

УДК 531.36:534.1

УСЛОВИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ДВИЖУЩИХСЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Матвийчук К.С.

Կ.Ս. Մատվիժյուկ

Շեղուկի հոսքի հետ փոխազդող շարժվող կոնտինուալ համակարգերի համար տեխնիկական կայունության պայմանները

Լյապունովի տեխնիկական կայունության և առաձգականության տեսության մեթոդներով հետազոտված են տարածական ոչ գծային դինամիկական համակարգերի փոխազդեցության հարցերը շարժվող ինդուկտի հոսքում: Ստացված են այսպիսի դինամիկական համակարգերի շարժման տեխնիկական կայունության բավարար պայմաններ:

K.S. Matvijchuk

Condition of Technical Stability of Moving Continuum Systems, Interacting with Fluid Flow

Развит подход исследования нелинейных многомерных динамических процессов взаимодействия с потоком жидкости движущихся протяженных континуальных систем с помощью методов пространственной теории упругости совместно с методом сравнения и прямым методом Ляпунова. На этой основе получены различные по внутреннему содержанию обобщенные системы нелинейных уравнений, описывающие заданные континуальные процессы. Сформулированы достаточные условия технической устойчивости соответствующей пространственной несамосопряженной краевой задачи, с помощью которой характеризуется динамическое поведение исследуемых систем в потоке жидкости.

Получены критерии технической устойчивости пространственных динамических состояний длинных упругих цилиндрических тел балочного типа с переменным поперечным сечением при их продольном движении с заданной скоростью в потоке жидкости. Найдены условия, при которых наступает потеря устойчивости заданного пространственного динамического процесса. Представленные исследования опираются на результаты из [1–14].

1. Постановка задачи. Уравнения движения процесса

Рассматривается длинное упругое цилиндрическое тело AB с переменным поперечным сечением, продольная ось которого в начальном состоянии является прямолинейной [1–5] и которое продольно транспортируется в идеальной несжимаемой жидкости в течение заданного интервала времени $I_1 = [t_0, K] \subset I \equiv [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$.

$K = \text{const} > 0$ вдоль горизонтальной прямолинейной траектории с заданной скоростью v , v – ее абсолютное значение. Заданный динамический процесс характеризуется следующей системой уравнений, записанной относительно внутренних усилий и моментов AB :

$$\begin{aligned}
m(\varepsilon) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right) Q_1 \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\alpha_2 Q_2) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\alpha_3 Q_3) + \\
&\quad + \left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right) R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3, \\
m(\varepsilon) \frac{\partial^2 W_2}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [(1 + \beta_2) Q_2] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} Q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta_3 Q_3) + \\
&\quad + \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} R_1 + (1 + \beta_2) R_2 + \beta_3 R_3, \\
m(\varepsilon) \frac{\partial^2 W_3}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [(1 + \beta_2) Q_3] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} Q_1 \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta_3 Q_3) + \\
&\quad + \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} R_1 - \beta_3 R_3 + (1 + \beta_2) R_3, \\
\rho \frac{\partial I_1^0}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right) M_1 \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\alpha_2 M_2) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\alpha_3 M_3) + \alpha_2 Q_1 - \\
&\quad - \alpha_3 Q_3 + \left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right) \bar{\mu}_1 + \alpha_2 \bar{\mu}_2 + \alpha_3 \bar{\mu}_3, \\
\rho \frac{\partial I_2^0}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [(1 + \beta_2) M_2] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} M_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta_3 M_3) + \beta_3 Q_2 - \\
&\quad - (1 + \beta_2) Q_3 + \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} \bar{\mu}_1 + (1 + \beta_2) \bar{\mu}_2 + \beta_3 \bar{\mu}_3, \\
\rho \frac{\partial I_3^0}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [(1 + \beta_2) M_3] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} M_1 \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta_3 M_3) + (1 + \beta_2) Q_2 + \\
&\quad + \beta_3 Q_3 + \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} \bar{\mu}_1 - \beta_3 \bar{\mu}_3 + (1 + \beta_2) \bar{\mu}_3,
\end{aligned}
\tag{1}$$

$$I_i^0 = J_i \omega_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Соотношения для внутренних усилий $Q_i^{(n)}$ и моментов M_i ($i = 1, 2, 3$) через перемещения точек осевой линии системы AB [1-5] имеют вид

$$\begin{aligned}
Q_i^{(n)} &= \frac{ES(\varepsilon)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \left[\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} \right)^2 \right] \right] + \right. \\
&\quad \left. + \beta_2 + \frac{1}{2} (\beta_2^2 + \beta_3^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$Q_2^{(1)} = S(\varepsilon)G \left[\left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_2 + (1 + \beta_2) \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} - \beta_3 \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} \right]$$

$$Q_3^{(1)} = S(\varepsilon)G \left[\left(1 + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_3 + (1 + \beta_2) \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} - \beta_3 \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} \right] \quad (2)$$

$$M_1 = -GI_p \left[(1 + \beta_2) \frac{\partial \beta_3}{\partial \varepsilon} - \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial \varepsilon} \right]$$

$$M_2 = \frac{(1 - \nu)EI_2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[(1 + \beta_2) \frac{\partial^2 W_3}{\partial \varepsilon^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2} \right]$$

$$M_3 = -\frac{(1 - \nu)EI_3}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[(1 + \beta_2) \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2} \right] \quad (3)$$

$I_p = \int_S (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta$ — полярный момент инерции; $I_2 = \int_S \zeta^2 d\eta d\zeta$ — момент

инерции поперечного сечения тела AB относительно оси e_2 .

$I_1 = \int_S \eta^2 d\eta d\zeta$ — момент инерции поперечного сечения тела AB

относительно оси e_3 . Из (1) находим безразмерную краевую задачу в перемещениях процесса продольного транспортирования в жидкости на заданной глубине длинного упругого тела с переменным поперечным сечением:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - P_H^{(1)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - P_H^{(2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) + a_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3 \frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - P_H^{(3)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) + b_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3$$

с граничными условиями

$$u_i(t, s)|_{s=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} \Big|_{s=1} = -c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{s=1} + c_2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} \Big|_{s=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} \Big|_{s=1} = n \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{s=1} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \Big|_{s=1} = n_1 (g\rho_{\kappa} V_{\kappa} - q_{\kappa}), \quad \frac{\partial^3 u_3}{\partial s^3} \Big|_{s=1} = n_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial t^4} \Big|_{s=1} - n_3 (g\rho_{\kappa} V_{\kappa} - q_{\kappa})$$

и начальными условиями

$$u_i(t, s)|_{t=t_0} = k_i(s), \quad \frac{\partial u_i(t, s)}{\partial s} \Big|_{t=t_0} = g_i(s) \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$$P_H^{(1)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{1}{En_0}, \quad P_H^{(2)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{S_0 l^2}{EI_3 \delta}, \quad P_H^{(3)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{S_0 l^2}{EI_3 \delta}$$

$$\alpha_1 = \frac{S_0 n_0 l h}{I_1}, \quad \alpha_2 = \frac{S_0 l h}{I_3}, \quad \alpha_3 = \frac{l^3 R_1}{EI_3 \delta}, \quad b_1 = \frac{S_0 n_0 l h}{I_2}, \quad b_2 = \frac{S_0 l h}{I_2}$$

$$b_3 = \frac{l^3 R_1}{EI_3 \delta}, \quad f_1 = \frac{l^3 R_1}{ES_0 n_0 h \delta}, \quad f_2 = \frac{l^4 R_2}{EI_3 h \delta}, \quad f_3 = \frac{l^4 R_3}{EI_2 h \delta}, \quad R_1 = \Omega - q_1 - F_1$$

$$R_2 = q_2 + F_2, \quad R_3 = P_A - P_m + q_3 + F_3, \quad \delta = (1 - \nu)[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^{-1}$$

$$F_i = F_{ic} + F_{ip} \quad i = 1, 2, 3, \quad c_1 = \frac{q_x l}{\delta g T^2 E S_B}, \quad c_2 = \frac{R_1 l}{\delta E h S_B}, \quad n = \frac{q_x l^3}{\delta g T^2 I_{2B}}$$

$$n_1 = \frac{l^2 h \xi_c}{\delta E I_{2B} h}, \quad n_2 = \frac{q_x l^3}{\delta g T^2 I_{2B}}, \quad n_3 = \frac{l^3}{\delta E I_{2B} h}$$

T – некоторый характерный промежуток времени для тела Π . Величины с индексом B соответствуют поперечному сечению заданной системы в точке B . Предполагаем, что при выбранных функциях $g_i(s)$, $k_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, которые удовлетворяют нужным условиям согласования на границе тела AB , для краевой задачи (4)–(6) существует однозначное решение в классе непрерывных по t, s функций, имеющих непрерывные производные по t, s необходимого порядка [6, 9–13].

В случае вязкой среды уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - (P_H^{(1)} + \tilde{w}_1^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - (P_H^{(2)} + \tilde{w}_2^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) +$$

$$+ a_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3 \frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - (P_H^{(3)} + \tilde{w}_3^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) +$$

$$+ b_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3$$

с краевыми условиями типа (5), (6). Здесь имеем

$$\tilde{w}_1^2 = w_1 / \sqrt{ES_0 n \delta}, \quad \tilde{w}_2^2 = w_2 l / \sqrt{EI_3 \delta}, \quad \tilde{w}_3^2 = w_3 l / \sqrt{EI_3 \delta}$$

2. Условия технической устойчивости динамических состояний взаимодействующего с потоком жидкости длинного упругого тела. Рассмотрим векторный функционал вида

$$V[u_1, u_2, u_3, t] = \{V_1[u_1, t], V_2[u_2, t], V_3[u_3, t]\} \quad (8)$$

$$V_1[u_1, t] = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 - (\bar{v}_1 + \bar{F}_1) \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 \right] ds$$

$$V_2[u_2, t] = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} \right)^2 - (\bar{v}_2 + \bar{F}_2) \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 \right] ds$$

$$V_3[u_3, t] = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \right)^2 - (\bar{v}_3 + \bar{F}_3) \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] ds$$

$$\bar{v}_1 = \sup_{s,t} \left(\frac{mvl^2}{c^2 h} \right), \quad \bar{v}_2 = \sup_{s,t} \left(\frac{mvl^3}{\delta EI_1} \right), \quad \bar{v}_3 = \sup_{s,t} \left(\frac{mvl^3}{\delta EI_2} \right)$$

$$\bar{F}_k = \sup_{s,t} (P_k^{(t)} + f_k), \quad c^2 = \delta ES$$

Введем в рассмотрение, соответствующую процессу, векторную меру

$$\rho(u) = \{\rho_1(u_1), \rho_2(u_2), \rho_3(u_3)\}, \quad \rho_1(u_1) = \sup (u_1)^2 + \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 \right] ds$$

$$\rho_j(u_j) = \sup (u_j)^2 + \sup \left(\frac{\partial u_j}{\partial s} \right)^2 + \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 \right] ds, \quad j = 2, 3 \quad (9)$$

Для компонент вектор-функции (8) при неотрицательных величинах $[1 - (\bar{v}_k + \bar{F}_k)]$, $k = 1, 2, 3$ справедливы оценки снизу

$$V_i[u_i, t] \geq \frac{1}{2} [1 - (\bar{v}_i + \bar{F}_i)] \rho_i(u_i), \quad V_i[u_i, t] \geq \frac{1}{3} [1 - (\bar{v}_i + \bar{F}_i)] \rho_i(u_i) \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

Согласно (10) функционалы $V_i[u_i, t]$ (8) являются положительно-определенными относительно меры $\rho(u)$ (9) при выполнении условий

$$0 \leq \bar{v}_k + \bar{F}_k < 1, \quad k = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Величины $\mu_k = 1 - (\bar{v}_k + \bar{F}_k)$, $k = 1, 2, 3$ имеют смысл малого положительного параметра: $\mu_k \in (0, 1]$. Пусть I_t для процесса (4) - (6) равно:

$$I_t = [t_0, L\bar{\mu}^{-1}], \quad \bar{\mu}^{-1} = \max \{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1}\}, \quad K \equiv L\bar{\mu}^{-1}, \quad L = \text{const} > 0$$

Определение технической устойчивости аналогично [10, 13].

Полная производная по t от V (8) в силу (4) - (6) равна:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1[u_1, t]}{dt} &= 2 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, 1) \left[c_2 - c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(t, 1) \right] - \right. \\
&- \int_0^1 \left[(\bar{v}_1 + \bar{F}_1) \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial s} + \left(P_H^{(1)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - n_0^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial n_0}{\partial s} - f_1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial t} \right] ds \left. \right\} \\
\frac{dV_2[u_2, t]}{dt} &= -2n \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(t, 1) + 2 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t} \left[a_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) - \right. \right. \\
&- P_H^{(2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3 \frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2 \left. \right] - (\bar{v}_2 + \bar{F}_2) \frac{\partial u_2}{\partial s} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial s} \left. \right\} ds \\
\frac{dV_3[u_3, t]}{dt} &= 2 \left[\left(n_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial s}(t, 1) + n_2 \frac{\partial u_3}{\partial t}(t, 1) \right) (g\rho_{ж} V_{тн} - q_{тн}) - n_2 \frac{\partial u_3}{\partial t}(t, 1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(t, 1) \right] + \\
&+ 2 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial t} \left[b_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) - P_H^{(3)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_2 \frac{\partial n_0}{\partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3 \right] - \right. \\
&- (\bar{v}_3 + \bar{F}_3) \frac{\partial u_3}{\partial s} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial s} \left. \right\} ds
\end{aligned} \tag{12}$$

Выражения (12) справа обозначим соответственно $M_1(t, \lambda_1)$, $M_2(t, \lambda_2)$, $M_3(t, \lambda_3)$, $\lambda_1 = (c_1, c_2, \bar{v}_1, \bar{F}_1, P_H^{(1)}, f_1)$, $\lambda_2 = (n, a_1, a_2, a_3, \bar{v}_2, \bar{F}_2, P_H^{(2)}, f_2)$, $\lambda_3 = (n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3, \bar{v}_3, \bar{F}_3, P_H^{(3)}, f_3)$.

Рассмотрим вдоль решения $u_i(t, s)$, $i = 1, 2, 3$ задачи (4) – (6) функции

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t, \lambda_1) &= M_1(t, \lambda_1) - \frac{\mu_1}{2(\mu_1 + t)} \rho_1(u_1(t, s)) \\
\Phi_i(t, \lambda_i) &= M_i(t, \lambda_i) - \frac{\mu_i}{3(\mu_i + t)^2} \rho_i(u_i(t, s)) \quad i = 2, 3
\end{aligned} \tag{13}$$

Т е о р е м а 1. Пусть справедливы следующие условия: 1. Краевая задача (4) – (6) в I_1 имеет однозначное решение с вышеуказанными свойствами. 2. Для заданных функционалов $V_i[u_i(t, s), t]$, $i = 1, 2, 3$ справедливы условия

$$0 < \bar{v}_i + \bar{F}_i < 1 \quad i = 1, 2, 3 \tag{14}$$

3. В области I_1 заданы и существуют неотрицательные интегрируемые функции $\Phi_i(t)$ $i = 1, 2, 3$ переменного t , для которых вдоль решения $u_i(t, s)$, $i = 1, 2, 3$ системы (4) – (6) справедливы неравенства

$$|\overline{\Phi}_i(t, \lambda_i)| \leq \Phi_i(t), \quad i=1,2,3, \quad t \in I_1 \quad (15)$$

4. В области $G = \{t, y_i, \mu_i : t \in I_1, |y_i| < +\infty, \mu_i \in (0,1), i=1,2,3\}$ при условиях (6) для трехмерной задачи Коши сравнения

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{(\mu_i + t)^2} [y_i + \sigma_i(t)], \quad \sigma_i(t) = \int_{t_0}^t \Phi_i(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \quad i=1,2,3, \quad t \in I_1 \quad (16)$$

$$y_i(t) = y_i^0 \geq V_i[u_i^0(s), t_0], \quad y_i^0 \leq b_i, \quad i=1,2,3, \quad t_0 \in I_1 \quad (17)$$

существует единственное непрерывное решение

$$y(t) = \{y_1(t, t_0, y_1^0), y_2(t, t_0, y_2^0), y_3(t, t_0, y_3^0)\}$$

$$y_i(t, t_0, y_i^0) = \exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right] \left\{ \exp\left[\frac{1}{\mu_i + \bar{\tau}}\right] \Phi_i(\bar{\tau}) d\bar{\tau} + \right. \quad (18)$$

$$\left. + y_i^0 \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right] - \sigma_i(t), \quad i=1,2,3 \right.$$

5. Выполняется система неравенств

$$\int_{t_0}^t \Phi_i(\bar{\tau}) \exp\left[\frac{1}{\mu_i + \bar{\tau}}\right] d\bar{\tau} \leq M_i (\mu_i + L\bar{\mu}^{-1})^2 \left\{ \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right] - \right. \quad (19)$$

$$\left. - \exp\left[\frac{1}{\mu_i + L\bar{\mu}^{-1}}\right] \right\}, \quad t_0, t \in I_1, \quad i=1,2,3, \quad M_i = \text{const} > 0 \text{ наперед заданы}$$

Тогда динамический процесс (4)–(6) технически устойчив относительно векторной меры $\rho(u)$ при $\forall t \in I_1$.

Доказательство. Из условий 1–3 теоремы 1 для (12) находим

$$\frac{dV_i[u_i(t, s), t]}{dt} \leq \frac{1}{(\mu_i + t)^2} V_i[u_i(t, s), t] + \overline{\Phi}_i(t, \lambda_i), \quad i=1,2,3 \quad (20)$$

При решении задачи (4)–(6) при (14), (15) рассматриваем систему функций

$$z_i(t) = V_i[u_i(t, s), t] - \sigma_i(t), \quad i=1,2,3 \quad (21)$$

Оценки (20) порождают систему неравенств

$$\frac{dz_i(t)}{dt} \leq \frac{1}{(\mu_i + t)^2} [z_i(t), \sigma_i(t)], \quad i=1,2,3 \quad (22)$$

Из (22) следует система сравнения (16), (17). Из (14) имеем

$$z_i(t) \leq y_i(t, t_0, y_i^0), \quad i=1,2,3, \quad t \in I_1 \quad (23)$$

Из (23) для компонент V_i , $i=1,2,3$ (20) находим

$$V_i[u_i(t, s), t] \leq y_i(t, t_0, y_i^0) + \sigma_i(t), \quad i=1,2,3, \quad t \in I_1 \quad (24)$$

Из (24) вдоль решения краевой задачи (4)–(6) получаем

$$V_i[u_i(t, s), t] \leq P_i(t), \quad P_i(t) = \exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right] \int_{t_0}^t \exp\left[\frac{1}{\mu_i + \tau}\right] \Phi_i(\tau) d\tau + \quad (25)$$

$$+ b_i \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right], \quad t_0, t \in I_i, \quad i = 1, 2, 3$$

При условии 5 теоремы 1 находим систему оценок

$$P_i(t) \leq C_i, \quad C_i = \left[M_i (\mu_i + L\bar{\mu}^{-1})^2 + b_i \right] \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right], \quad t_0, t \in I_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

Из (17), (25), (26) следует справедливость утверждения теоремы 1.

Теорема 2. Пусть условия 1–4 теоремы 1 справедливы в любом промежутке $I_i \subset I$ и выполняются неравенства

$$\exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right] \geq \int_{t_0}^t \exp\left[\frac{1}{\mu_i + \tau}\right] \Phi_i(\tau) d\tau, \quad \forall I_i \subset I, \quad (\mu_i + L\bar{\mu}^{-1})^2 \geq 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (27)$$

Тогда исходный динамический процесс (4)–(6) технически устойчив по мере $\rho(u)$ в области I . Доказательство теоремы 2 подобно доказательству теоремы 1, так как

$$P_i(t) \leq b_i \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right] + 1 \leq C_i, \quad t_0, t \in I, \quad i = 1, 2, 3$$

Теорема 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 в 1 имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i(t, t_0, y_i^0) + \sigma_i(t)] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (28)$$

Тогда динамический процесс (4)–(6) асимптотически технически устойчив относительно меры $\rho(u)$.

Сформулированные условия технической устойчивости процесса (4)–(6) нарушаются, если выполняются неравенства

$$\bar{v}_i + F_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

Исходный процесс будет технически неустойчивым на конечном и бесконечном интервале времени, если соответственно в этих областях мажоранты $P_i(t)$ в (25) удовлетворяют условиям

$$P_i(t) \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3 \quad (30)$$

В частности, условие (30) выполняется при $t_0 = 0$ и произвольных $t \geq 0$, когда $\mu_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3$. Как следует из определения величин μ_i , это возможно при стремлении скорости v движения упругого тела AB в

жидкости к некоторому своему критическому значению $V_{кр}$; аналогичное относится к скорости движения жидкости и к внешним силам, действующим на заданное упругое тело, или эти все названные величины возрастают одновременно. Критическая скорость $V_{кр}$ движения упругого тела в идеальной жидкости определяется при помощи неравенств (29) и равна следующей величине:

$$v_{к0} = \left[3ES_0 n_0 h I_2 I_3 \delta - I_2 I_3 \left(l^2 R_1 + S_0 h \delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - S_0 n_0 I_2 \left(l^4 R_2 + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - S_0 n_0 I_3 \left(l^4 R_3 + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) \right] [ml^2 (I_2 I_3 + l S_0 n_0 h I_2 + l S_0 n_0 h I_3)]^{-1} \quad (31)$$

Легко убедиться, что теоремы 1–3 справедливы в случае процессов (7), (5), (6) при учете взаимодействия системы с вязкой жидкостью. В потоке вязкой жидкости для $V_{кр}$ имеем

$$v_{к0} = \left[3ES_0 n_0 h I_2 I_3 \delta - I_2 I_3 \left(l^2 R_1 + w_1^2 h + S_0 h \delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - S_0 n_0 I_2 \left(l^4 R_2 + w_2^2 l^2 h + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - S_0 n_0 I_3 \left(l^4 R_3 + w_3^2 l^2 h + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) \right] \times [ml^2 (I_2 I_3 + l S_0 n_0 h I_2 + l S_0 n_0 h I_3)]^{-1} \quad (32)$$

Из (31), (32) следует явная зависимость критической скорости $V_{кр}$ движения упругого тела AB в потоке жидкости от других основных параметров исходного процесса. Изменение последних тянет за собой соответствующие изменения критической скорости движения системы в движущейся жидкости. Аналогичным путем найдем критические значения других параметров исследуемого процесса. Следовательно, при движении длинного упругого тела переменного сечения в потоке жидкости со скоростью, не превышающей критического значения $V_{кр}$, определяемого согласно (31) или (32), динамический процесс (4)–(6) или (7), (5), (6) является технически устойчивым согласно приведенным определениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
3. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформированных тел. Киев: Наукова думка, 1971. 276 с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Наука, 1976. 416 с.
5. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
6. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ. 1959. 23. №3. С.483–494.
7. Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // МГТ. 1975. №6. С.15–24.
8. Матросов В.М., Анапольский А.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
9. Матвийчук К.С. Определение условий технической устойчивости параметрически возбуждаемых распределенных систем // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №3. С.23–32.
10. Матвийчук К.С. Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.210–218.
11. Матвийчук К.С. Техническая теория устойчивости параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке // Изв. АН СССР. МГТ. 1990. №4. С.122–131.
12. Матвийчук К.С. Условия технической устойчивости управляемых процессов с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. 1998. №2. С.84–93.
13. Матвийчук К.С. Техническая устойчивость прямолинейного трубопровода с транспортируемой жидкостью // ПМ. 1989. Т.25. №5. С.97–102.
14. Szarski J. Differential inequalities—Warszawa: PWN, 1967. 256 p.

Институт механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины

Поступила в редакцию
19.04.2000