt{a_1 b_1}} \left[\sum_{p=2,4}^{\infty} \left(\frac{nK_p}{(p^2 - n^2)^2} + \frac{m\bar{K}_p}{(p^2 - m^2)^2} \right) - \right. \\ \left. - 2\pi mn z_{mn} \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{q=2,4}^{\infty} \frac{pq z_{pq}}{(p^2 - m^2)^2 (q^2 - n^2)^2 (\lambda_{pq} - \lambda_{mn})} \right]$$

Итак, мы определили формально (поскольку сходимость степенных рядов по μ не исследовали) влияние анизотропии на частоту и форму колебаний прямоугольной пластинки в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu^2 \omega_2, \quad w = w_0 + \mu w_1,$$

где ω^2 определена с точностью до второго приближения, а w — до первого приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. ЕГУ, 1976.
2. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
25.06.2001