ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №3, 2001 Механика
УДК 393.3

ФЛАТТЕР УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ МАЛЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ПОТОКА ГАЗА. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Минасян Д.М.

Դ.Մ.Մինասյան
Առաձգական սալի ֆլատերը գազի գերձայնային հոսանքի փորր արագությունների դեպքում: Համեմատական վերլուծում

Առաջարկված է գազի գերձայնային հոսանքում առաձգական սալի ֆլատերի նոր մոտավորություն, որը ճշտությամբ ընկած է ճշգրիտ և «մխոցային» տեսությունների միջև: Կատարված է ճշգրիտ, առաջարկված և «մխոցային» երեք տեսությունների դիսպերսիոն հավասարումների համեմատական վերլուծում: Թվային հաշվարկներով ցույց է տված, որ առաջարկված մոտավորությունը և որակապես և բանակապես ավելի մոտիկ է ճշգրիտ տեսությանը, քան «մխոցային» մոտավորությունները:

D. Minassian
Flutter of elastic plate at small supersonic speeds of gas flow.
The comparative analysis

В работе предложено новое приближение в задаче о панельном флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке идеального газа. По точности это приближение является промежуточным между "точной" и "поршневой" теориями.

Проведен сравнительный численный анализ дисперсионных уравнений для точной, предложенной и трех вариантов "поршневых" теорий. Анализ показал, что результаты нового приближения как качественно, так и количественно более близки к точной, чем "поршневые". Показано весьма хорошее совпадение комплексных фазовых скоростей при малых сверхзвуковых числах Маха для тех значений параметров, при которых результаты "поршневого" приближения неверны.

Введение. При обтекании бесконечной пластинки двумерным потоком идеального газа или жидкости для изгибных колебаний пластинки получается уравнение

$$\Lambda\left[w(x,t)\right]+\mathrm{P}\left[w(w,t)\right]=0 \qquad (1)$$

где Λ – дифференциальный оператор движения пластинки в пакууме, P – оператор давления газа на пластинку, определяемый из решения внешней задачи и граничных условий на поверхности раздела сред. Для исследования динамической потери устойчивости весьма важно выяснить, является ли оператор Λ главным в уравнении (1). Если он главный, то количество парциальных волн (для конечных тел – парциальных частот) будет определяться только его свойствами. Оператор P при этом может порождать отрицательное низкочастотное демпфирование того или другого знака. Для конечной пластинки динамическая неустойчивость будет следствием замыкания петель частотных ветвей, соответствующим

смежным модам колебаний [1]. Если оператор Λ не является главным, то в системе из-за наличия большего количества волн (для конечных тел – большего количества парциальных частот) могут появляться новые источники динамической неустойчивости. Это связано, в первую очередь, с явлением *синхронизма* (внутреннего резонанса) для волн и частот [2]. В окрестности точки синхронизма отдельные волны теряют свою индивидуальность и сильно взаимодействуют. Для конечных тел синхронизм может порождать неустойчивость по одной моде, или как иногда говорят, галлопирование по одной моде [3].

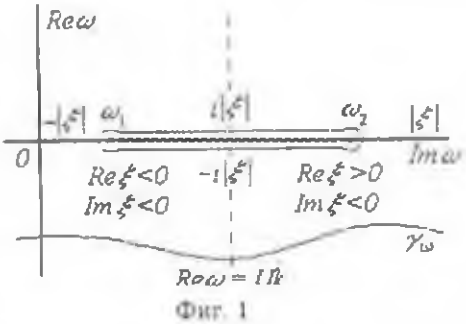
В настоящей работе на основе численного анализа исследуются дисперсионные уравнения фазовых скоростей для линейного уравнения (1) с различными представлениями оператора давления P.

Модели сравнения. Если исходить из точного решения линеаризированного потенциального двумерного течения идеального газа [1,4], то в интегральном представлении Фурье-Лапласа получим

$$P[w(x,t)] = \frac{i\rho_0 a_0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\omega} \frac{(\omega - Uk)^2 \exp i(\omega t - kx)}{\xi(\omega,k)} w(\omega,k)\,dk\,d\omega$$

$$\xi(\omega,k) = \sqrt{(\omega - Uk)^2 - a_0^2 k^2} \qquad (2)$$

где U, a_0, ρ_0 – невозмущенные параметры потока газа. γ_ω – контур в комплексной плоскости ω, лежащий ниже точек ветвлений $\omega_1 = (\omega - U)k$, $\omega_2 = (\omega + U)k$ функции ξ. Условия затухания и излучения выполняются выбором той ветви ξ, которая является аналитическим продолжением ω из бесконечности. Тогда на линии γ_ω мнимая часть ξ отрицательна, а вещественная часть имеет тот же знак, что и $\omega - Uk$ [4]. Фиг.1 представляет соответствующие ветви.



Фиг. 1

Назовем уравнение (1) с учетом (2) точным. Очевидно, что в точном уравнении оператор Λ уже не будет главным, поскольку имеющие фазовые скорости дополняются еще одной, обусловленной однозначной ветвью ξ. Наряду с точным уравнением рассмотрим уравнения с

различными приближениями для оператора P.

Согласно "поршневой" теории имеем [1]

$$P[w(x,t)] = \rho_0 a_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{3}$$

Представим также две модификации этой теории [4,5,6]

$$P[w(x,t)] = \frac{\rho_0 U}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right); \left(M = \frac{U}{a_0} \right) \tag{4}$$

$$P[w(x,t)] = \frac{\rho_0 U}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{5}$$

Как видно, в "поршневых" приближениях оператор Λ остается главным.

При больших сверхзвуковых скоростях, как показали многочисленные исследования [1,5,7], эта теория является весьма эффективной и достаточно близкой к точной. Главная привлекательная черта теории является то, что уравнение (1) становится дифференциальным уравнением, позволяющим легко ставить смешанную задачу для конечной пластинки. Основным же ее недостатком является то, что результаты становятся неверными при малых (а при некоторых значениях параметров задачи и длин волн – при умеренных) сверхзвуковых скоростях. Это отчасти (если не полностью) объясняется тем, что "поршневая" теория вырождает уравнение (1), превратив его из интегродифференциального уравнения в дифференциальное уравнение с той же главной частью Λ. Естественно думать, что приближение, которое приводит к дифференциальному уравнению большего чем Λ порядка, может более точно описать динамику движения и при малых скоростях потока.

В работах [8] методом последовательных приближений для избыточного давления выведено уравнение

$$\frac{Dp}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D^2 w}{Dt^2} + \chi \rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tag{6}$$

В отличие от (3), (4) и (5), уравнение (6) уже представляет нелокальную связь между давлением и движением пластинки. Кроме того, исключая давление, для прогиба пластинки получается дифференциальное уравнение на порядок больше Λ, что и приводит к дополнительной попутной (вдоль потока) волны в бесконечном теле и дополнительной парциальной частоте в конечном теле. В работе [9] авторами исследован

характер неустойчивости (абсолютной и конвективной [2]) бесконечной пластинки, а в [10] исследован одномодный флаттер конечной пластинки.

Приближение (6) хотя и качественно ближе к точному, однако количественно расходится с точной в оценке нижней границы области устойчивости по числу Маха для бесконечной пластинки. Это расхождение устранено в работе [11], где путем разложения подынтегральной функции в (2) в ряд Лорана по степеням $\omega - \omega_1$ с удержанием главных членов разложения было выведено уравнение

$$\frac{Dp}{Dt} - a_0 \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 a_0 \frac{D}{Dt}\left(\frac{Dw}{Dt} - a_0 \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \chi(M)\rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (7)$$

где $\chi(M)$ – некоторый поправочный коэффициент, частично компенсирующий усечение ряда Лорана. Назовем приближение, основанное на (7) "уточненным".

Исследование дисперсионных уравнений. Для реализации сравнительного анализа конкретных дисперсионных уравнений для обсуждаемых моделей рассмотрим следующий линейный оператор Λ для пластинки в общепринятых обозначениях [1]

$$\Lambda = \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_f \qquad (8)$$

Точное дисперсионное уравнение для фазовых скоростей запишем в безразмерном виде [5]

$$c^2 - c_0^2 - 2bicc_0 + \mu \frac{(c-M)^2}{\sqrt{1-(c-M)^2}} = 0 \qquad (9)$$

$$\omega = a_0 ck,\ \rho h c_0^2 = Dk^2 + N + k_f k^{-2},\ \varepsilon = 2bka_0 c_0,\ \rho_0 = \mu\rho h k$$

Отметим, что радикал в (9) имеет положительную вещественную часть и при $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ знак перед радикалом следует менять на противоположный.

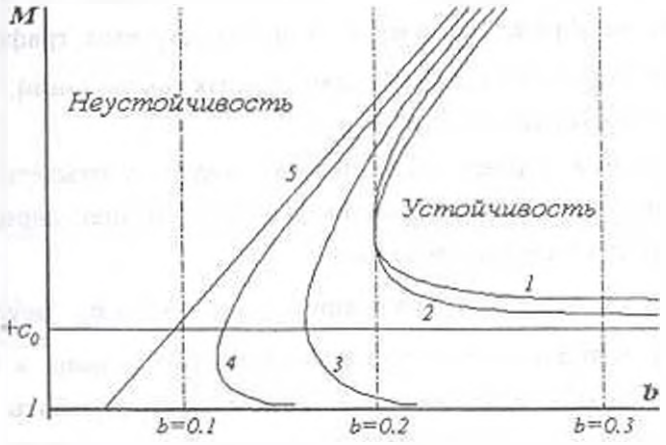
В "уточненном" приближении получим

$$\left[c - (M-1)\right]\left[c^2 - c_0^2 - (2bc_0 + \mu)ci + i\mu M\right] = i\mu\chi(M) \qquad (10)$$

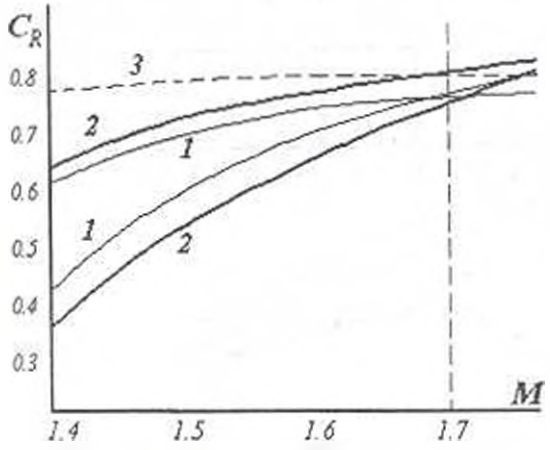
"Поршневому" приближению соответствует второй множитель в левой части (10) с соответствующими поправками в коэффициенте μ.

На фиг. 2 представлены области устойчивости в плоскости параметров M, b для этих дисперсионных уравнений. Строгие вычисления показывают как качественное, так и количественное хорошее совпадение

точной и "уточненной" границ устойчивости.



Фиг. 2



Фиг.3

1 - точная теор.; 2 - уточ. теор.; 3 - "поршн." теор.; 4, 5 - модификации "поршн." теории

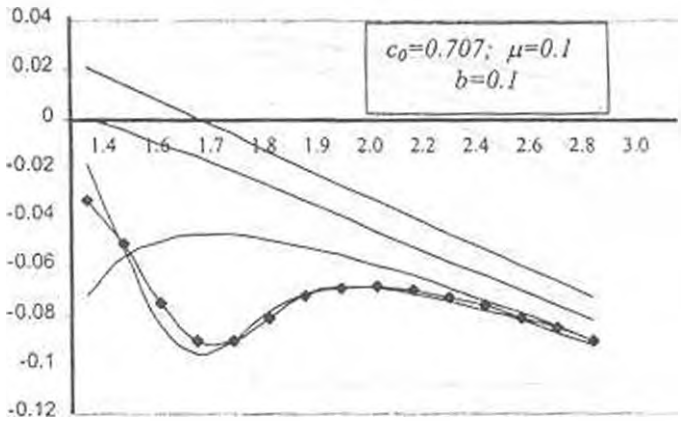
Уравнения (9) и (10) определяют три волны, две из которых попутны, а одна встречная, в то время как "поршневые" уравнения определяют две противонаправленные волны. На фиг 3 представлены графики действительных частей фазовых скоростей c_R попутных волн. Отметим, что в работе [5] подобные вычисления проведены приближенно. Для двух попутных волн и в точном, и в "уточненном" представлениях в окрестности $M = 1.7$ значения c_R близки. Этому значению числа Маха соответствует горизонтальная асимптота на фиг.2 и точка ветвления ω_1 на фиг.1.

Дальнейшие вычисления относятся только тем попутным волнам,

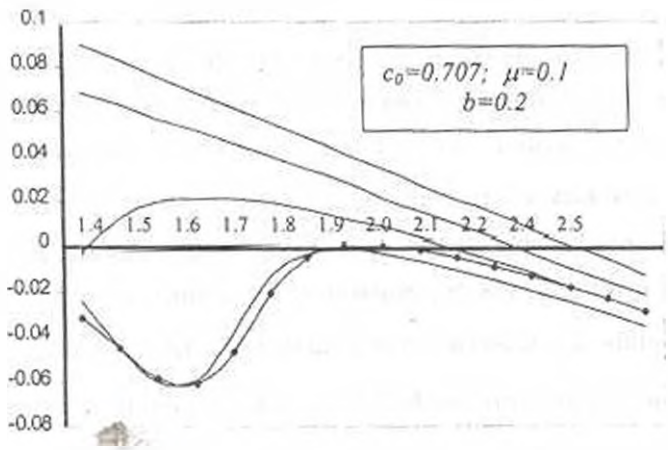
скорости которых имеют меньшую мнимую часть c_I. Для b (конструкционного демпфирования) выбраны три значения, указанные вертикальными линиями на фиг.2. На фиг. 4, 5 и 6 построены графики c_I в зависимости от числа Маха на основе точных вычислений, частично представленных таблицами 1,2 и 3.

При вычислении корней уравнения (9) следует учитывать, что при пересечении нижней границы устойчивости (фиг. 2) знак перед радикалом следует менять на противоположное.

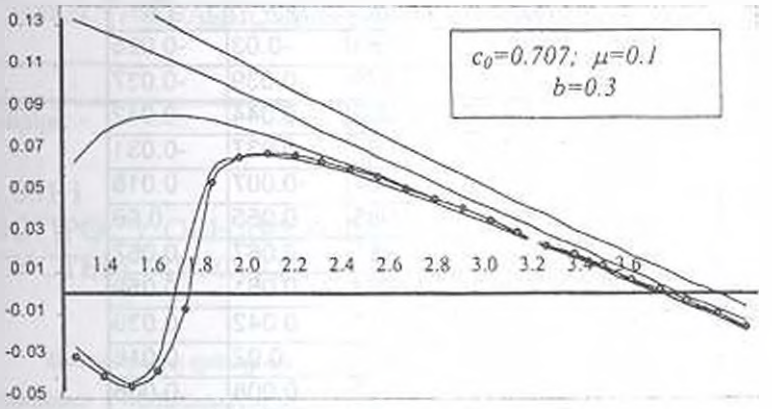
Как видно из таблиц и графиков, при $M < 1 + c_0$ неустойчивая попутная волна, которая отсутствует в "поршневой" теории, в точном и "уточненном" подходах одна и та же. Резюмируя результаты анализа, можно заключить, что неустойчивость в указанной области является результатом синхронизма двух попутных волн.



Фиг. 4



Фиг.5



Фиг.6

Таблица 1 (b=*0.1*)

M	*ПТ-1'*	*ПТ-2'*	*ПТ-3'*	*УТ'*	*ТТ'*
1.3	0.021	0.00065	-0.072	-0.033	-0.018
1.4	0.014	-0.004	-0.056	-0.051	-0.053
1.5	0.007	-0.01	-0.05	-0.075	-0.084
1.6	0.00046	-0.015	-0.047	-0.09	-0.096
1.7	-0.006	-0.021	-0.047	-0.09	-0.09
1.8	-0.013	-0.027	-0.049	-0.081	-0.078
1.9	-0.02	-0.033	-0.052	-0.072	-0.071
2	-0.027	-0.039	-0.055	-0.069	-0.068
2.2	-0.033	-0.046	-0.06	-0.068	-0.069
2.4	-0.04	-0.052	-0.064	-0.07	-0.071
2.6	-0.047	-0.058	-0.069	-0.073	-0.074
2.8	-0.053	-0.064	-0.074	-0.076	-0.078
3	-0.06	-0.07	-0.079	-0.081	-0.082

Таблица 2 (b=*0.2*)

M	*ПТ-1*	*ПТ-2*	*ПТ-3*	*УТ*	*ТТ*
1.3	0.09	0.068	-0.003	-0.032	-0.024
1.4	0.083	0.063	0.012	-0.045	-0.045
1.5	0.076	0.057	0.019	-0.058	-0.06
1.6	0.068	0.052	0.021	-0.061	-0.059
1.7	0.062	0.046	0.021	-0.047	-0.038
1.8	0.055	0.04	0.019	-0.021	-0.013
1.9	0.048	0.034	0.016	-0.005	-0.003
2	0.041	0.028	0.012	-0.0003	0.0008
2.2	0.034	0.021	0.008	0.00006	-0.003
2.4	0.027	0.015	0.003	-0.002	-0.007
2.6	0.02	0.009	-0.002	-0.005	-0.011
2.8	0.014	0.003	-0.007	-0.009	-0.015
3	0.007	-0.003	-0.012	-0.013	-0.02

Таблица 3 (β=0.3)

M	ПТ-1	ПТ-2	ПТ-3	УТ	ТТ
1.4	0.157	0.133	0.064	-0.03	-0.025
1.5	0.15	0.128	0.079	-0.039	-0.037
1.6	0.142	0.123	0.085	-0.044	-0.042
1.7	0.135	0.117	0.087	-0.037	-0.031
1.8	0.128	0.111	0.087	-0.007	0.018
1.9	0.121	0.105	0.085	0.055	0.06
2	0.114	0.099	0.081	0.067	0.067
2.4	0.086	0.074	0.063	0.061	0.059
2.8	0.058	0.048	0.042	0.042	0.039
3.2	0.032	0.024	0.019	0.02	0.018
3.4	0.019	0.011	0.007	0.008	0.006
3.6	0.007	-0.00077	-0.005	-0.003	-0.005
3.8	-0.006	-0.013	-0.016	-0.015	-0.017

' - ПТ - поршневая теория; УТ - уточненная теория; ТТ - точная теория.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. С.287.
3. Dowell E.H. Flutter of a Buckled Plate as an Example of Chaotic Motion of a Deterministic Autonomous System. // Jour. Of Sound Vibr. (1982) 85(3). p. 333-344.
4. Miles J. The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Cambridge Univ. Press, 1959, p.311.
5. Kornecki A. Aeroelastic And Hydroelastic Instabilities Of Infinitely Long Plates. // II SM Archives, Vol.4, Issue 4, 1979, p. 241-343.
6. Ashley H., Zartarian G. Piston theory - a new aerodynamic tool for the aeroelastician. J. of Aeron. Sc., 31, 1956, p.1109-1118.
7. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т.11. М.: 1978. С.25.
8. Белубекян М.В., Минасян М.М. К проблемам флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 1997. Т.50. №2. С.27-35.
9. Белубекян М.В., Минасян М.М. О характере неустойчивости бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т.53. №3. С.29-35.
10. Белубекян В.М., Минасян М.М. О нелинейном флаттере пластин в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 1999. Т.52. №4. С.38-45.
11. Минасян М.М., Минасян Д.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т.1, №1.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 17.05.2001